7. Vytváření představ a pojmů v matematice
Irena Budínová

Pojmotvorný proces

Žák vstupuje do každé fáze výukového procesu s **prekoncepty**. Jedná se o dětské chápání a intepretace jevů okolního světa, které si dítě vytváří před zahájením školního vzdělávání i v jeho průběhu. Tyto „přechozí znalosti“ mají převážně **zkušenostní a zážitkovou povahu**, často jsou emocionálně zabarvené. Pod vlivem vzdělávacích obsahů, prezentovaných ve škole, ale i působením četby, médií, aj. se naivní poznatky dětí o obklopujícím je světě mění, dochází ke **kognitivnímu vývoji**. (Pedagogický slovník)

Kognitivní vývoj má svá přirozená stádia. K nejvlivnějším teoriím patří koncepce švýcarského psychologa Jeana Piageta, předpokládající tato vývojová stádia: názorného myšlení (asi do 6 let), konkrétních operací (7 – 11 let), formálních operací, abstraktního myšlení (od 12 let dítěte). Chceme-li v matematice dosáhnout schopnosti žáků abstrakce, je třeba pečlivě projít předchozí stádia. Jestliže učitel podcení potřebu dítěte mladšího věku opírat své poznání o názorné představy, k abstrakci nemůže dojít.

M. Hejný uvádí pět etap **poznávacího procesu** ve výuce matematice: **Motivace ⇨ izolované modely ⇨ generický model procesuální ⇨ generický model konceptuální ⇨ abstraktní poznatek ⇨ krystalizace**. V průběhu poznávacího procesu dochází ke dvěma **abstrakčním zdvihům**: mezi izolovaným modelem a generickým modelem dochází ke **zobecnění**, mezi generickým modelem a abstraktním poznatkem dochází k **abstrakci**.

Každý pojem vzniká v žákově poznávacím procesu po dobu několika let. Poznávací proces je v matematice velice individuální. Učitelé se často snaží uměle urychlit vývoj pojmu **využíváním paměti** nebo **nahrazováním fáze manipulace s konkrétními objekty pomocí mnemotechnických pomůcek**, oba tyto přístupy se časem projeví jako kontraproduktivní – žák není schopen urychleně a formálně získané poznatky využít v praktických problémech.

Fáze poznávacího procesu na příkladu **sčítání přirozených čísel**:

- **Motivací** je pro dítě ve věku cca 4,5 let přirozená touha a potřeba poznávat svět, dítě se začíná zajímat o počty objektů. Nejdříve říká „jedna, dva, tři“ jako básničku, nedokáže odpovědět, kolik je bonbonů (vždy odpovídají „1, 2, 3“). Později se učí vyjmenovat řadu čísel 1 – 10, ale zatím tyto pojmy nechápe jako označení počtu. Do 6 let je většina dětí schopna spočítat počet objektů do 10.
- Na základě představ získaných v předškolním věku dochází ke vzniku **izolovaného modelu** sčítání přirozených čísel. Jestliže má dítě na stole dvě hromádky s bonbóny, lze z nich vytvořit jedinou hromádku bonbonů. Proces lze zapsat jako 2+3=5.
- Později dochází k **zobecnění**, dítě začíná chápat, že pojem číslo není závislý na množině objektů, se kterými počítáme, a také že sčítání není na množině závislé – stejný výsledek

dostaneme, jestliže pracujeme se 2 a 3 bonbóny, s 2 a 3 kamarády, později můžeme uvažovat heterogenní množiny (2 chlapci a 3 děvčata je 5 dětí), nakonec se výpočet omezí na 2+3=5 (počítání pouze s číslem). Vzniká **generický model procesuální**, sčítání je chápáno jako proces, příkaz „2+3=?“ nám sděluje, jaký proces máme provést.

- Výsledek „5“ je výsledek různých procesů: 1+4, 4+1, 2+3, 3+2, je vnímán jako koncept. Většina dětí mladšího věku však zůstává spíše u procesuálního modelu.
- Jestliže dojde k dalšímu **abstrakčnímu zdvihu** (nemusí k němu dojít, mnoho lidí si vystačí s procesuálním generickým modelem), vzniká **abstraktní znalost**. Trojice (2, 3, 5) je **aditivní triáda konceptu** 2+3=5. Skrývá v sobě další operace: 3+2=5, 5-2=3, 5-3=2. Můžeme triádu zapsat také zcela obecně jako (x, y, z). Abstraktní znalost je např. potřebná k pochopení Peanových axiomů a postupného zavádění číselných oborů.
- **Krystalizace** je potřebná k ukotvení nových poznatků do kognitivní soustavy. Přichází s časem za podmínky procvičování.

Motivací je pro žáky touha poznávat. Bohužel v raných stádiích školní docházky nastává velmi často rozčarování, nenaplnění očekávání a demotivace. Touha po školním vzdělávání pramení z předchozích radostných AHA-okamžiků, a z rozporu mezi existujícím slovem „nevím“ a intencí „potřebuji znát“. Vhodnou motivací do výuky je pocit úspěchu, zadávání přiměřených úloh, individualizace výuky.

Izolovaný model je konkrétní případ příští znalosti. Někdy je izolovaný model špatně vytvořen (na základě prekonceptu) – někteří žáci považují číslo $\frac{2}{4}$ za sudé číslo, číslo 2,5 za dvoumístné, číslo $0,\overline{3}$ za desetinné, čtverec postavený na špičku za kosočtverec. Na druhé straně odmítají za pojem prohlásit izolovaný model, který jím skutečně je: číslo 2,0 není desetinné, $\frac{6}{3}$ není celé, trojúhelník postavený na špičku není trojúhelník, atd.

V průběhu fáze izolovaných modelů dochází k tomu, že si žáci všímají souvislostí a ty potom odhalí. Např.: všímejte si součinů: $11 \cdot 11 = 121$, $111 \cdot 111 = 12321$. Na základě pozorování určete součiny $11111 \cdot 11111$, $1111111 \cdot 1111111$ (123454321, 1234567654321).

Generický model vzniká procesem zobecnění z komunity izolovaných modelů. **Procesuální generický model** je návod, jak proces pokračuje dále. **Konceptuální generický model** je obecná zákonitost.

Abstraktní poznatek je ve školské matematice potřebný např. tehdy, když dochází ke změně obecného čísla na písmeno. Většina žáků si osvojí pouze manipulativní dovednosti a standardní použití písmen v nacvičených situacích. Žáci dostávají velmi silný nástroj – písmena příliš brzy, když necítí žádnou potřebu jazyka písmen.

Poznatek, znalost, formální poznatek

Poznatek je každý prvek dlouhodobé paměti člověka. **Informace** je poznatek, který do paměti vstoupil zvenčí a oporu v již existujících izolovaných a generických modelech musí teprve hledat. **Znalost** je poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů. **Formální poznatek** je informace, která mohla být znalostí. Příkladem mohou být různé mnemotechnické pomůcky na zapamatování „$- \times - = +$“, kdy žák není schopen poznatek využít v komplexnější úloze. Nebo „poučka“ o sčítání zlomků: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$, kterou žák není schopen použít už při sčítání tří zlomků. Formalismus také způsobuje častou chybu nejen dyskalkuliků $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Diagnostikování formalismu: 1) přijetí úlohy žákem, 2) uchopení úlohy, 3) práce s chybou, 4) řešitelská strategie (např. rutinní, nerutinní, vhled, modelování, pokus omyl, od konce, aj.), 5) argumentace, 6) jazyky (zápis, označení).

Z hlediska pojmotvorného procesu rozlišujeme **transmisivní** a **konstruktivistické přístupy** ve výuce matematice. Transmisivní metody spočívají v předávání hotových poznatků žákům. V hodině je aktivní zejména učitel. Je upřednostňováno pamětné učení bez porozumění, dochází často k formalismu. Častým argumentem učitelů je časová úspora, kdy pouhé sdělení poznatku trvá daleko kratší dobu než objevování vlastních závěrů žákem. Dále je argumentováno tím, že žáci mají v poznatcích zmatky, neujasní si celkově pravidla. Transmisivní výuka se však projevuje časem a paradoxně se díky ní další výuka zpomaluje. Učitelé si pak stěžují, že danou látku již probírali loni, žáci vše zapomněli a teď aby vše probrali znovu, když musí na látku navazovat.

Při používání transmisivních metod jsou poznatky často sdělovány **instruktivně** – žákům je představeno nějaké pravidlo a instrukce, jak se toto pravidlo používá. Žák nemusí pravidlu rozumět, nemusí rozumět ani pojmům, které při tom využívá. Například při sčítání desetinných čísel nemusí mít žák představu o číslech 0,5 nebo 0,2, aby je dokázal správně sečíst.

Při využívání **konstruktivistických přístupů** ve výuce je hlavní žák, učitel pokládáním vhodných otázek či zadáváním zajímavých úloh umožňuje žákům objevovat nové poznatky. Výuka se zezačátku zdá časově neefektivní, žákovy poznatky netvoří celistvý celek.

Ve výuce by neměl stoprocentně převažovat žádný z těchto přístupů, učitel citlivě volí mezi oběma tak, jak to je pro žáky nejpřínosnější. Např. je vhodné nechat žáky objevit nový poznatek (pokud je to v jejich silách), ale pak učinit obecný závěr a zapsat pravidla pro počítání.

Sčítání zlomků – instruktivní přístup:

- Učitel žákům předloží poučku nebo pravidlo pro sčítání dvou zlomků: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.
- Zadává příklady, pomocí nichž si žáci nové pravidlo osvojují a procvičují.

Sčítání zlomků – konstruktivistický přístup:

- Učitel klade následující dotazy nebo úkoly: Pokus se sečíst pomocí obrázku $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, apod. (zezačátku se omezuje na kmenné zlomky, žáci pracují s modely – obrázky nebo zlomková věž).

- Když se žáci v prvním úkolu zorientují a jsou schopni ho plnit, ztíží zadání: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.
- Když žáci objeví pravidlo, jak sčítat zlomky, učitel je nechá vyslovit závěr: Musíme zlomky rozšířit tak, aby měly stejný jmenovatel, a pak se sečtou.

Různé přístupy k výuce vět o shodných trojúhelnících

– od transmisivních až po konstruktivistické přístupy.

1. Sdělení. Např.: „Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže se shodují v úhlu a straně jimi sevřené."
2. Otázky. Např.: „Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnosti úhlů?" „Stačí ke shodnosti trojúhelníků shodnosti úhlů a jedné strany?"
3. Obálka. Skupina žáků vytáhne obálku s 6 lístečky (všechny údaje stran a úhlů pro jeden trojúhelník). Vytahují (losují) lístečky tak dlouho, až mohou narýsovat trojúhelník.
4. Diktát. Žák narýsuje trojúhelník, pak diktuje dalším ve skupině, aby narýsovali totéž.
5. Dotazy. Učitel ukáže žákům trojúhelník vystřižený z papíru, schová ho. Žáci co nejmenším počtem dotazů mají stejný trojúhelník narýsovat a vystřihnout (dotazy píší na papírky, aby nebyl velký hluk). Učitel musí mít nachystány opravdu všechny údaje o trojúhelníku, protože žáci se ptali i na to, jaký má obvod, obsah, neadresně na „velikost úhlu", apod.

Zavádění pojmů ve školské matematice

Ve výuce matematiky obvykle neuvádíme matematicky přesnou definici. Učitel má několik možností, jak nové pojmy zavádět:

1. **Obrázkem** – z několika obrázků trojúhelníku žák pochopí, co je trojúhelník. Zezačátku bývají takto zaváděné pojmy nepřesné – protože se trojúhelník obvykle kreslí základnou dolů, mladší děti nepokládají jinak umístěný trojúhelník za trojúhelník. Obdobně tupoúhlý trojúhelník. Je potřeba uvádět protipříklady, aby se předešlo špatné interpretaci (např. pouze hranice trojúhelníku, neuzavřená křivka, tvar podobný trojúhelníku s více úhly, aj.)
2. Pomocí **procesu** – např. kružnici lze definovat pomocí kolíku zapíchnutého do země a provázku – jakou má vlastnost množina bodů, kterou opíše konec provázku? Jsou stejně vzdáleny od kolíku.
3. Pomocí **izolovaných modelů** – např. zlomek lze zavést pomocí různých příkladů: $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{4}, \frac{-16}{8}$. Jestliže pomocí obrázků či vhodných úloh vysvětlíme význam jednotlivých částí zlomku, žáci izolované modely správně zobecní. Musí se setkat i s protipříklady (např. $\frac{2,2}{3,5}, \frac{8}{-15}$).
4. **Slovně (definicí)** – lichoběžník je čtyřúhelník, který má jednu dvojici rovnoběžných protějších stran a jednu dvojici různoběžných protějších stran. Definice musí obsahovat všechny vlastnosti potřebné k jednoznačnosti pojmu, ale žádné další. Je např. chyba

definovat čtverec jako rovnoběžník, jehož sousední strany jsou na sebe kolmé a navíc dodat, že úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé. To je vlastnost, která se musí dokazovat.

Cílem je vždy to, aby žáci pochopili **základní vlastnosti** zkoumaných objektů.

Je potřeba kontrolovat, zda pojmům žák přiřazuje správnou představu. Představa některých pojmů se vytvoří nedokonale, např. pojem úhlu žáci chápou jen v dosahu nakreslených ramen na papíru, nebo pouze obloučku, kterým je vyznačen, pojem trojúhelníku chápou jen jako hranici, bez vnitřních bodů, nerozlišují pojmy číslo a číslice, kružnice a kruh, apod.

Matematické věty ve školské matematice

Matematické věty se ve školské matematice objevují ve formě neoblíbených „pouček“ nebo pravidel v rámečku. Většinou je vyslovena poučka a ta se pak procvičuje na příkladech. Např.:

Desetinná čísla odčítáme tak, že odečteme jednotky od jednotek, desetiny od desetin, setiny od setin, atd.

Ze dvou zlomků se stejným jmenovatelem je větší ten, který má většího čitatele.

Jestliže je trojúhelník pravoúhlý s odvěsnami a, b a přeponou c, pak platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Věty na základní škole obvykle nejsou dokazovány. Výjimku tvoří některé geometrické důkazy, které vedeme pomocí obrázku – tzv. **důkaz beze slov**. Příkladem je důkaz Pythagorovy věty.

V mnoha případech můžeme matematické tvrzení na základní škole **ověřovat**, tzn. pomocí izolovaných modelů prověřovat pravdivost. Např.:

Je-li číslo dělitelné dvěma čísly navzájem nesoudělnými, je dělitelné i jejich součinem.

Instruktivní přístupy: Žák se seznámí s poučkou, využívá ji k řešení příkladů. **Konstruktivistický přístup:** Žák objevuje pravidlo pomocí izolovaných modelů.

Zavádění pojmů v matematice

Pojem chápeme jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.

Každý pojem má určitý **obsah** a **rozsah**. **Obsah pojmu** je souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické. **Rozsah pojmu** je množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem.

Jestliže se rozšíří obsah pojmu, zúží se jeho rozsah a naopak. Např.: *Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné.* Rozsah tohoto pojmu tvoří všechny rovnoběžníky. Jestliže rozšíříme obsah tohoto pojmu, např. připojíme shodnost sousedních stran, do rozsahu pojmu patří jen čtverec a kosočtverec.

Rozlišujeme pojmy **konkrétní a abstraktní**. Konkrétní pojmy odrážejí konkrétní objekty, např. krychle, kvádr, koule. Abstraktní pojmy vznikají jako objekty myšlení, např. přímka, množina, číslo, aj.

Pojmy vytváříme v určitém systému. Pro přehlednost provádíme **klasifikace (třídění) pojmů**. Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:

- Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
- Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
- Jednotlivé třídy musí být navzájem disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

Úkol:

1. Uveďte klasifikaci vzájemné polohy dvou přímek v prostoru.
2. Proveďte klasifikaci trojúhelníků
    a) podle stran,
    b) podle úhlů.

Při výstavbě každé teorie má být splněn požadavek přesného definování všech pojmů v teorii používaných. Avšak tento proces by byl nerealizovatelný, kdyby se z některých pojmů nevycházelo jako z **pojmů základních**. Např. pro definici pojmu přímka by bylo nutné definovat např. pojem čára, tento pojem by vyžadoval definici dalších pojmů a tento proces by nikdy nekončil. Proto se v matematice vychází od tzv. **základních pojmů**, jejichž význam je přesně vymezen **axiomy** a ze základních pojmů se potom uvádějí pojmy odvozené pomocí **definic**.

Pojmy základní

Prvotní pojmy jsou pojmy, ze kterých daná teorie vychází, např. v geometrii jsou to pojmy bod, přímka, rovina, aj. První, kdo zavedl prvotní pojmy, byl Eukleides. V první knize Základů uvádí definice 23 základních geometrických pojmů, z nichž představíme prvních sedm:

1. Bod je to, co nemá části.
2. Čára je délka bez šířky.
3. Hranice čáry jsou body.
4. Úsečka je čára, která je vůči bodům na ni ležícím umístěna rovně.
5. Plocha je to, co má pouze délku a šířku.
6. Hranice plochy jsou čáry.
7. Rovina je plocha, která je vůči úsečkám na ni ležícím umístěna rovně.

Eukleides si uvědomil, že není možno podat důkazy všech tvrzení, že je třeba jisté věty považovat za pravdivé, z jejich platnosti vycházet a pomocí nich pak postupně deduktivně odvozovat věty další. Jako první v historii použil pro základ geometrie soustavu **axiomů** (tj. tvrzení, která se předem považují za pravdivá a tudíž se nedokazují). Ve svém díle Základy uvádí 14 axiomů, z nichž 5, které mají geometrický charakter, nazývá **postuláty**. Ve starším znění mohou být postuláty následující:

1. Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2. A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
3. A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.
4. A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.
5. A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Modernější formulace postulátů je následující:

1. Dvěma body lze vést jedinou přímku.
2. Úsečku je možno neomezeně prodlužovat.
3. Z libovolného středu je možno libovolným poloměrem opsat kružnici.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Dvě přímky v rovině, které protínají další přímku této roviny, se vždy protínají na té straně od této přímky, kde je součet přilehlých vnitřních úhlů menší než úhel přímý.

Poslední tvrzení je ekvivalentní s tzv. **axiomem rovnoběžnosti**, tj. že v rovině je možno vést daným bodem, který neleží na dané přímce této roviny, nejvýše jednu přímku, která nemá s danou přímkou žádný společný bod.

Německý matematik David Hilbert (1862 – 1943) rozdělil axiomy eukleidovské geometrie do pěti skupin na **axiomy incidence**, **axiomy uspořádání**, **axiom rovnoběžnosti**, **axiomy shodnosti** a **axiomy spojitosti**.

Axiomatická teorie aritmetiky byla uvedena až po objevu teorie množin.

Matematická definice

Další odvozené pojmy se zavádí pomocí definic. Matematika bez definic by byla možná, ale byla by nepřehledná, neboť každý pojem by se musel neustále vymezovat.

Matematická definice je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou pojmy dříve známé (Slovník školské matematiky, 1981). Ve školské matematice se nejčastěji vyskytují definice **nominální** a **konstruktivní**.

Definice, kterou se zavádí **název** definovaného pojmu, se nazývá **definice nominální**. Např.: *Čtyřúhelník, jehož protější dvojice stran jsou rovnoběžné, se nazývá rovnoběžník.* Ve tvaru ekvivalence: *Čtyřúhelník se nazývá rovnoběžník právě tehdy, když dvojice jeho protějších stran jsou rovnoběžné.*

Definice, kterou se zavádí **způsob konstrukce** nového pojmu, se nazývá **definice konstruktivní**. Např.: *Je dán bod S a nezáporné reálné číslo r. Kružnice je množina bodů v rovině, které mají od bodu S vzdálenost r.*

Některé pojmy lze definovat různými způsoby (např. trojúhelník, kružnice, atd.)

Chybné definice

Při definování pojmů se setkáváme s řadou nedostatků, z nichž některé uvedeme:

- **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
- **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu, je obsáhlejší, než je množina objektů, které přísluší definici přesné.
- **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu. Množina objektů, které náleží takto definovanému pojmu, je užší, než množina objektů příslušejících definici přesné.
- **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
- **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

Úloha: Najděte chyby v uvedených definicích a pojmy definujte správně:

1. Kružnice je množina bodů, které mají od daného pevného bodu stejnou vzdálenost.
2. Rovnoběžník je geometrický útvar, který má protější strany rovnoběžné.
3. Rovnoběžník je čtyřúhelník, jeho protější dvojice stran jsou rovnoběžné a shodné.
4. Dva geometrické útvary jsou podobné, když se podobají.
5. Číslo je dělitelné dvěma, je-li sudé. Sudé číslo je číslo, které je dělitelné dvěma.
6. Dvě přímky jsou na sebe kolmé, jestliže svírají pravý úhel. Pravý úhel je úhel, který svírají kolmice.
7. Délka úsečky je vzdálenost dvou bodů. Vzdálenost dvou bodů je délka úsečky.

Řešení:

1. Definice široká, může zahrnovat i interval a kouli.
   Je dán bod S a nezáporné reálné číslo r. Kružnice $k(S, r)$ je množina všech bodů X **v rovině**, které mají od bodu S vzdálenost r.
2. Definice široká. Existují i další geometrické útvary, jejichž protější strany jsou rovnoběžné, např. pravidelný šestiúhelník.
3. Definice úzká.
   Rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné.
4. Definice tautologií.
   Dva geometrické útvary jsou podobné, právě když existuje kladné reálné číslo k takové, že pro každé dvě dvojice bodů $(X, Y), (X', Y')$ platí $|XY| = k|X'Y'|$.
5. Definice kruhem.

Přirozené číslo je dělitelné dvěma, jestliže má na místě jednotek některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8. Přirozená čísla, která jsou dělitelná dvěma, se nazývají sudá čísla.

6. Definice kruhem.
   Správně je první věta. Pravý úhel je úhel, který je shodný se svým úhlem vedlejším.
7. Definice kruhem.
   Délka úsečky je nezáporné reálné číslo, které udává, jakým je úsečka násobkem úsečky jednotkové.

Matematická věta

Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem. Většina vět má tvar implikace, pokud platí implikace v obou směrech, je věta uvedena jako ekvivalence.

Jestliže je přirozené číslo n dělitelné třemi, pak jeho ciferný součet je dělitelný třemi. Platí i obrácená věta: *Jestliže je ciferný součet čísla n dělitelný třemi, pak je číslo n dělitelné třemi.* Věta se tedy může uvádět jako ekvivalence: *Přirozené číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi.* Protože se ale obvykle uvádí důkaz pouze druhé implikace, uvádí se věta jako druhá implikace. (Na totéž musíme dávat pozor např. u Pythagorovy věty, abychom dokazovali správnou implikaci)

Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky jako

$$(\forall x \in D)[A(X) \Rightarrow B(X)]$$

kde D je definiční obor výrokových forem, $A(x)$ se nazývá **předpoklad** a $B(x)$ **tvrzení** a říkáme, že věta je v podmínkovém tvaru. Každá věta má mít jasně vyslovený předpoklad. Ve větách formulovaných v učebnicích se často stává, že předpoklad není vysloven. Např. věta „Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý“ by měla být vhodněji vyslovena v podmínkovém tvaru: „Jestliže je geometrický útvar trojúhelník, pak součet jeho vnitřních úhlů je úhel přímý.“

Z původní věty vytvoříme **větu obrácenou** tak, že zaměníme předpoklad a tvrzení:

$$(\forall x \in D)[B(x) \Rightarrow A(x)]$$

Jestliže vytvoříme negace výrokových forem ve větě obrácené, získáme **větu obměněnou**:

$$(\forall x \in D)[B'(x) \Rightarrow A'(x)]$$

Důkazy matematických vět

V matematice používáme základní typy důkazů: důkaz přímý, nepřímý, sporem a matematickou indukcí. Znalost důkazů (či schopnost důkazy provádět) je důležitá pro práci učitele. Na základní škole zpravidla věty nedokazujeme, avšak měli bychom každou větu ověřit. Najdou se žáci, kteří jsou rádi, když jim učitel důkaz věty ukáže. (Na Dětské univerzitě jsem řekla, že už Platón věděl, že pravidelných mnohostěnů je právě pět a našel se jeden žák, který se zeptal, jak to mohl vědět.)

- **Důkaz přímý:** Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují. *Jestliže je poslední dvojčíslí přirozeného čísla dělitelné čtyřmi, pak je dané číslo dělitelné čtyřmi.*
- **Důkaz nepřímý:** Podstata nepřímého důkazu spočívá v tom, že místo věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokážeme větu obměněnou $B'(x) \Rightarrow A'(x)$. *Jestliže číslo n^2 je dělitelné třemi, pak číslo n je dělitelné třemi.*
- **Důkaz sporem:** Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$. *Dokažte, že $\sqrt{5}$ není racionální číslo.*
- **Důkaz matematickou indukcí:** Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel:
  1) Dokážeme, že věta platí pro první prvek.
  2) Předpokládáme, že věta platí pro přirozené číslo k a dokážeme, že věta platí také pro $k+1$.

  Dokažte, že platí $1 + 3 + \cdots + (2n + 1) = n^2$. (Tato věta má i geometrickou interpretaci – čtvercová čísla)