

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Doplnění úloh k distanční výuce

Základy matematických disciplín
IMAk01 (podzim 2020)

MUNI

Katedra matematiky PdF MU
Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Úlohy z teorie množin

Základy matematických disciplín
IMAk01 (podzim 2020)

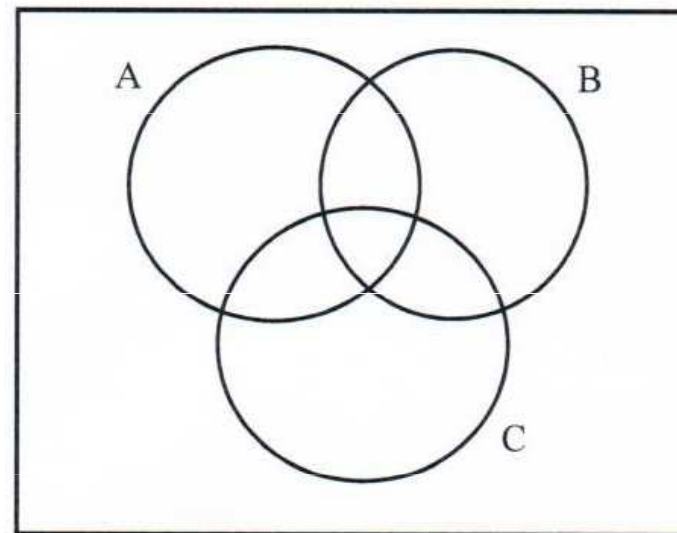


Příklad 1: Pro množiny A, B, C platí:

$$A \Delta B = B \cap C \wedge A \subset C - A \wedge B \neq \emptyset. \quad (\text{Drábek, text, str. 18, cv. 18 a)})$$

Situaci znázorněte v množinovém diagramu pomocí symbolů \emptyset a \bullet a rozhodněte o pravdivosti následujících výroků:

1. $C \neq \emptyset$
2. $B \Delta C \neq \emptyset$
3. $A \cup B = A \Delta B$
4. $A = \emptyset$
5. $B \cup C = B \cap C$
6. $A \cap B \subset B \cap C$
7. $A \subset C$
8. $(A \cup B \cup C)' = A'$



Řešení:

$$A \Delta B = B \cap C \wedge A \subset C - A \wedge B \neq \emptyset.$$

1. podmínka: $A \Delta B = B \cap C$

$$I \cup IV \cup III \cup \underline{VI} = V \cup \underline{VI}$$

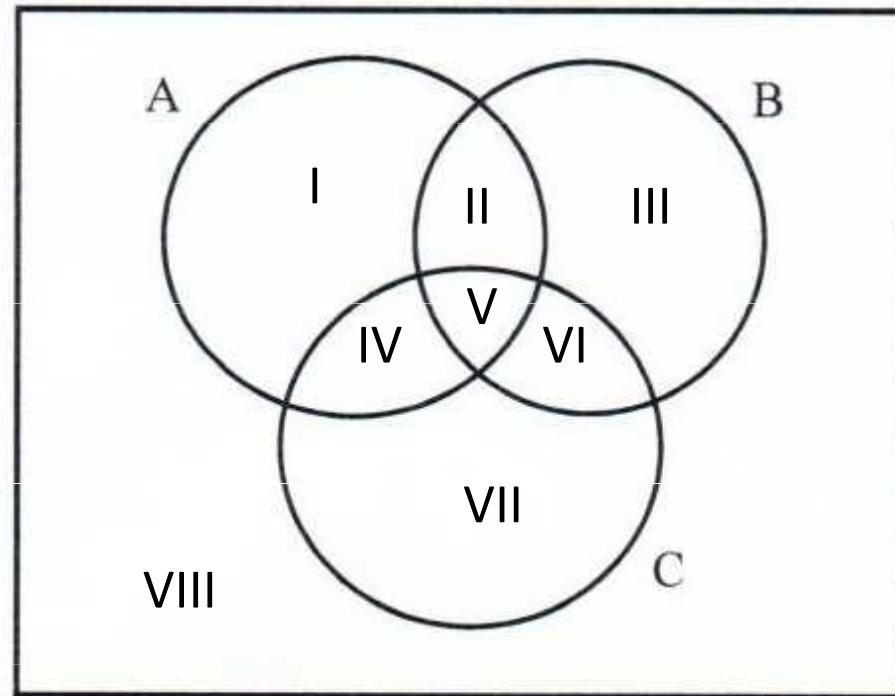
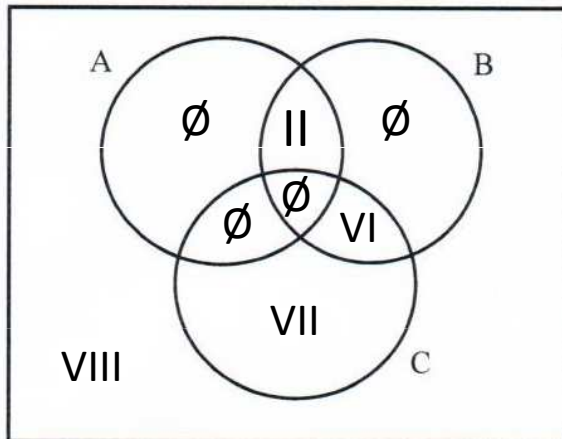


$$I = \emptyset$$

$$IV = \emptyset$$

$$III = \emptyset$$

$$V = \emptyset$$



Řešení:

$$A \Delta B = B \cap C \wedge A \subset C - A \wedge B \neq \emptyset.$$

2. podmínka: $A \subset C - A$

$$I \cup II \cup IV \cup V \subset VI \cup VII$$

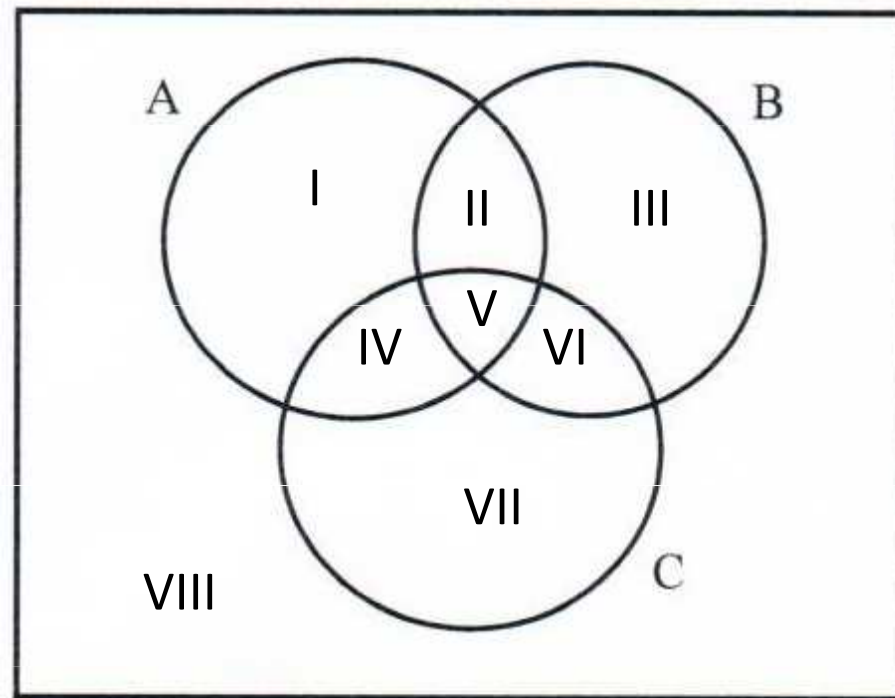
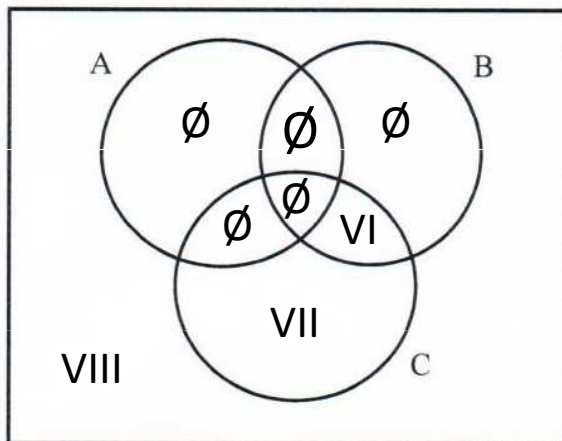


$$I = \emptyset$$

$$II = \emptyset$$

$$IV = \emptyset$$

$$V = \emptyset$$



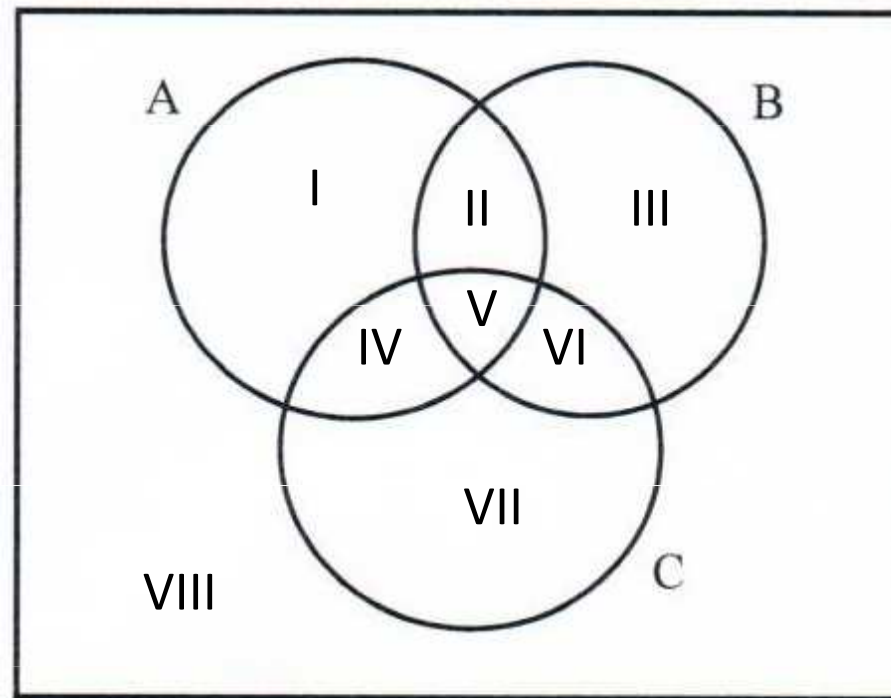
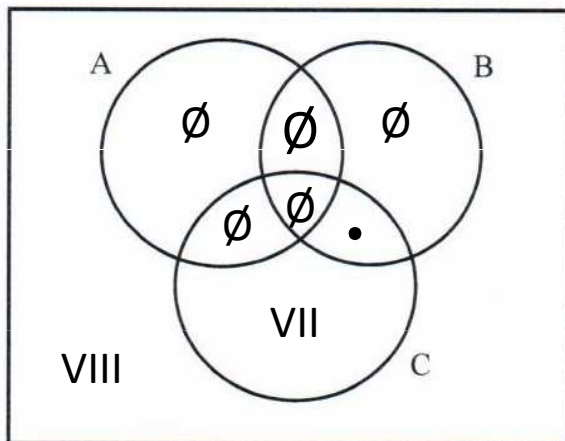
Řešení:

$$A \Delta B = B \cap C \wedge A \subset C - A \wedge B \neq \emptyset.$$

3. podmínka: $B \neq \emptyset$

$$II \cup III \cup V \cup VI \neq \emptyset$$

$$VI \neq \emptyset$$

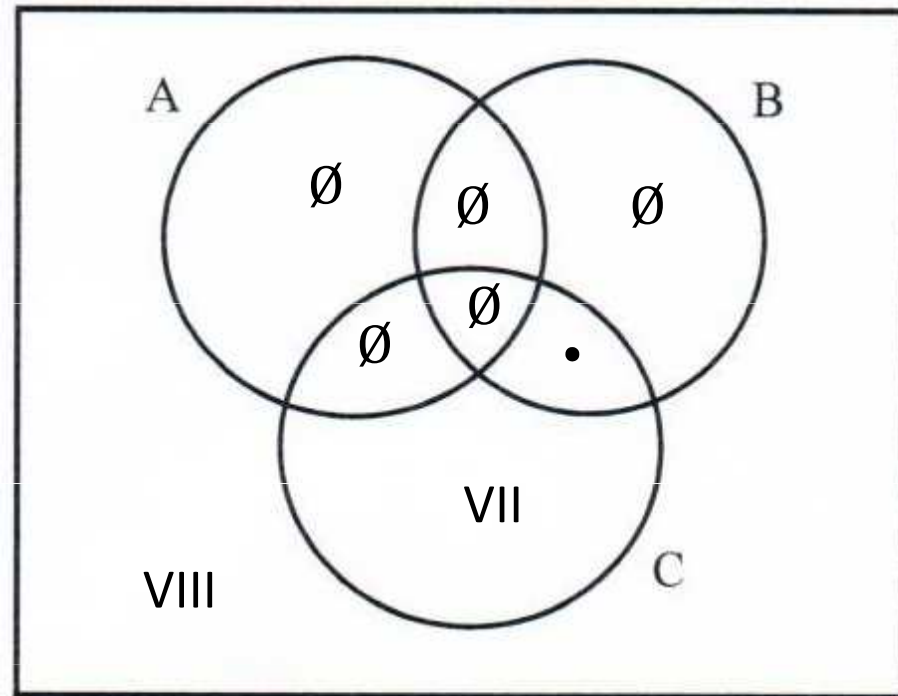


Řešení:

$$A \Delta B = B \cap C \wedge A \subset C - A \wedge B \neq \emptyset.$$

Máme zjistit, zda následující výroky jsou pravdivé:

1. $C \neq \emptyset$
2. $B \Delta C \neq \emptyset$
3. $A \cup B = A \Delta B$
4. $A = \emptyset$
5. $B \cup C = B \cap C$
6. $A \cap B \subset B \cap C$
7. $A \subset C$
8. $(A \cup B \cup C)' = A'$



1. $C \neq \emptyset$ pravdivý ($C = IV \cup V \cup VI \cup VII$)

2. $B \Delta C \neq \emptyset$ nelze rozhodnout

$$(B \Delta C = II \cup III \cup IV \cup VII)$$

3. $A \cup B = A \Delta B$ pravdivý

$$(A \cup B = I \cup II \cup III \cup IV \cup V \cup VI)$$

$$A \Delta B = I \cup IV \cup III \cup VI)$$

4. $A = \emptyset$ pravdivý

5. $B \cup C = B \cap C$ nelze rozhodnout

$$(B \cup C = II \cup III \cup IV \cup V \cup VI \cup VII)$$

$$B \cap C = V \cup VI)$$

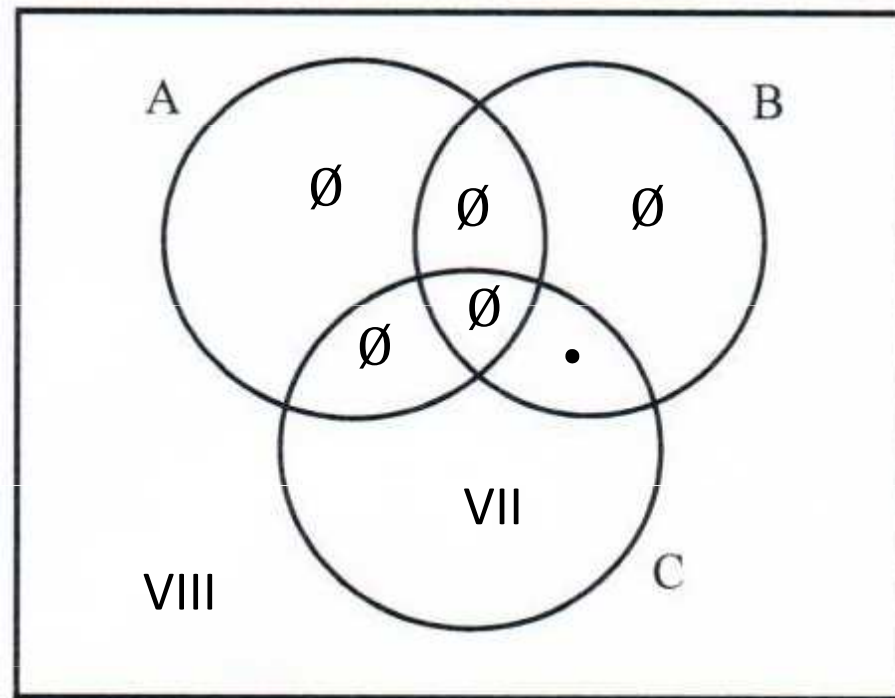
6. $A \cap B \subset B \cap C$ pravdivý

7. $A \subset C$ pravdivý

8. $(A \cup B \cup C)' = A'$ nepravdivý

$$((A \cup B \cup C)' = VIII)$$

$$A' = III \cup VI \cup VII \cup VIII)$$



Příklad 2: Znázorněte následující množiny L , P v diagramu množin A , B , C :

$$L = [(A \cup B) - C] \cap (C \Delta B), \quad P = (B - C) \cap (A \Delta C). \quad (\text{Drábek, text, str. 19, cv. 19, 1.})$$

Dále rozhodněte, jaké podmínky musí splňovat množiny A , B , C , aby platilo:

- a) $L \subset P$
- b) $P \subset L$
- c) $P = L$
- d) $P \neq L$

Řešení:

$$L = [(A \cup B) - C] \cap (C \Delta B),$$

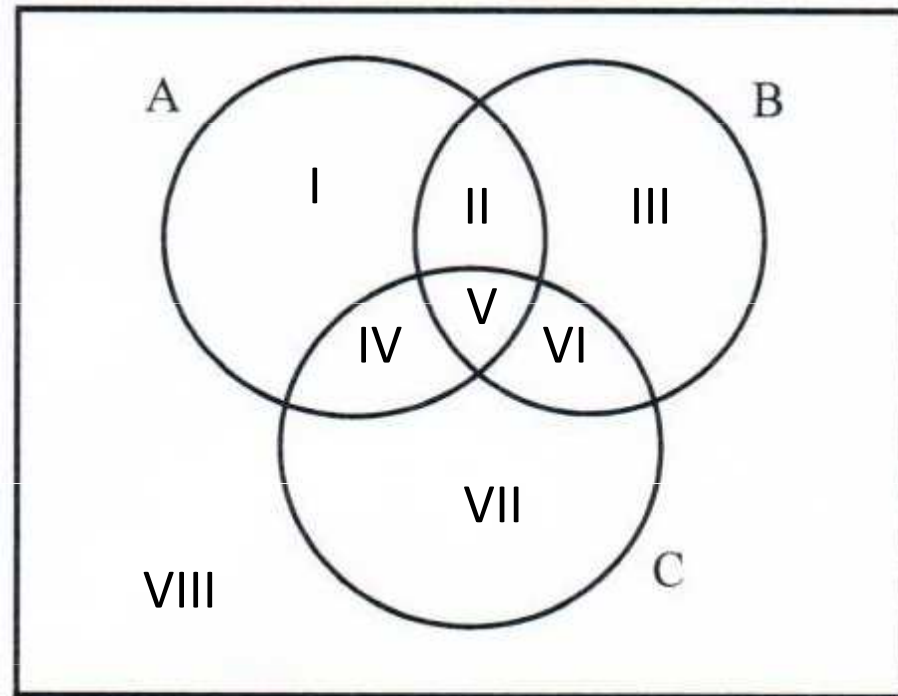
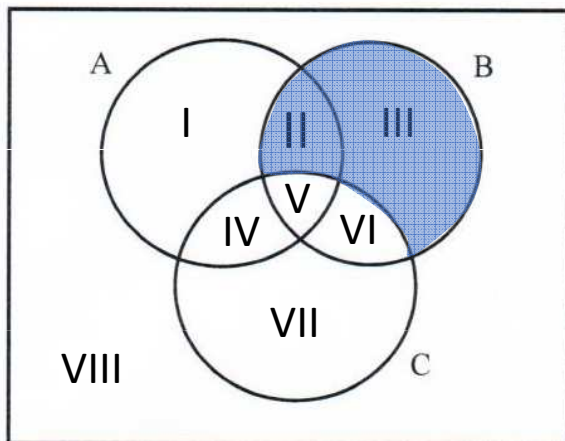
$$A \cup B = I \cup II \cup III \cup IV \cup V \cup VI$$

$$(A \cup B) - C = I \cup II \cup III$$

$$C \Delta B = II \cup III \cup IV \cup VII$$

$$[(A \cup B) - C] \cap (C \Delta B) = II \cup III$$

$$L = II \cup III$$



Řešení:

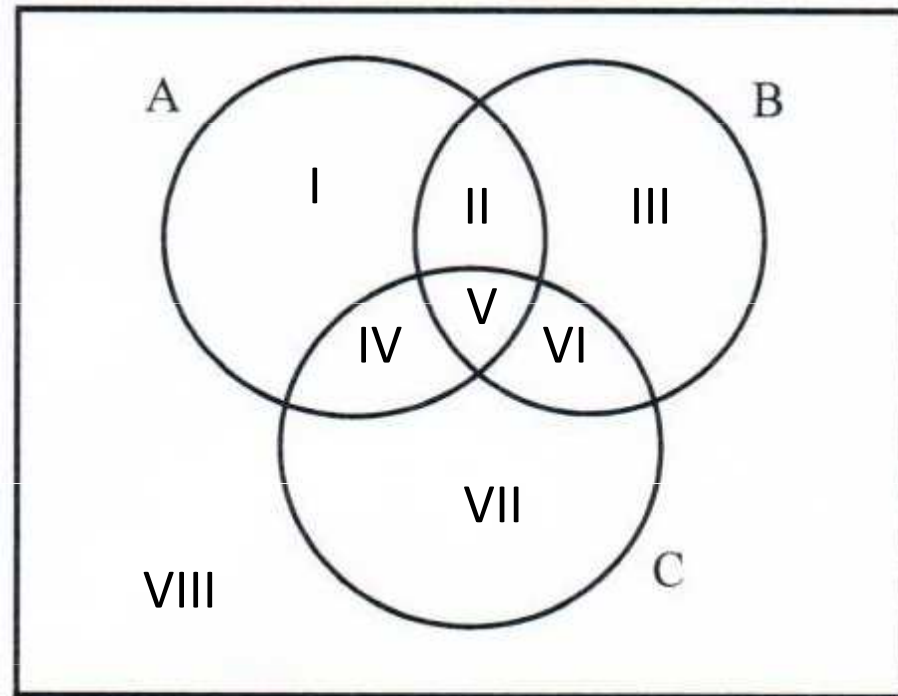
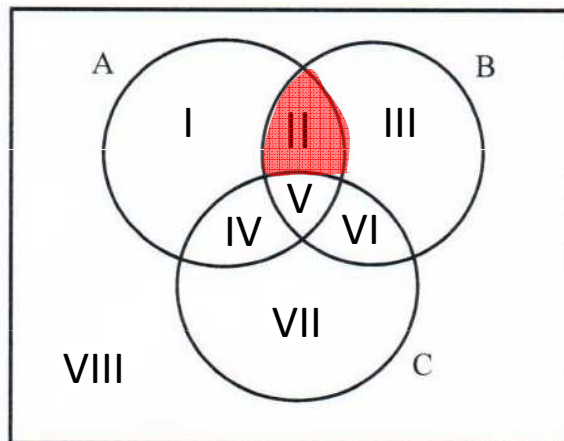
$$P = (B - C) \cap (A \Delta C).$$

$$B - C = \text{II} \cup \text{III}$$

$$A \Delta C = \text{I} \cup \text{II} \cup \text{VI} \cup \text{VII}$$

$$(B - C) \cap (A \Delta C) = \text{II}$$

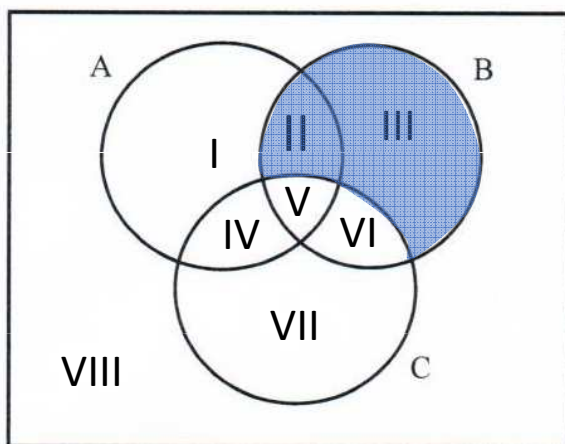
$$P = \text{II}$$



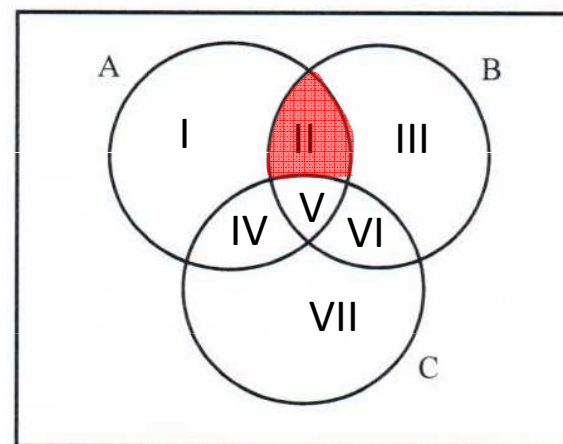
$$L = [(A \cup B) - C] \cap (C \Delta B), P = (B - C) \cap (A \Delta C).$$

- | | | |
|------------------|----------------------|--------------------------|
| a) $L \subset P$ | $III = \emptyset$ | $II \cup III \subset II$ |
| b) $P \subset L$ | platí vždy | $II \subset II \cup III$ |
| c) $P = L$ | $III = \emptyset$ | $II = II \cup III$ |
| d) $P \neq L$ | $III \neq \emptyset$ | |

L



P



Příklad 3:

Na výletě bylo 32 žáků. U stánku s občerstvením si jich 16 koupilo limonádu a 23 oplatky. Čtyři žáci si nekoupili ani limonádu ani oplatky. Kolik žáků si koupilo oplatky i limonádu? Kolik žáků si koupilo oplatky, ale nekoupili si limonádu?

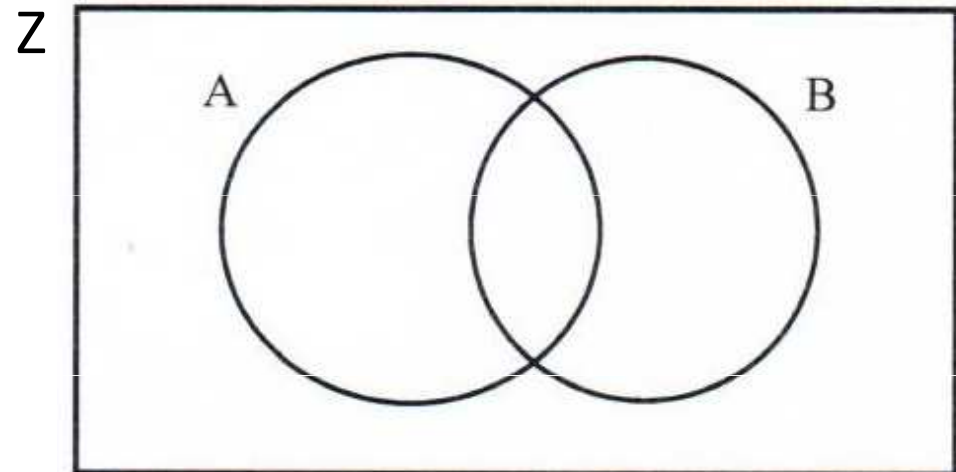
Řešení:

Označme:

A – množina žáků, kteří si koupili limonádu

B – množina žáků, kteří si koupili oplatky

Z – množina všech žáků třídy (základní množina)



Na výletě bylo 32 žáků. U stánku s občerstvením si jich 16 koupilo limonádu a 23 oplatky. Čtyři žáci si nekoupili ani limonádu ani oplatky. Kolik žáků si koupilo oplatky i limonádu? Kolik žáků si koupilo oplatky, ale nekoupili si limonádu?

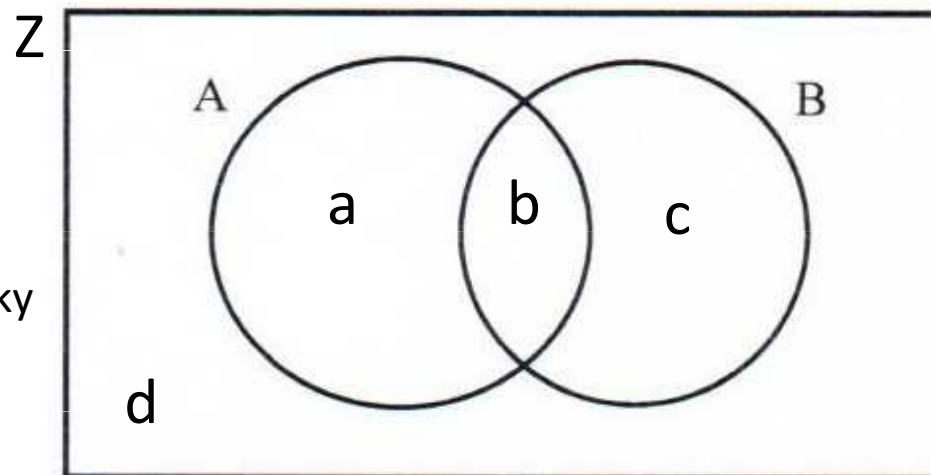
Označme:

a – počet žáků, kteří si koupili **pouze** limonádu

b – počet žáků, kteří si koupili limonádu i oplatky

c – počet žáků, kteří si koupili **pouze** oplatky

d – počet žáků, kteří si nekoupili limonádu ani oplatky



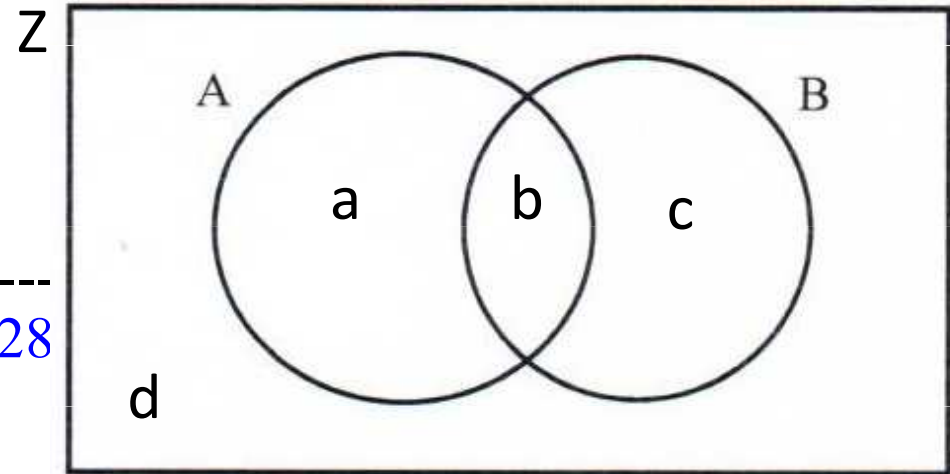
Na výletě bylo 32 žáků. U stánku s občerstvením si jich 16 koupilo limonádu a 23 oplatky. Čtyři žáci si nekoupili ani limonádu ani oplatky. Kolik žáků si koupilo oplatky i limonádu? Kolik žáků si koupilo oplatky, ale nekoupili si limonádu?

Co víme ze zadání:

1. $a + b + c + d = 32$
2. $a + b = 16$
3. $b + c = 23$
4. $d = 4$

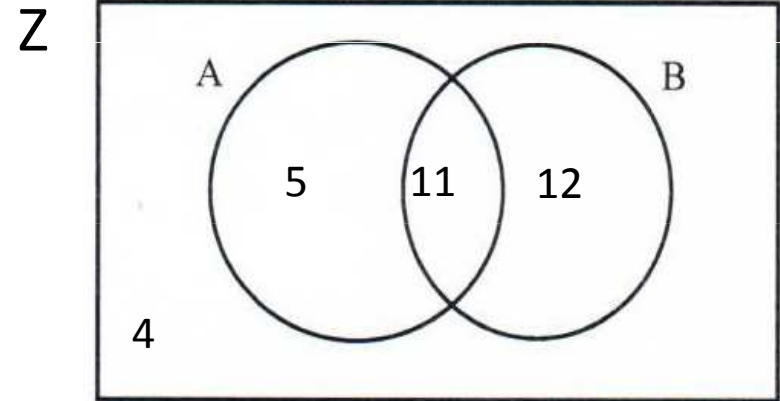
$$a + b + c + 4 = 32 \implies a + b + c = 28$$
$$a + b = 16$$
$$b + c = 23$$

$$16 + c = 28 \implies \underline{c = 12}$$
$$b + 12 = 23 \implies \underline{b = 11}$$
$$a + 11 = 16 \implies \underline{a = 5}$$



Na výletě bylo 32 žáků. U stánku s občerstvením si jich 16 koupilo limonádu a 23 oplatky. Čtyři žáci si nekoupili ani limonádu ani oplatky. Kolik žáků si koupilo oplatky i limonádu? Kolik žáků si koupilo oplatky, ale nekoupili si limonádu?

5 žáků si koupilo **pouze** limonádu,
11 žáků si koupilo obojí,
12 žáků si koupilo **pouze** oplatky,
4 žáci si nekoupili nic,
16 žáků ($a + b$) si koupilo limonádu,
23 žáků ($b + c$) si koupilo oplatky,
16 žáků ($c + d$) si nekoupilo limonádu,
9 žáků ($a + d$) si nekoupilo oplatky,



Příklad 4:

Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

Řešení:

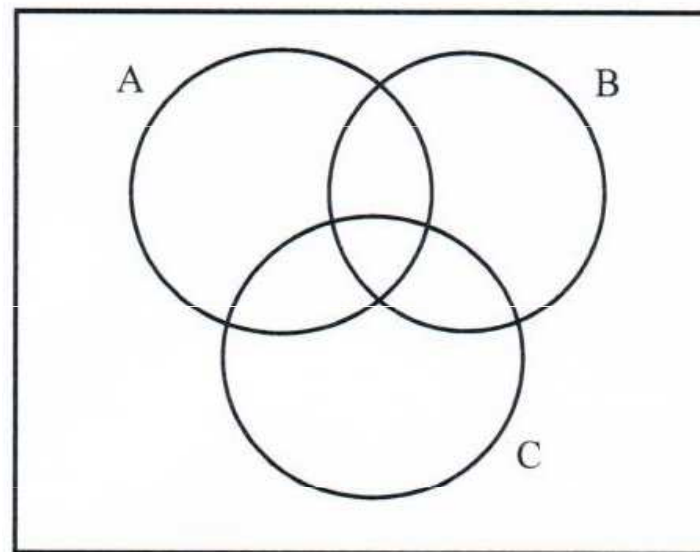
Označme:

A – množina žáků, kteří navštívili Rakousko

B – množina žáků, kteří navštívili Itálii

C – množina žáků, kteří navštívili Německo

Z – množina všech žáků třídy (základní množina)



Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

Označme:

a – počet žáků, kteří navštívili **jen** Rakousko

b – počet žáků, kteří navštívili Rakousko a Itálii, ale nenavštívili Německo

c – počet žáků, kteří navštívili **jen** Itálii

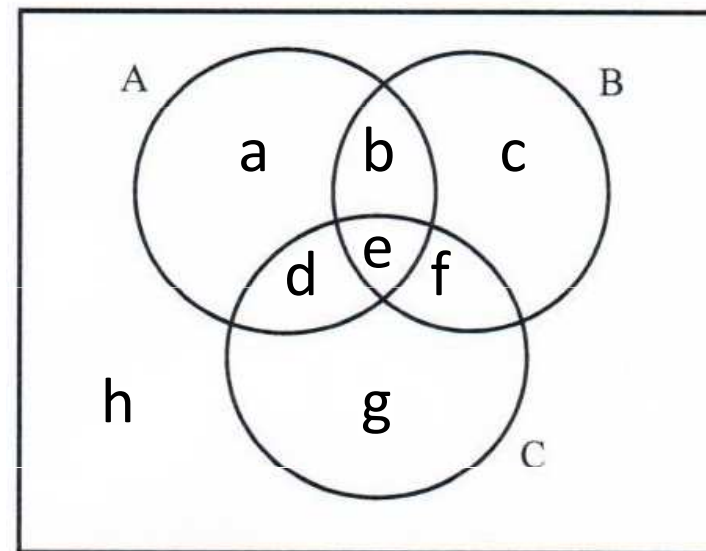
d – počet žáků, kteří navštívili Rakousko a Německo, ale nenavštívili Itálii

e - počet žáků, kteří navštívili všechny tři země

f - počet žáků, kteří navštívili Itálii a Německo, ale nenavštívili Rakousko

g - počet žáků, kteří navštívili **jen** Německo

h - počet žáků, kteří nenavštívili žádnou ze tří zemí



Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

Co víme ze zadání:

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 35$$

$$d + e + f + g = 7$$

$$b + c + e + f = 7$$

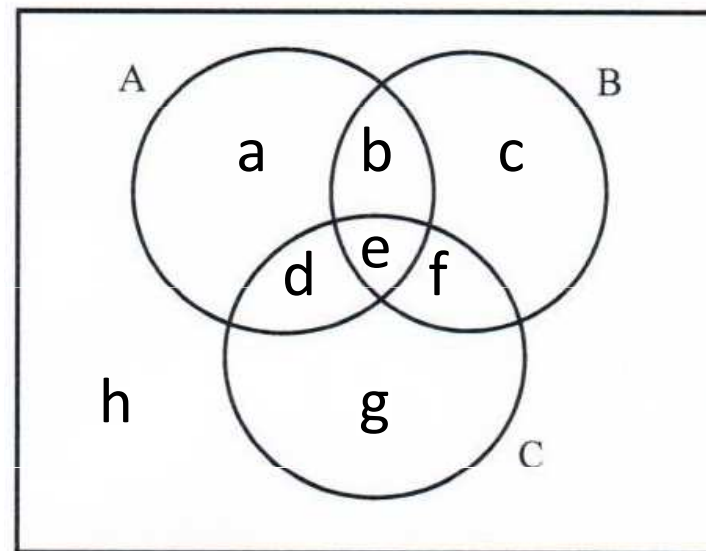
$$a + b + d + e = 5$$

$$b + e = 2$$

$$d + e = 1$$

$$\underline{e = 1}$$

$$\underline{h = 21}$$



Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

$$a + b + c + d + 1 + f + g + 21 = 35 \Rightarrow a + b + c + d + f + g = 13$$

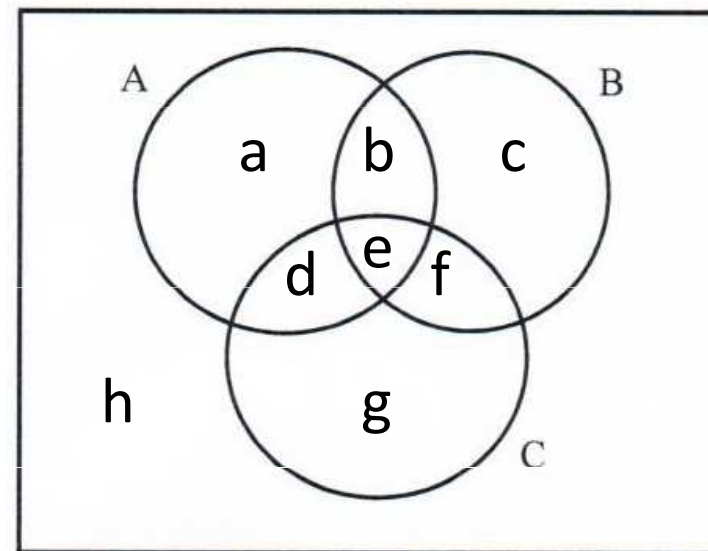
$$d + 1 + f + g = 7 \Rightarrow d + f + g = 6$$

$$b + c + 1 + f = 7 \Rightarrow b + c + f = 6$$

$$a + b + d + 1 = 5 \Rightarrow a + b + d = 4$$

$$b + 1 = 2 \Rightarrow \underline{b = 1}$$

$$d + 1 = 1 \Rightarrow \underline{d = 0}$$



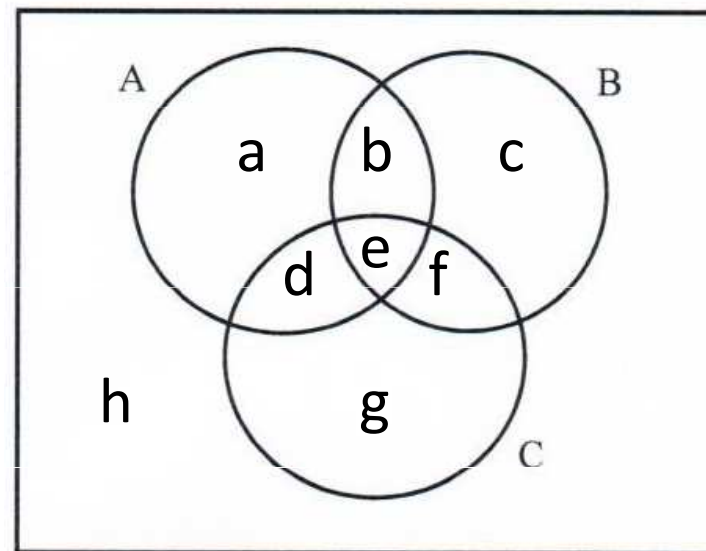
Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

$$a + 1 + c + 0 + f + g = 13 \quad \Rightarrow \quad a + c + f + g = 12$$

$$0 + f + g = 6 \quad \Rightarrow \quad f + g = 6$$

$$1 + c + f = 6 \quad \Rightarrow \quad c + f = 5$$

$$a + 1 + 0 = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 3}$$



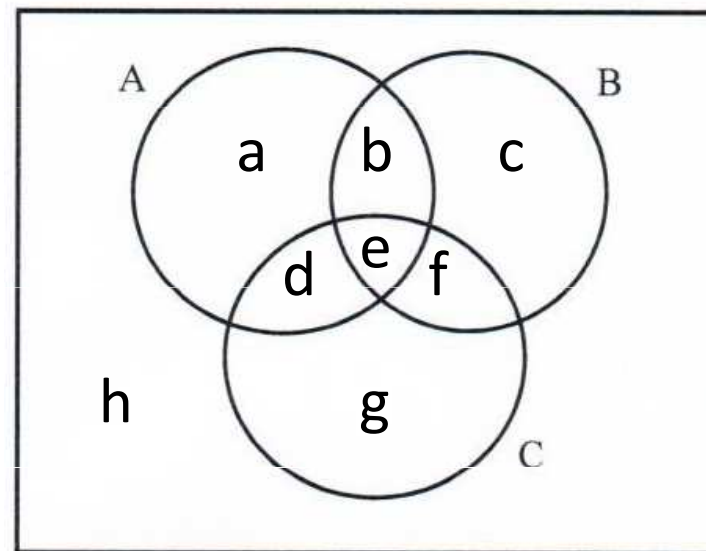
Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

$$3 + c + f + g = 12 \Rightarrow c + f + g = 9$$

$$5 + g = 9 \Rightarrow \underline{g = 4}$$

$$f + 4 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{f = 2}}$$

$$c + 2 + 4 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{c = 3}}$$



Ze 35 žáků třídy jich bylo o prázdninách 7 v Německu a stejně tolik v Itálii. Rakousko navštívilo 5 žáků. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Všechny tyto tři země navštívil 1 žák. V Itálii i v Rakousku byli 2 žáci, v Rakousku a Německu byl 1 žák. Kolik žáků navštívilo Německo nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Rakousko nebo Itálii? Kolik žáků navštívilo Německo nebo Rakousko?

Německo nebo Itálii navštívilo $b + c + d + e + f + g$, tedy 11 žáků.

Rakousko nebo Itálii navštívilo $a + b + c + d + e + f$, tedy 10 žáků.

Německo nebo Rakousko navštívilo $a + b + d + e + f + g$,
tedy 11 žáků.

