

IMAk02 Základy algebry – Úlohy k procvičení - řešení

1. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda následující binární relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení. Pokud ano, určete přesně typ zobrazení:

a) $R_1 = \{[b, 1], [c, 2], [d, 3]\}$,

je zobrazení z množiny A do množiny B (není zobrazením ani celé množiny A ani na celou množinu B) a je prosté.

b) $R_2 = \{[a, 1], [b, 2], [a, 3]\}$,

není zobrazení z množiny A do množiny B .

c) $R_3 = \{[a, 1], [b, 3], [c, 2], [d, 4]\}$,

je vzájemně jednoznačné zobrazení množin A, B .

d) $R_4 = \{[a, 1], [b, 1], [c, 1], [d, 1]\}$,

je zobrazení celé množiny A do množiny B , není prosté.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících množin je ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel N . Které z uvedených množin jsou nekonečné?

$$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}, B = \{7, 6, 4, a, x\}, D = \{x \in N : x = 5^n \wedge n \in N\}.$$

S množinou N jsou ekvivalentní množiny A a D . Vzájemně jednoznačné zobrazení množin N a A je např. $\{[0, 1], [1, \frac{1}{2}], [2, \frac{1}{4}], [3, \frac{1}{8}], \dots\}$, obecně $\{[x, y] \in Q^2 : x \in N \wedge y = 2^{-x}\}$.

Vzájemně jednoznačné zobrazení množin N a D je např. $\{[0, 5^0], [1, 5^1], [2, 5^2], [3, 5^3], \dots\}$, obecně $\{[x, y] \in N^2 : x \in N \wedge y = 5^x\}$. Protože N je nekonečná množina, jsou nekonečné i množiny A, D . Množina B je konečná, neboť ani jedna její vlastní podmnožina není s množinou B ekvivalentní.

3. Zjistěte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR mají operace $*$, \circ , Δ definované v množině $M = \{a, b, c\}$:

*	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	b

\circ	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

Δ	a	b	c
a	c		a
b		c	b
c	a	b	c

Dále určete neutrální a agresivní prvky, pokud existují. Stanovte přesně typ každé algebraické struktury, kterou množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

Operace $*$: ND, K, \neg A, EN, EI, \neg ZR. Neutrální prvek je b , agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$. $(M, *)$ je komutativní grupoid s neutrálním prvkem, který není pologrupa.

Operace \circ : ND, K, A, \neg EN, \neg EI, \neg ZR. Neutrální prvek neexistuje, agresivní prvek je c . Inverzní prvky neexistují. (M, \circ) je komutativní pologrupa, která není grupa.

Operace Δ : \neg ND, \neg K, \neg A, EN, EI, \neg ZR. Neutrální prvek je c , agresivní prvek neexistuje. Inverzní prvky jsou $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$. (M, Δ) je algebraická struktura s jednou operací, která není grupoid.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR mají následující operace (\mathbf{C} je množina všech celých čísel):

a) $\circ = \{[x, y, z] \in \mathbf{N}^3 : z = x + 2y\}$ neboli $x \circ y = x + 2y$.

ND, \neg K, \neg A, \neg EN, \neg EI, \neg ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

b) $* = \{[x, y, z] \in \mathbf{C}^3 : z = x + y + I\}$ neboli $x * y = x + y + I$.

ND, K, A, EN, EI, ZR. Dokáže se rozepsáním z definice operace.

5. Určete přesně typ algebraických struktur s jednou operací (\mathbf{Q} je množina všech racionálních čísel, \mathbf{Q}_0^+ je množina všech nezáporných racionálních čísel):

$(\mathbf{N}, +)$, (\mathbf{N}, \cdot) , $(\mathbf{N}, -)$, $(\mathbf{Q}_0^+, +)$, (\mathbf{Q}_0^+, \cdot) , $(\mathbf{Q} - \{0\}, +)$, $(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot)$.

$(\mathbf{N}, +)$ komutativní pologrupa, která není grupou (nemá neutrální prvek)

(\mathbf{N}, \cdot) komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathbf{N}, -)$ není ani grupoid

$(\mathbf{Q}_0^+, +)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

(\mathbf{Q}_0^+, \cdot) komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathbf{Q} - \{0\}, +)$ není ani grupoid (např. $-2 + 2 = 0$, $0 \notin \mathbf{Q} - \{0\}$)

$(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot)$ komutativní grupa

6. Určete přesně typ algebraických struktur se dvěma operacemi:

$(\mathbf{N}, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q}_0^+, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q} - \{0\}, +, \cdot)$.

$(\mathbf{N}, +, \cdot)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem

$(\mathbf{Q}_0^+, +, \cdot)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem

$(\mathbf{Q} - \{0\}, +, \cdot)$ není ani polookruh

7. Je dána množina $M = \{a, b, \}$. Určete přesně typ algebraických struktur

$(\mathcal{P}(M), \cup)$, $(\mathcal{P}(M), \cap)$, $(\mathcal{P}(M), -)$, $(\mathcal{P}(M), \Delta)$, $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$, $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$,

kde $\mathcal{P}(M)$ je potenční system množiny M . Platí uvedené závěry i pro všechny množiny M , které mají nejméně dva prvky?

$(\mathcal{P}(M), \cup)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathcal{P}(M), \cap)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem, která není grupou

$(\mathcal{P}(M), -)$ nekomutativní grupoid, který není pologrupa (ND, \neg K, \neg A, \neg EN, \neg EI, \neg ZR)

$(\mathcal{P}(M), \Delta)$ komutativní grupa (ND, K, A, EN, EI, ZR); $e = \emptyset$, $\bar{A} = A$, $A \Delta X = B \Rightarrow X = A \Delta B$.

$(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

$(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ komutativní polookruh s jednotkovým prvkem, který není okruhem

Uvedené závěry platí pro všechny množiny, které mají nejméně dva prvky.