

MUNI
PED

Aritmetika 2 – jaro 2021

3. prezentace

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.

RNDr. Petra Bušková

Prvočísla a čísla složená

- Rozdělíme přirozená čísla na dvě velké podmnožiny a jednu jednoprvkovou:
 - číslo 1 bude patřit do zvláštní podmnožiny
 - prvočísla (čísla, která mají právě dva různé dělitele) tvoří jednu velkou podmnožinu
 - čísla složená (čísla s alespoň třemi různými děliteli) tvoří druhou velkou podmnožinu
- Podmnožina prvočísel a podmnožina čísel složených mají prázdný průnik (tj. číslo je buď prvočíslo, nebo číslo složené).

Definice: prvočíslo, číslo složené

Definice 2.

Přirozené číslo $p > 1$ nazýváme **prvočíslem**, právě když má právě dva různé přirozené dělitele (tj. čísla 1 a p).

Přirozené číslo $a > 1$, které není prvočíslem (tj. má více než dva přirozené dělitele), nazýváme **složeným číslem**.

Příklady

- Číslo 13 je prvočíslo, protože má právě dva přirozené dělitele, čísla 1 a 13. Jsou to samozřejmí dělitelé čísla 13.
- Číslo 12 je složené číslo, protože má více než dva přirozené dělitele: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
- Číslo 1 podle definice není prvočíslo ani číslo složené.

Věta o existenci prvočíselného dělitele

Věta 2: Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň jednoho prvočíselného dělitele.

Důkaz: Číslo $n > 1$ má alespoň jednoho dělitele, který je větší než 1. Z jeho dělitelů je jeden nejmenší, označme ho p .

Tento nejmenší přirozený dělitel $p > 1$ musí být prvočíslem.

Kdyby totiž p bylo složené číslo, tj. $p = a \cdot b$, kde $1 < a < p$, $1 < b < p$, pak by ze vztahů $a | p$ a $p | n$ plynulo $a | n$, což by znamenalo, že existuje dělitel $a < p$ čísla n , což by bylo v rozporu s naším předpokladem, že p je nejmenší z přirozených dělitelů čísla n . Číslo p je tedy prvočíslo.

Jak rozhodneme, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené?

Máme-li rozhodnout o tom, zda dané číslo $a > 1$ je prvočíslem nebo složeným číslem, můžeme postupovat tak, že zjišťujeme, zda je dané číslo dělitelné prvočísly menšími než toto číslo.

Platí totiž **věta**: *Existuje-li prvočíslo menší než číslo a , které dělí číslo a , pak a je složené číslo.*

Uvedený postup je však značně zdlouhavý. Proto budeme využívat následující věty:

Věta 3. Jestliže přirozené číslo a není dělitelné žádným prvočíslem menším nebo rovným odmocnině z a , pak a je prvočíslo.

Důkaz věty 3

Provedeme nepřímý důkaz, tj. přímý důkaz věty obměněné)

Věta obměněná k větě 3: Není-li a prvočíslo, pak je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p menším než odmocnina z a .

Tedy předpokládejme, že číslo a není prvočíslo, pak podle věty 2. existuje prvočíslo p , které je nejmenším dělitelem čísla a . Můžeme psát: $a = q \cdot p$ a současně $p < a$; současně platí také: p je menší nebo rovno q . Je tedy a větší nebo rovno p^2 a odtud plyne, že p musí být menší nebo rovno odmocnině z a .

Jak zjistit, zda dané číslo je prvočíslo

Příklad: *Zjistěte, zda 173 je prvočíslo nebo složené číslo.*

Řešení: Odmocnina ze 173 je menší než 14 (druhá mocnina 14 je 196), proto budeme zjišťovat, zda číslo 173 je dělitelné některým z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Číslo 173 není dělitelné žádným z těchto prvočísel, proto je prvočíslem.

Prvočíselný rozklad

–Věta 4:

Každé složené číslo a lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru součinu konečného počtu prvočísel

$$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$$

kde $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ jsou prvočísla a $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ jsou nenulová celá čísla.

Tomuto zápisu se říká **prvočíselný rozklad přirozeného čísla a** a

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ jsou **prvočinitelé** rozkladu.

Například prvočíselný rozklad čísla 600 lze zapsat $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

Příklady

Příklad 1

Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou čísla 437, 593, 1007, 2771, 3012 prvočísla, nebo čísla složená.

Příklad 2

Najděte alespoň tři prvočísla větší než 120 a zároveň menší než 150.

Příklad 3

Najděte největší prvočíslo, kterým je dělitelné číslo

- a) 1326
- b) 2406
- c) 4380

Příklady

Příklad 4

Rozložte na součin prvočinitelů číslo

- a) 500
- b) 2024
- c) 1326

Příklad 5

Najděte alespoň tři přirozená čísla, která jsou dělitelná

- a) všemi jednocifernými prvočíslly,
- b) všemi přirozenými čísly od jedné do deseti.

Určete v obou případech nejmenší přirozené číslo, které podmínkám vyhovuje.