

Kartézský součin množin, binární relace z množiny do množiny

Kartézským součinem dvou množin A, B rozumíme množinu $A \times B = \{[x,y]; x \in A \wedge y \in B\}$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic $[x,y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$.

Znázornění kartézského součinu $A \times B$ se provede tzv. **kartézským grafem** – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku x (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny A , z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku y (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny B , z níž vybíráme druhé složky dvojic. Uspořádanou dvojici $[x,y] \in A \times B$ znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body x, y a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.

Binární relací R v neprázdné množině M rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times M$.

Znázornění binárních relací se provede:

- **Kartézským grafem** relace R – analogicky jako u kartézského součinu výše.
- **Uzlovým grafem** relace R v množině M - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny M . Uspořádanou dvojici $[x,y] \in R$ znázorníme pomocí šipky (tzv. orientované hrany), která vychází z uzlu x a směřuje do uzlu y . V případě, že $x = y$, nazýváme šipku smyčkou. Pokud jsou v relaci R dvojice $[x,y]$ a $[y,x]$, znázorníme je “dvojšipkou” (tzv. neorientovanou hranou).

↑ Opakování z minulého semestru ↑

↓ Nová látka ↓

Definice 1: **Binární relací R** z množiny M do množiny N rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times N$.

Příklad 1. Jsou dány množiny $M = \{x, y, z\}$, $N = \{a, b\}$.

- Kartézský součin množin M, N : $M \times N = \{[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]\}$
- Binární relace R z množiny M do množiny N je libovolná podmnožina množiny $M \times N$, tedy např.:

$$R_1 = \{[x,a]\},$$

$$R_2 = \{[x,a], [y,a], [y,b]\},$$

$$R_3 = \{[z,a], [y,a], [z,b], [x,b]\},$$

$$R_4 = \{[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]\} = M \times N \text{ (tj. úplná relace z } M \text{ do } N)$$

$$R_5 = \emptyset \text{ (tj. nulová relace z } M \text{ do } N)$$

Znázornění binární relace R z množiny M do množiny N se provede:

- **Kartézským grafem** – analogicky jako u kartézského součinu množin výše.
- **Uzlovým grafem** – vysvětleno níže na Příkladu 2.

Příklad 2. Jsou dány množiny $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{a, b, c, d\}$ a relace $R = \{[2,a], [3,a], [4,b], [5,d]\}$ z množiny M do množiny N . Sestrojte kartézský a uzlový graf relace R .

Definice 2: Necht' R je relace z množiny A do množiny B a necht' S je relace z množiny B do množiny C . Pak relace daná vztahem

$$\mathbf{R} \circ \mathbf{S} = \{[x,y] \in A \times C; \text{ existuje } b \in B \text{ tak, že } [x,b] \in \mathbf{R} \wedge [b,y] \in \mathbf{S}\}$$

se nazývá **složená relace** $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ z relací \mathbf{R} a \mathbf{S} .

Poznámka. Relaci $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ čteme: „ \mathbf{S} po \mathbf{R} “.

Příklad 3. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{k, l, m, n\}$. Dále je dána relace $\mathbf{R} = \{[a,x], [c,y], [c,z]\}$ z množiny A do množiny B a relace $\mathbf{S} = \{[x,k], [x,l], [x,m], [x,n], [y,k], [y,n]\}$ z množiny B do množiny C . Určete relaci $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$.

Definice 3: Necht' \mathbf{R} je relace z množiny A do množiny B . Relace \mathbf{R}^{-1} z množiny B do množiny A daná vztahem

$$\mathbf{R}^{-1} = \{[y,x] \in B \times A; [x,y] \in \mathbf{R}\}$$

se nazývá **relace inverzní** k relaci \mathbf{R} .

Poznámka. Vzhledem k *Definici 3* platí:

- $\mathbf{R} \subset A \times B$
- $\mathbf{R}^{-1} \subset B \times A$.

Příklad 4. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$ a relace $\mathbf{R} = \{[a,x], [a,y], [b,z], [c,y], [d,x]\}$ z množiny A do množiny B . Určete relaci \mathbf{R}^{-1} (tj. relaci inverzní k relaci \mathbf{R}).

Poznámka. Pro libovolnou relaci \mathbf{R} z množiny A do množiny B platí: $(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$.

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

Definice 4: Necht' \mathbf{R} je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a,b] \in \mathbf{R}$. Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B** . Značíme $R: A \rightarrow B$.

Definice 5: Necht' \mathbf{R} je zobrazení z množiny A do množiny B .

- Jestliže $[a,b] \in \mathbf{R}$, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení \mathbf{R} ; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení \mathbf{R} .
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A; \text{ existuje } b \in B \text{ takové, že } [a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení \mathbf{R} . Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B; \text{ existuje } a \in A \text{ takové, že } [a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení \mathbf{R} . $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Příklad 5. Jsou dány množiny $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B , případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) $\mathbf{R}_1 = \{[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]\}$,

- b) $R_2 = \{[x,a], [z,b]\}$,
 c) $R_3 = \{[x,a], [y,a], [z,a]\}$.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je-li $O_1(R) = A \wedge O_2(R) \subset B \wedge O_2(R) \neq B$, nazývá se **R zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je-li $O_1(R) \subset A \wedge O_1(R) \neq A \wedge O_2(R) = B$, nazývá se **R zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je-li $O_1(R) = A \wedge O_2(R) = B$, nazývá se **R zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je-li $O_1(R) \subset A \wedge O_1(R) \neq A \wedge O_2(R) \subset B \wedge O_2(R) \neq B$, nazývá se **R zobrazení z množiny A do množiny B**.

Příklad 6. Jsou dány množiny $A = \{x, y, a, c\}$, $B = \{c, x, b, z\}$.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná?

1) $R = \{[x,z], [c,c], [y,c]\}$.

2) $S = \{[x,z], [y,z], [a,z], [c,x]\}$.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

- 1) jedno zobrazení R_1 typu z množiny A do množiny B,
- 2) jedno zobrazení R_2 množiny A do množiny B,
- 3) jedno zobrazení množiny A na množinu B,
- 4) jedno zobrazení z množiny A na množinu B.

Definice 5: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace R^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A.

Důsledek: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B je **prosté** právě tehdy, když

a) ke každému $y \in B$ existuje nejvýše jedno $x \in A$ takové, že $[x,y] \in R$,

b) ke každým dvěma různým vzorům $x_1, x_2 \in A$ přiřadíme dva různé obrazy $y_1, y_2 \in B$ v zobrazení **R**.

Hovoříme pak o:

- Prostém zobrazení množiny A do množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A na množinu B,
- Prostém zobrazení množiny A na množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A do množiny B.

Definice 6: Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Příklad 7. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) $R_1 = \{[1,a], [2,c], [3,d]\}$,

b) $R_2 = \{[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]\}$,

c) $R_3 = \{[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]\}$.

Definice 7: **Permutací** konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).

Příklad 8. Zapište všechny permutace tříprvkové množiny $A = \{x, y, z\}$.

Definice 8: Necht' \mathbf{R} je zobrazení z množiny M do množiny N a \mathbf{S} je zobrazení z množiny N do množiny K . Pak relace $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ je zobrazení a nazývá se **složené zobrazení** ze zobrazení \mathbf{R} a \mathbf{S} .

Příklad 9. Složte permutace $\mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_3 \circ \mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4 \circ \mathbf{P}_6$ z *Příkladu 8*.

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

Definice 9: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B . Zapisujeme $A \sim B$.

Příklad 10. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{x, y\}$. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace \sim dvou množin definovaná v libovolném systému množin \mathcal{M} má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace \sim je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin \mathcal{M} vytváří rozklad systému \mathcal{M} na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 11. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{x, y\}$, $D = \{\circ, \circ, \circ, \circ\}$, $E = \{\Delta, \Delta, \Delta\}$, $F = \{*, *\}$, $G = \{\square\}$, $H = \{\odot, \odot, \odot, \odot\}$. Rozhodněte, které množiny ze systému \mathcal{M} jsou ekvivalentní.

Definice 10: Řekneme, že množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A .

Definice 11: Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B , která je ekvivalentní s množinou B .

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když $M \subset N \wedge M \neq N$.

