

**MUNI
PED**

Aritmetika 2 – jaro 2021

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Organizace semestru

- Cvičení budou probíhat v aplikaci MS Teams podle rozvrhu, účast na cvičení je povinná.
- Během semestru budou nahrávány studijní materiály v dostatečném předstihu do ISu. Ve skupinkách si připravíte řešení jednoho ze zadaných příkladů a na cvičení řešení některý člen skupinky předvede (tohoto člena určí náhodně vyučující).
- Na konci semestru zápočtová písemná práce (ukázku nahrajeme během semestru do studijních materiálů v ISu).

Relace dělitelnosti

–Definice 1:

Říkáme, že celé číslo b dělí celé číslo a (nebo b je dělitelem a nebo a je dělitelné b nebo a je násobkem b), právě když existuje celé číslo x , pro které platí $a = b \cdot x$.

Symbolicky: $b|a \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})(a = b \cdot x)$

Relace dělitelnosti

- Jestliže k celým číslům a, b neexistuje takové celé číslo x , že $a = b \cdot x$, říkáme, že **b nedělí a** , značíme $b \nmid a$.
- Platí-li, že $a = b \cdot x$, pak čísla b, x jsou dělitelé čísla a a nazývají se **sdužení dělitelé čísla a** .
- Dělitelé čísla a patřící do množiny přirozených čísel se nazývají **přirození dělitelé čísla a** .

Relace dělitelnosti

- Každé celé číslo $A \neq 0; 1; -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla $1; A; -1; -A$. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla A** . Ostatní dělitele (pokud existují) nazýváme nesamozřejmými děliteli čísla A .
- Čísla 1 a -1 mají právě dva celočíselné dělitele, a to 1 a -1 .
- Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.

Relace dělitelnosti

–Příklad 1

Rozeberme si dělitele čísla 10

– Celočíselných dělitelů čísla 10 je osm, jsou to čísla
1; 2; 5; 10; –1; –2; –5; –10.

– Dvojice sdružených dělitelů čísla 10 jsou:

1; 10 2; 5 – 1; –10 – 2; –5

– Samozřejmí dělitelé čísla 10 jsou čísla

1; 10; –1; –10

– Přirození dělitelé čísla 10 jsou čísla

1; 2; 5; 10

Relace dělitelnosti

–Věta 1:

Pro libovolná celá čísla a, b, c platí:

- jestliže $b|a$ a zároveň $b|c$, pak také $b|(a + c)$ a $b|(a - c)$
symbolicky $(b|a \wedge b|c) \Rightarrow (b|(a + c) \wedge b|(a - c))$
- jestliže $b|a$, pak také $(-b)|a$, symbolicky $b|a \Rightarrow (-b)|a$
- jestliže $b|a$, pak také $b|(-a)$, symbolicky $b|a \Rightarrow b|(-a)$

–Důkaz věty 1:

- Předpokládejme, že pro libovolná celá čísla a, b, c platí $b|a$ a $b|c$. Podle definice 1 to znamená, že existují celá čísla x_1, x_2 taková, že $a = b \cdot x_1$, $c = b \cdot x_2$. Po úpravě dostáváme

$$a + c = b \cdot (x_1 + x_2)$$

$$a - c = b \cdot (x_1 - x_2)$$

Protože součet a rozdíl celých čísel x_1, x_2 je zase celé číslo, platí

$$b|(a + c), \quad b|(a - c)$$

- Plyne z možnosti zapsat $-b = (-1) \cdot b$.
- Plyne z možnosti zapsat $-a = (-1) \cdot a$.

Relace dělitelnosti

Definice 2

Celé číslo dělitelné dvěma se nazývá **sudé číslo**.

Celé číslo, které není dělitelné dvěma (dává při dělení dvěma zbytek 1), se nazývá **liché číslo**.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 2

Dokažte, že

- a) součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je liché číslo;
- b) součin libovolných dvou lichých čísel je liché číslo;
- c) součin libovolného sudého čísla s libovolným lichým číslem je sudé číslo.

Příklad 3

Určete vlastnosti relace „dělitelnost celých čísel“ a tvrzení zdůvodněte.

Příklad 4

Jsou dána čísla a , b , pro která platí, že a je dělitelné osmi a b je dělitelné šesti. Dokažte, že jejich součin je dělitelný číslem 24.

Relace dělitelnosti - příklady

—Příklad 5

Dokažte, že

- a) součet tří po sobě jdoucích celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti;
- b) součet každých tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (počínaje 2^1) je dělitelný 7;
- c) druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8.