MUNI
PED

Aritmetika 2 – jaro 2022

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Organizace semestru

- Paralelně s IMAk04 běží volitelný předmět IMAk14 Matematika 4, v němž budeme dále procvičovat látku probíranou v předmětu IMAk04 Aritmetika 2

- Ke studiu můžete využít tuto prezentaci i stručný výtah; rovněž jsou k dispozici namluvené prezentace z minulých let (distanční výuka)

- Na konci semestru zápočtová písemná práce (ukázku najdete během semestru ve Studijních materiálech předmětu IMAk04 v ISu).

Relace dělitelnosti

- Definice 1:

Říkáme, že celé číslo ***b* dělí** celé číslo ***a*** (nebo ***b* je dělitelem *a*** nebo ***a* je dělitelné *b*** nebo ***a* je násobkem *b***), právě když existuje celé číslo *x*, pro které platí $a = b \cdot x$.

Symbolicky: $b|a \iff (\exists x \in \boldsymbol{Z})(a = b \cdot x)$

MUNI PED

Relace dělitelnosti

- Jestliže k celým číslům *a, b* neexistuje takové celé číslo *x, že* $a = b \cdot x$, říkáme, že ***b* nedělí *a***, značíme $b \nmid a$.

- Platí-li, že $a = b \cdot x$, pak čísla *b, x* jsou dělitelé čísla *a* a nazývají se **sdružení dělitelé čísla *a***.

- Dělitelé čísla *a* patřící do množiny přirozených čísel se nazývají **přirození dělitelé čísla *a***.

MUNI PED

Relace dělitelnosti

- Každé celé číslo $A \neq 0; 1; -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla $1; A; -1; -A$. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla A**. Ostatní dělitele (pokud existují) nazýváme nesamozřejmými děliteli čísla A.

- Čísla 1 a -1 mají právě dva celočíselné dělitele, a to 1 a -1.

- Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.

Relace dělitelnosti

Příklad 1

Rozeberme si dělitele čísla 10

- Celočíselných dělitelů čísla 10 je osm, jsou to čísla

  $1; 2; 5; 10; -1; -2; -5; -10.$

- Dvojice sdružených dělitelů čísla 10 jsou:

  $1; 10 \quad 2; 5 \quad -1; -10 \quad -2; -5$

- Samozřejmí dělitelé čísla 10 jsou čísla

  $1; 10; -1; -10$

- Přirození dělitelé čísla 10 jsou čísla

  $1; 2; 5; 10$

Relace dělitelnosti

– Věta 1:

Pro libovolná celá čísla a, b, c platí:

- jestliže $b|a$ a zároveň $b|c$, pak také $b|(a+c)$ a $b|(a-c)$
  symbolicky $(b|a \ \wedge \ b|c) \Longrightarrow (b|(a+c) \wedge \ b|(a-c))$
- jestliže $b|a$, pak také $(-b)|a$, symbolicky $b|a \ \Longrightarrow (-b)|a$
- jestliže $b|a$, pak také $b|(-a)$, symbolicky $b|a \ \Longrightarrow b|(-a)$

MUNI PED

Důkaz věty 1:

- Předpokládejme, že pro libovolná celá čísla a, b, c platí $b|a$ a $b|c$. Podle definice 1 to znamená, že existují celá čísla x_1, x_2 taková, že $a = b \cdot x_1,\ \ c = b \cdot x_2$. Po úpravě dostáváme
$$a + c = b \cdot (x_1 + x_2)$$
$$a - c = b \cdot (x_1 - x_2)$$
Protože součet a rozdíl celých čísel x_1, x_2 je zase celé číslo, platí
$$b|(a + c), \qquad b|(a - c)$$
- Plyne z možnosti zapsat $-b = (-1) \cdot b$.
- Plyne z možnosti zapsat $-a = (-1) \cdot a$.

MUNI PED

Relace dělitelnosti

Definice 2

Celé číslo dělitelné dvěma se nazývá **sudé číslo**.

Celé číslo, které není dělitelné dvěma (dává při dělení dvěma zbytek 1), se nazývá **liché číslo**.

MUNI PED

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 2

Dokažte, že

a) součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je liché číslo;

b) součet libovolných dvou lichých čísel je sudé číslo;

c) součin libovolného sudého čísla s libovolným lichým číslem je sudé číslo.

d) součin libovolného lichého čísla s libovolným lichým číslem je liché číslo

Příklad 3

Určete vlastnosti relace „dělitelnost celých čísel“ a tvrzení zdůvodněte.

Příklad 4

Jsou dána čísla *a, b*, pro která platí, že *a* je dělitelné osmi a *b* je dělitelné šesti. Dokažte, že jejich součin je dělitelný číslem 24.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 5

Dokažte, že

a) součet tří po sobě jdoucích celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti;

b) součet každých tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (počínaje 2^1) je dělitelný 7;

c) druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8.

Znaky dělitelnost

- Uvedeme zde věty, na základě nichž rozhodujeme o dělitelnosti čísla jiným číslem, aniž bychom dělení provedli.

- Pro zjednodušení zápisu ve všech větách uvažujme přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě. Na základě předchozí prezentace lze věty o dělitelnosti rozšířit i na celá čísla.

MUNI PED

- Přirozené číslo *a* je dělitelné **dvěma (pěti, deseti)** právě tehdy, když je dvěma (pěti, deseti) dělitelné číslo zapsané jeho cifrou nultého řádu.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **čtyřmi** právě tehdy, když je čtyřmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **osmi** právě tehdy, když je osmi dělitelné číslo zapsané jeho posledním trojčíslím.
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **třemi (devíti)** právě tehdy, když je třemi (devíti) dělitelný jeho ciferný součet (tj. součet všech čísel zapsaných jednotlivými ciframi v zápisu čísla *a*).
- Přirozené číslo *a* je dělitelné **jedenácti** právě tehdy, když je jedenácti dělitelný součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla *a*.

Znaky dělitelnosti

– Všechny znaky dělitelnosti ze 3. slidu plynou z obecnějších vět:

- Dělíme-li přirozené číslo *a* **dvěma (pěti, deseti)**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme dvěma (pěti, deseti) číslo zapsané cifrou nultého řádu v zápisu čísla *a*.
- Dělíme-li přirozené číslo *a* **čtyřmi**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme čtyřmi číslo zapsané jeho posledním dvojčíslím (u jednociferných čísel doplníme před cifru nulu).
- Dělíme-li přirozené číslo *a* **osmi**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme osmi číslo zapsané jeho posledním trojčíslím (u méně než trojciferných čísel doplníme před cifry nuly).
- Dělíme-li přirozené číslo *a* **třemi (devíti)**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme třemi (devíti) jeho ciferný součet.
- Dělíme-li přirozené číslo *a* **jedenácti**, dostaneme stejný zbytek, jako když dělíme jedenácti součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi sudého řádu zmenšený o součet čísel zapsaných jednotlivými ciframi lichého řádu v zápisu čísla *a*.

Příklady

Příklad 1

Rozhodněte, zda je číslo 4 356 dělitelné čísly 2; 3; 4; 5; 8; 9 a 11. Pokud není některým z čísel dělitelné, určete zbytek po dělení.

Příklad 2

V číslech 437*; 32* a 4*54 nahraďte symbol * takovou cifrou, aby vzniklé číslo bylo dělitelné

a) čtyřmi;

b) osmi;

c) devíti;

d) jedenácti.

Uveďte vždy všechna řešení.

Příklady

Příklad 3

O pěticiferném čísle 448** víme, že je dělitelné čísly 3 a 25. Doplňte cifry na místa hvězdiček. Najděte všechny možnosti.

Příklad 4

Z čísla 74 851 562 vyškrtněte čtyři cifry tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné pěti a třemi. Najděte všechny možnosti.

Příklad 5

Doplňte rodné číslo 950324/**** tak, aby bylo platné. Stačí uvést jednu možnost.

Příklad 6

Dokažte s využitím rozvinutého zápisu čísla kritérium dělitelnosti

a) čtyřmi

b) devíti

Prvočísla a čísla složená

– Rozdělíme přirozená čísla na dvě velké podmnožiny a jednu jednoprvkovou:
  – číslo 1 bude patřit do zvláštní podmnožiny
  – prvočísla (čísla, která mají právě dva různé dělitele) tvoří jednu velkou podmnožinu
  – čísla složená (čísla s alespoň třemi různými děliteli) tvoří druhou velkou podmnožinu

  – Podmnožina prvočísel a podmnožina čísel složených mají prázdný průnik
  (tj. číslo je buď prvočíslo, nebo číslo složené).

Definice: prvočíslo, číslo složené

Definice 2.

Přirozené číslo *p*>1 nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva různé přirozené dělitele (tj. čísla 1 a p).

Přirozené číslo *a*>1, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

Příklady

- Číslo 13 je prvočíslo, protože má právě dva přirozené dělitele, čísla 1 a 13. Jsou to samozřejmí dělitelé čísla 13.

- Číslo 12 je složené číslo, protože má více než dva přirozené dělitele: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

- Číslo 1 podle definice není prvočíslo ani číslo složené.

MUNI PED

Věta o existenci prvočíselného dělitele

Věta 2: Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň jednoho prvočíselného dělitele.

Důkaz: Číslo $n > 1$ má alespoň jednoho dělitele, který je větší než 1. Z jeho dělitelů je jeden nejmenší, označme ho p.
Tento nejmenší přirozený dělitel $p > 1$ musí být prvočíslem.
Kdyby totiž p bylo složené číslo, tj. $p = a.b$, kde $1 < a < p$, $1 < b < p$, pak by ze vztahů $a | p$ a $p|n$ plynulo $a| n$, což by znamenalo, že existuje dělitel $a < p$ čísla n, což by bylo v rozporu s naším předpokladem, že p je nejmenší z přirozených dělitelů čísla n. Číslo p je tedy prvočíslo.

Jak rozhodneme, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené?

Máme-li rozhodnout o tom, zda dané číslo *a* > 1 je prvočíslem nebo složeným číslem, můžeme postupovat tak, že zjišťujeme, zda je dané číslo dělitelné prvočísly menšími než toto číslo.

Platí totiž **věta**: *Existuje-li prvočíslo menší než číslo a, které dělí číslo a, pak a je složené číslo.*

Uvedený postup je však značně zdlouhavý. Proto budeme využívat následující věty:

Věta 3. Jestliže přirozené číslo *a* není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným odmocnině z a, pak *a* je prvočíslo.

Důkaz věty 3

Provedeme nepřímý důkaz, tj. přímý důkaz věty obměněné)

Věta obměněná k větě 3: Není-li *a* prvočíslo, pak je dělitelné aspoň jedním prvočíslem *p* menším než odmocnina z *a.*

Tedy předpokládejme, že číslo *a* není prvočíslo, pak podle věty 2. existuje prvočíslo *p*, které je nejmenším dělitelem čísla *a*. Můžeme psát: $a = q \cdot p$ a současně $p < a$; současně platí také: *p je* menší nebo rovno *q .* Je tedy *a* větší nebo rovno p^2 a odtud plyne, že *p* musí být menší nebo rovno odmocnině z *a.*

MUNI PED

Jak zjistit, zda dané číslo je prvočíslo

Příklad: *Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.*

Řešení: Odmocnina ze 173 je menší než 14 (druhá mocnina 14 je 196), proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13.
Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Prvočíselný rozklad

Příklady

Příklad 1

Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou čísla 437, 593, 1007, 2771, 3012 prvočísla, nebo čísla složená.

Příklad 2

Najděte alespoň tři prvočísla větší než 120 a zároveň menší než 150.

Příklad 3

Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

a) 1326

b) 2406

c) 4380

Příklady

Příklad 4

Rozložte na součin prvočinitelů číslo

a) 500

b) 2024

c) 1326

Příklad 5

Najděte alespoň tři přirozená čísla, která jsou dělitelná

a) všemi jednocifernými prvočísly,

b) všemi přirozenými čísly od jedné do deseti.

Určete v obou případech nejmenší přirozené číslo, které podmínkám vyhovuje.

MUNI PED

Největší společný dělitel

Jak už název napovídá, největší společný dělitel dvou přirozených čísel je ten největší ze všech společných dělitelů.
Např. čísla 50 a 60 mají následující společné dělitele: 1, 2, 5, 10
Největší z těchto společných dělitelů je číslo 10. Formálně řečeno:

Definice 3. Společný dělitel přirozených čísel *a, b* je každé přirozené číslo *d*, pro které platí $d \mid a$ a $d \mid b$.

Definice 4. Největší společný dělitel přirozených čísel *a, b* je ten ze společných dělitelů, který je dělitelný všemi společnými děliteli.
Označujeme **D(*a*,*b*).**

Hledání největšího společného dělitele

Největšího společného dělitele dvou přirozených čísel lze najít třemi způsoby:

(a) využitím definice;

(b) pomocí tzv. Eukleidova algoritmu;

(c) pomocí rozkladu na součin prvočinitelů.

Hledání s využitím definice lze použít u malých čísel, u větších je spíše neobratné.

Hledání pomocí rozkladu na prvočísla se učí na ZŠ.

Eukleidův algoritmu nabízí silný nástroj pro hledání největšího společného dělitele.

Příklad

Příklad: *Určete množinu všech společných dělitelů čísel 24 a 30 a největší společný dělitel čísel 24 a 30.*

Řešení: Číslo 24 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Číslo 30 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Množina všech společných dělitelů čísel 24 a 30 je průnik těchto dvou množin, tj. množina {1, 2, 3, 6}

Největší společný dělitel D(24,30) = 6.

Toto číslo je dělitelné všemi menšími společnými děliteli, tj. platí:

$1 \mid 6$, $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$

Věta (Eukleidův algoritmus)

Věta 5. Jestliže přirozené číslo *a* dává při dělení nenulovým přirozeným číslem *b* nenulový zbytek *z*, tzn. $a = b \cdot q + z$ (přičemž $z < b$), pak platí, že **množina všech společných dělitelů čísel *a, b* je množinou všech společných dělitelů čísel *b, z***.
Dále platí: Největší společný dělitel čísel *a, b* je roven největšímu společnému děliteli čísel b, z, tj. $D(a,b) = D(b,z)$.

Tím převádíme úkol určit D(a,b) na určení D(*b,z*). To je výhodné, neboť čísla *b* a z jsou menší než čísla *a, b*. **Důkaz** je uveden v ZEA, s. 189.
Na větě 5. je založen postup výpočtu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel nazývaný ***Eukleidův algoritmus.***

MUNI
PED

Eukleidův algoritmus (řešený příklad)

Příklad: Zjistěte D (268, 80), tj. největšího společného dělitele čísel 268 a 80, pomocí Eukleidova algoritmu.

Řešení:	268 : 80 = 3 neboli	268 = 80 . 3 + 28	(zbytek 28)
D (80, 28):	80 : 28 = 2	80 = 28 . 2 + 24	(zbytek 24)
D (28, 24):	28 : 24 = 1	28 = 24. 1 + 4	(zbytek 4)
D (24, 4):	24 : 4 = 6	24 = 6 . 4	(zbytek 0)

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

MUNI PED

Rozšíření definice (největšího) společného dělitele na tři a více čísel

Definice 3 (společný dělitel dvou čísel) a Definici 4 (největší společný dělitel dvou čísel D (*a*, *b*)) lze rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklad: Hledáme společné dělitele čísel 12, 27 a 36.
Společnými děliteli čísel 12 a 27 jsou čísla 1 a 3; D (12, 27) = 3.
Společnými děliteli čísel 27 a 36 jsou číslo 1, 3 a 9; D (27, 36) = 9.
Společnými děliteli čísel 12 a 36 jsou číslo 1, 2, 3, 4, 6 a 12;
D (12, 36) = 12. Tedy D (12, 27, 36) = 3.

MUNI PED

Čísla soudělná a nesoudělná

Libovolná dvě čísla mají vždy alespoň jednoho společného dělitele. Tím je číslo 1. Pokud jiného společného dělitele nemají, nazývají se **nesoudělná**; v opačném případě se nazývají **soudělná**.

Formálně:

Definice 5. Přirozená čísla *a, b* se nazývají **nesoudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel roven 1.

Stručně píšeme: $D(a,b) = 1$

Definice 6. Přirozená čísla *a, b* se nazývají **soudělná**, právě když je jejich největší společný dělitel větší než 1. Stručně: $D(a,b) > 1$.

MUNI PED

Příklady: čísla soudělná a nesoudělná

Podobně jako Definice 3 a 4 lze Definice 5 a 6 rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklady:

Čísla 4, 7, 6, 9 jsou nesoudělná, protože D(4,7,6,9) = 1

Čísla 8, 12, 32 jsou soudělná, protože D(8, 12, 32) = 4

Příklady

Příklad 1

Určete všechny přirozené společné dělitele čísel:

a) 60, 36

b) 48, 72, 0

c) 24, -132, 54

Příklad 2

K číslu $a = 51$ najděte číslo b tak, aby $D(a,b) = 17$.

Příklad 3

Najděte dvě přirozená čísla, jejichž součet je 432 a největší společný dělitel je 36.

Příklady

Příklad 4

Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 24. Jedno z nich je dvojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?

Příklad 5

Určete pomocí rozkladu na prvočinitele i pomocí Eukleidova algoritmu:

a) D(455, 273)

b) D(360, 504)

c) D(90, 108, 84)

d) D(568, 426, 355)

Nejmenší společný násobek

Podobně jako u největšího společného dělitele, i zde je pojem intuitivní. Ze všech společných násobků dvou čísel (kterých je ovšem nekonečně mnoho) vybíráme právě ten nejmenší.

Např. čísla 15 a 6 mají následující násobky:

15 -> 15; **30**; 45; **60**; 75; **90**; 105; 120; 135; 150; 165; 180 …

6 -> 6; 12; 18; 24; **30**; 36; 42; 48; 54; **60**; 66; 72; 78; 84; **90**; 96 …

Nejmenší společný násobek čísel 6 a 15 je číslo 30. Dalšími společnými násobky jsou čísla 60, 90, 120, 150 … Je vidět, že nejmenší společný násobek dělí všechny společné násobky daných dvou čísel.

Definice n(a,b)

Definice 7:

Společný násobek přirozených čísel *a, b* je každé přirozené číslo *m*, které je dělitelné oběma čísly *a, b*, tedy *a*|*m* a *b*|*m.*

Definice 8:

Nejmenší společný násobek přirozených čísel *a, b* je ten ze společných násobků, který je dělitelem všech společných násobků čísel *a, b*. Označujeme **n(*a,b*)**

Nejmenší společný násobek

Hledání n(*a*,*b*)

Příklad

Příklady

Příklad 1

Nalezněte alespoň tři přirozené společné násobky čísel

a) 5, 12

b) 17, 0

c) - 6, 8, 17

Příklad 2

Určete všechny společné násobky čísel 60 a 144, které jsou větší než 1000 a menší než 2000.

Příklad 3

Určete obecně (ze začátku můžete za *a* a *b* dosazovat nějaká čísla):

a) n(a,1)

b) n(a,a)

c) n(a,ab)

d) n(a,a+1) Eukleidův algoritmus: a+1-a = 1 D(a, a+1-a) = D(a,1) = 1

Příklady

Příklad 4

Jak se změní nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel, když každé z nich vynásobíme třemi?

Příklad 5

Určete pomocí rozkladu na prvočinitele i pomocí vztahu mezi n(a,b) a D(a,b)

a) n(222, 185)

b) n(360, 504)

c) n(90, 108, 84)

d) n(156, 182, 208)

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

Prvočíselný rozklad přirozeného čísla využíváme především k výpočtu největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku daných čísel a k určení počtu všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla.

Příklady - prvočíselný rozklad:

132 = 2 • 2 • 3 • 11

121 = 11 • 11

72 = 2 • 2 • 2 • 3 • 3

MUNI PED

Výpočet největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku z rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů.

Největší společný dělitel daných přirozených čísel je součinem všech prvočinitelů, kteří se současně vyskytují v prvočíselných rozkladech všech daných čísel, a to s nejmenším s vyskytujících se exponentů.

Nejmenší společný násobek daných čísel je součinem všech různých prvočinitelů, kteří se vyskytují v rozkladech daných čísel, a to v největší mocnině.

Hledání D(a,b) a n(a,b) pomocí prvočíselného rozkladu

<u>Příklad:</u> *Zjistěte* D(108, 90) a n(108, 90).

Řešení: $108 = 2^2 . 3^3$ $90 = 2 . 3^2 . 5$

$D(108, 90) = 2 . 3^2 = 18$

$n(108, 90) = 2^2 . 3^3 . 5 = 540$

MUNI PED

Určení počtu dělitelů

Příklad

Příklady

1. Vypočítejte a) D[n(84, 54), n(24, 132)]

   b) n[D(84, 132), n(24, 54)]

2. Zjistěte, zda platí: D[n(48, 72), n(48, 144)] = n [48, D(72, 144)]

3. Určete nejmenší nenulové přirozené číslo, kterým je třeba násobit

   a) číslo 1224, abychom dostali druhou mocninu přirozeného čísla

   b) číslo 600, abychom dostali třetí mocninu přirozeného čísla.

Příklady

4. Určete všechny přirozené dělitele čísel   68,   360, 504.

5. Určete počet všech přirozených dělitelů čísel   420, 824, 687.

6. Obdélník o rozměrech 56cm a 98cm se má rozdělit příčkami rovnoběžnými se stranami obdélníku na čtverce co možná největší. Kolik bude čtverců a jak velká bude jejich strana?

7. V krabici jsou tužky. Víme, že je jich více než 200 a méně než 300 a že se dají svázat do svazků po 10 a po 12. Kolik je tužek krabici?

MUNI PED

Neurčité rovnice

Poznámky k neurčitým rovnicím

MUNI
PED

Kdy je neurčitá rovnice řešitelná?

Příklad

V souboru nebyla nalezena část obrázku s ID relace rId3.

Řešení redukční metodou

Řešení redukční metodou - pokračování

t	x=2t	y=5t-3
0	0	-3
1	2	2
2	4	7

Slovní úloha

Slovní úloha - pokračování

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	2	7	12	17	22	27	32
y	13	11	9	7	5	3	1
2x+5y	4+65=69	14+55=69	24+45=69	34+35=69	44+25=69	54+15=69	64+5=69

Další slovní úloha

Příklady

Příklady

Příklad 3:

Určete největší a nejmenší trojciferné číslo, které dává při dělení třemi zbytek 2 a při dělení 7 zbytek 5.

Příklad 4:

Číslo 91 rozložte a součet dvou sčítanců, z nichž jeden je dělitelný pěti a druhý devíti.

Příklad 5:

Rozdíl dvou přirozených čísel, z nichž první je dělitelné číslem 23, druhé číslem 29, je roven 1. Určete nejmenší taková kladná čísla.

Příklady

Příklad 6:

Vytvoří-li žáci ve třídě čtveřice, jeden žák zbyde, vytvoří-li trojice, zbydou dva žáci. Kolik žáků je ve třídě, jestliže jich je více než 20 a méně než 30?

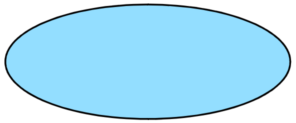
Příklad 7:

Anička sbírala na zahradě jablka. Maminka jí řekla, že za každá čtyři jablka jí dá bonbon, tatínek zase nabízí za každých 6 jablek nálepku. Jak může Anička směnit jablka za bonbony a nálepky, jestliže si nechce žádné jablko nechat?

Jaké relace na množině celých (přirozených) čísel již známe?

MUNI
PED

Připomenutí: věta o dělení se zbytkem



Kongruence a zbytkové třídy: jak souvisí?

- Někdy nás zajímá pouze zbytek po dělení, nikoliv podíl.

V takovém případě můžeme použít kongruence.

  - Příklad 1: dny v týdnu se opakují po sedmi dnech. Víme-li, že např. 8. daného měsíce je středa, potom 15. bude také středa; dále 18. bude sobota

  - Příklad 2: potřebujeme rozdělit ovoce mezi tři děti, ale máme 17 kusů ovoce. Číslo 17 dává po dělení třemi zbytek 2, tedy když přidáme 1 nebo 4 nebo 7, … kusů ovoce, budeme mít počet kusů dělitelný třemi

- Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit na třídy podle toho, jaký zbytek dávají po dělení číslem m – těmto třídám říkáme

  <u>zbytkové třídy modulo *m*</u>

MUNI PED

Sčítání a násobení ve zbytkových třídách: m=3

Modulo 3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

(krát)	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Můžeme zkoumat vlastnosti operací:

Sčítání:

Komutativní

Neutrální prvek: 0 (agresivní prvek pro násobení)

Inverzní prvky: existují

Násobení:

Komutativní, Neutrální prvek: 1

Inverzní prvky: hledáme pouze pro nenulové prvky – 1 i 2 jsou inverzní samy k sobě

Sčítání a násobení ve zbytkových třídách: m=4

Modulo 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(krát)	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Můžeme zkoumat vlastnosti operací:

<u>Sčítání:</u>

Komutativní

Neutrální prvek: 0

Inverzní prvky: existují

<u>Násobení:</u> 6.10 = 2.3.2.5=4.3.5

Komutativní (4k+2)(4m+2) = 4 (…)+4 =4((..))

Neutrální prvek: 1

Inverzní prvky: hledáme pouze pro nenulové prvky, ale ani 2 nemá inverzní prvek

Sčítání a násobení ve zbytkových třídách: m=5

Modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(krát)	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Můžeme zkoumat vlastnosti operací:

<u>Sčítání:</u>

Komutativní Neutrální prvek: 0

Inverzní prvky: existují

<u>Násobení:</u>

Komutativní, Neutrální prvek: 1

Inverzní prvky: hledáme pouze pro nenulové prvky, inverzní prvky existují pro čísla 1-4

Sčítání a násobení ve zbytkových třídách: m=6

Modulo 6

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(krát)	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Opět dopadá skoro všechno analogicky, nacházíme dva dělitele nuly: čísla 2 a 3.

Nápad: pokud je modulo prvočíslo, dělitelé nuly nebudou, jinak ano – děliteli nuly budou vždy všichni dělitelé daného čísla

Příklady

Úlohy k opakování základů algebry 1

Příklad 1:

Uveďte, jaké vlastnosti má relace rovnosti

a) Na množině přirozených čísel

b) Na množině celých čísel

c) Na množině racionálních čísel

Určete, zda se jedná o relaci typu

<u>ekvivalence</u> nebo <u>uspořádání</u>

Příklad 2:

Uveďte, jaké vlastnosti má relace menší nebo rovno.

a) Na množině přirozených čísel

b) Na množině celých čísel

c) Na množině racionálních čísel

Určete, zda se jedná o relaci typu

ekvivalence nebo <u>uspořádání</u>

MUNI PED

Úlohy k opakování základů algebry 2

Příklad 3:

Určete, jaké vlastnosti má relace dělitelnosti na množině přirozených čísel.

Připomínáme: <u>číslo *a* je v relaci s číslem *b* tehdy, pokud platí: *a* dělí *b*</u>

(tj. např. 3 dělí 3 --- dvojice 3, 3 je v relaci; 2 dělí 4, tj. dvojice 2, 4 je v relací,

ale 4 nedělí 2, tj. dvojice 4, 2 v relaci není R, aS, T – uspořádání – „stromeček"

Příklad 4:

Určete, jaké vlastnosti má relace kongruence na množině celých čísel.

Připomínáme: <u>číslo *a* je kongruentní modulo *m* s číslem *b* tehdy, pokud *a* i *b* dávají stejný zbytek po dělení číslem *m*.</u> R, S, T….. Ekvivalence – (zbytkové) třídy

7 je kongr. 12 (mod 5) a 12 je kongr. 17 (mod 5), tedy 7 je kongr. 17 (mod 5)

Kalendář

Když 1. ledna je pondělí, co je **pátek**

1. února? - čtvrtek pondělí 28
1. března? - čtvrtek (nepřestupný rok) 31…3
1. dubna? - sobota čtvrtek 30..2
1. května? - pondělí sobota
1. června? - čtvrtek úterý

1. července? - sobota čtvrtek
1. srpna? - úterý neděle
1. září? - pátek středa
1. října? - pondělí pátek
1. listopadu? - čtvrtek pondělí
1. prosince? - sobota středa

0	3	3
6	1	4
6	2	5
0	3	5

1. prosince? - sobota

Namátkou – loni bylo 1. září i 1. prosince **úterý**

Letos – 1. ledna byl pátek, 1. března pondělí, také 1. listopadu bude pondělí

MUNI PED

Přestupné roky a počáteční hodnota

- Každý čtvrtý rok, tj. rok dělitelný 4, avšak nikoliv 100
- Rok 1900 přestupný nebyl
- Přestupné roky ve 20. století:

  1904, 1908, …., 1992, 1996
- A co rok 2000? – vzhledem k potřebě další (zpětné) korekce jsou roky dělitelné 400 přestupné, tedy i rok 2000 byl přestupný
- Krása výpočtu dne podle data ve 20. století spočívá v tom, že 1. 1. 1900 bylo pondělí (výhoda viz výpočet v tabulce).

Postup výpočtu ve 20. století

Datum 1. ledna 1900: 12. 4. 1961 výpočty modulo 7 – počet dnů v týdnu

Den – pořadové číslo	Měsíc (z tabulky)	Rok – pořadové číslo	Rok – podle počtu přestupných
1 / 12 … 5	0 / 6	0 / 61 … 5	0 / 60:4 = 15 …1

Součet: 1 + 0 + 0 + 0 = 1 …. Bylo to pondělí součet: **5 + 6 + 5 + 1** = 17 kongr. 3 mod 7… středa

Kódy dnů:

pondělí	úterý	středa	čtvrtek	pátek	sobota	neděle
1	2	3	4	5	6	0

-

I. čtvrtletí	0	3	3
II. čtvrtletí	6	1	4
III. čtvrtletí	6	2	5
IV. čtvrtletí	0	**3**	5

MUNI PED

Postup výpočtu pro 21. století

Datum 1. ledna 1900 / 11. 9. 2001 – jako pokračování 20. století

Den – pořadové číslo	Měsíc (z tabulky)	Rok – pořadové číslo	Rok – podle počtu přestupných
1 / 11 … 4	0 / 5	0 / 101 … 3	0 / 101:4 = 25 … 4

Součet: 1 + 0 + 0 + 0 = 1 …. bylo pondělí součet: **4 + 5 + 3 + 4** = 16 kongr. 2 (mod 7) … úterý

Kódy dnů:

pondělí	úterý	středa	čtvrtek	pátek	sobota	neděle
1	2	3	4	5	6	0

-

I. čtvrtletí	0	3	3
II. čtvrtletí	6	1	4
III. čtvrtletí	6	2	**5**
IV. čtvrtletí	0	3	5

MUNI PED

Intuitivně: co jsou a k čemu jsou matematické definice a věty?

- Stručně řečeno, **definice** jsou k tomu, abychom nemuseli vždy znovu složitě vysvětlovat, co máme na mysli, když řekneme … třeba prvočíslo.
- *Definice se dají přirovnat k učení se slovíček v cizím jazyce: nemá smysl se dohadovat, zda se ostrov anglicky řekne isle nebo ne, musíme se to naučit.*

- Naopak věty vyjadřují vztahy mezi definovanými objekty. Jsou to **tvrzení**, přesněji pravdivá tvrzení, o matematických objektech.
- *Hrajeme-li podle stejných pravidel, v matematice se nehádáme, spíše ten, kdo dříve pochopí, vysvětluje druhému, co objevil, co <u>vidí</u>, a ten druhý ještě ne.*
- *Např. rovnost vrcholových úhlů; jednoznačnost rozkladu na prvočísla, …*

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické definice?

Matematickou definicí rozumíme gramatickou větu, kterou přesně vymezujeme význam nějakého matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo dříve zavedených. Současně tak vymezujeme podstatné vlastnosti zaváděného pojmu, stanovujeme jeho název, případně symbolické označení.

Definice nám pomůže ujasnit si, že hovoříme skutečně o tomtéž.
Na rozdíl od definic používaných v humanitních vědách (např. definice pojmu nadané dítě, začínající učitel, …), kde zpravidla uvedeme různé definice a pak se postavíme na něčí stranu nebo na základě uvedeného řekneme, co to znamená pro nás, v matematice slouží definice k domluvě; o definici se v matematickém textu nediskutuje, nýbrž se přijímá

MUNI PED

Jaké chyby děláme v definicích?

Příliš **široká** definice – zahrnuje i objekty, které nechceme

Např. Čtverec je rovinný objekt, který má čtyři strany.
(zkuste vymyslet další příliš široké definice čtverce)

Příliš **úzká** definice – nezahrnuje všechny objekty, které chceme

Např. Kružnice je množina bodů, které mají od středu vzdálenost 5 cm.

MUNI
PED

Jaké další chyby děláme v definicích?

Nadbytečná definice – obsahuje více slov téhož významu (pleonasmus)

Např. Čtverec je čtyřúhelník, který má čtyři strany a tyto strany jsou stejně dlouhé.

Definice **kruhem** – odkazuje na pojem, který má být vysvětlen

Např. Prvočíslo je přirozené číslo, které není složené.
(nelze: číslo složené jsme definovali jako "ne-prvočíslo")

Obsah a rozsah pojmu

– **Obsah pojmu:**
– Soubor všech vlastností, které jsou pro daný pojem charakteristické

Př: vlastnosti prvočísla, soudělných čísel, ...

– **Rozsah pojmu:**
– Soubor všech prvků, které mají charakteristické vlastnosti uvedené v definici daného pojmu

Př: prvočísla jsou 2, 3, 5, 7, atd., ale ne 1, ne –3, ne –7, ….

MUNI
PED

Definice implicitní a explicitní

- Pojmy definujeme přímo (explicitně), jiné nepřímo (implicitně)

- Příklady implicitních definic:
- Např. Každé číslo lze v desítkové soustavě zapsat pomocí číslic 0-9 a mocnin čísla 10; v tomto vyjádření nazýváme počet číslic - *řád soustavy* (zde desítková; známe i binární, čtyřkovou, ….), číslici u i-té mocniny deseti nazýváme číslicí i-tého řádu atp.
- Jsou to ty definice, které "nejsou na první pohled poznat".
- *Uveďte další příklady.*

MUNI PED

Oficiální matematická terminologie a značení

(z předmluvy ke *Slovníku školské matematiky*)

"Matematik často střídá označení podle toho, o kterém problémovém okruhu pojednává a z jakého hlediska. Nelze proto např. vyhovět přání některých školských pracovníků, aby se závazně stanovilo, jakými písmeny se mají označovat množiny a jakými jejich prvky. Jde-li třeba v geometrii o množinu bodů, označí se prvky velkými písmeny, pracujeme-li s množinou úhlů, použijí se pro prvky písmena řecké abecedy apod. *Pokus o důslednost by nás zavedl do slepé uličky*."

– Česká terminologická komise pro matematiku, v Praze v září 1981

(Matematici chtěli terminologii sjednotit. Jejich cílem bylo také pokud možno používat slova, která se běžně nepoužívají, aby bylo hned jasné, že jde o pojem matematický.)

Hra: co je to, když se řekne…. (zejména pojmy z aritmetiky, ne z geometrie)

- *Zlomek: viz diskuse v minulém semestru*
- *Množina:*
- *Číslo:*
- *Rovnice:*
- *Rovnost:*
- *Nerovnost (nerovnice --- „fajnšmekři“ nepoužívají):*

- *Shodneme se na tom, že a/b je také*

MUNI PED

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické věty?

Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s matematickým obsahem. Její pravdivost lze dokázat. Někdy se matematické větě též říká **matematická poučka** nebo **teorém**.

Větou (matematickou větou) formulujeme "zjevnou pravdu", například to, že jediné sudé prvočíslo je 2, relace rovnosti je symetrická i antisymetrická současně. Pokud dva lidé zacházejí se stejnými pojmy, na jejichž významu se dohodli pomocí matematických definic (konvence), o pravdivosti matematické věty se nemohou hádat, pouze se o ní přesvědčit.
K přesvědčení nepřesvědčeného slouží **důkaz**: krok po kroku ukážeme, že to, co vidíme, je jasná pravda :-)

Hra: které matematické věty jsou ekvivalence a které implikace (zejména z aritmetiky)

- *Pravidla pro dělitelnost: 2, 3, 4, 5, 6, ….:*
- *Číslo dělitelné 9 je vždy dělitelné 3*
- *Dává-li číslo k po dělení 4 zbytek 1, pak dává zbytek 1 po dělení 4 i jeho druhá mocnina*
- *…*
- *(vymyslete další:)*
- *Implikace s existenčním kvantifikátorem*
- *Implikace se všeobecným kvantifikátorem*
- *Obrácená věta (nemusí být pravdivá)*
- *Obměněná věta*

MUNI
PED

Formálně: co jsou a k čemu jsou matematické důkazy?

- **Důkaz**: je prostředek k zviditelnění zřejmého. Probíhá krok po kroku a jeho forma závisí na tom, kdo komu důkaz říká
- 1. studující učiteli na písemce: jde jen o kontrolu, zda studující správně pochopil obsah definic (Př.: Dokažte, že neexistuje číslo, které je současně prvočíslo i číslo složené).
- 2. učitel studujícímu (např. ve skriptech, na přednášce, …): snaha osvětlit problém, rozdělit myšlenkový postup na menší kroky
- 3. matematik matematikovi: důkaz "jednou provždy"
- Formálně: přímý, nepřímý, sporem, matematickou indukcí

MUNI PED