Důkazy v komutativní grupě $(M, \circ)$:

① $\overline{\overline{a}} = a$

Důkaz: $\overline{\overline{a}} \overset{EN}{=} \overline{\overline{a}} \circ e \overset{EI}{=} \overline{\overline{a}} \circ (\overline{a} \circ a) \overset{A}{=} (\overline{\overline{a}} \circ \overline{a}) \circ a \overset{EI}{=}$

$\overset{EN}{=} e \circ a = a$

② $\overline{a \circ \overline{b}} = b \circ \overline{a}$

Důkaz: $(a \circ \overline{b}) \circ \overline{a \circ \overline{b}} = e$

$(a \circ \overline{b}) \circ b \circ \overline{a} \overset{A}{=} [(a \circ \overline{b}) \circ b] \circ \overline{a} \overset{A}{=} [a \circ (\overline{b} \circ b)] \circ \overline{a} =$

$\overset{EI}{=} [a \circ e] \circ \overline{a} \overset{EN}{=} a \circ \overline{a} \overset{EI}{=} e$

Odtud plyne tvrzení $\overline{a \circ \overline{b}} = b \circ \overline{a}$, protože v grupě je inverzní prvek určen jednoznačně.

③ $a \circ c = b \circ c \Rightarrow a = b$

Důkaz:

$a \circ c = b \circ c \;\big|\; \circ\, \overline{c}$ EI

$(a \circ c) \circ \overline{c} = (b \circ c) \circ \overline{c}$ A

$a \circ (c \circ \overline{c}) = b \circ (c \circ \overline{c})$ EI

$a \circ e = b \circ e$ EN

$a = b$

srovnejte:

$a + x = b + x \;\big|\; +(-x)$

$(a + x) - x = (b + x) - x$

$a + \underbrace{(x - x)}_{0} = b + \underbrace{(x - x)}_{0}$

$a = b$

$a \cdot x = b \cdot x \;\big|\; \cdot \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$

$(a \cdot x) \cdot \frac{1}{x} = (b \cdot x) \cdot \frac{1}{x}$

$a \cdot \frac{x}{x} = b \cdot \frac{x}{x}$

$a \cdot 1 = b \cdot 1$

$a = b$

$(\mathbb{Z}, \circ)$ $x \circ y = x + y - 4$ $1 \circ 1 = -2$, $2 \circ 3 = 1$ atp.

ND: $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y - 4 \in \mathbb{Z}$ platí

K: $x \circ y = x + y - 4$; $y \circ x = y + x - 4$ platí

A: $L = (x \circ y) \circ z = (x+y-4) \circ z = (x+y-4) + z - 4 = x + y + z - 8$ $\underline{L = P}$

$P = x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 4) = x + (y + z - 4) - 4 = x + y + z - 8$

EN: $a \circ e = a$

$a + e - 4 = a \quad | -a$

$\underline{e = 4}$

EI: $a \circ \bar{a} = 4$

$a + \bar{a} - 4 = 4$

$\underline{\bar{a} = -a + 8}$

ZR: $a \circ x = b$

$a + x - 4 = b$

$\underline{x = b - a + 4}$

$(\mathbb{Z}, \circ)$ komutativní grupa

$(\mathbb{Z}, \circ)$ $x \circ y = x - y + 1$ $1 \circ 1 = 1$, $2 \circ 3 = 0$ atp.

ND: $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y + 1 \in \mathbb{Z}$ platí

~~K~~: ověřováme, že neplatí ; protipříklad $2 \circ 3 = 0$, $3 \circ 2 = 2$

výpočtem: $x \circ y = x - y + 1$, $y \circ x = y - x + 1$ obecně se nerovná

~~A~~: ověřováme, že neplatí ;

zvolíme $x = 8$, $y = 5$, $z = 2$, pak $(8 \circ 5) \circ 2 = 4 \circ 2 = 3$,

$8 \circ (5 \circ 2) = 8 \circ 4 = 5$;

výpočtem :

$L = (x \circ y) \circ z = (x - y + 1) \circ z = (x - y + 1) - z + 1 = x - y - z + 2$ $\underline{L \neq P}$

$P \quad x \circ (y \circ z) = x \circ (y - z + 1) = x - (y - z + 1) + 1 = x - y + z$

~~EN~~: $a \circ e = a$

$a - e + 1 = a \quad | -a$

$\underline{e = 1}$

musíme ještě počítat

$e \circ a = a$

$e - a + 1 = a$

$e + 1 = 2a$

$\underline{e = 2a - 1}$

$e = f(a)$ nelze

EN nemá

./.

$(\mathbb{Z},\circ)$ $x\circ y = x-y+1$ pokračování ;

víme už, že ND, ~~K~~, ~~A~~, ~~EN~~

~~EI~~ protože ~~EN~~

ZR: $a\circ x = b$

$a-x+1=b$

$\underline{x = a-b+1} \in \mathbb{Z}$

$y\circ a = b$

$y-a+1=b$

$\underline{y = a+b-1} \in \mathbb{Z}$

tj. $(\mathbb{Z},\circ)$ je nekomutativní grupoid s vlastností ZR.

$(\mathbb{Q},\circ)$ $x\circ y = xy+1$

$1\circ 1 = 2$ $2\circ 3 = 7$ atp.

ND: $x,y\in \mathbb{Q} \Rightarrow xy+1 \in \mathbb{Q}$

K: $x\circ y = xy+1$ rovná se

$y\circ x = yx+1$

~~A~~: $L = (x\circ y)\circ z = (xy+1)\circ z = (xy+1)\cdot z+1 = xyz+z+1$

$P = x\circ(y\circ z) = x\circ(yz+1) = x(yz+1)+1 = xyz+x+1$

$L \neq P$

~~EN~~ $a\circ e = a$

$ae+1=a$

$ae = a-1$

$e = \frac{a-1}{a}$

e neexistuje pro $a\neq 0$, navíc nemůže být e funkcí a. ~~EN~~

~~EI~~ protože ~~EN~~

~~ZR~~: $a\circ x = b$

$ax+1=b$

$ax = b-1$

$x = \frac{b-1}{a}$

$\frac{b-1}{a} \in \mathbb{Q}$, ale $a\neq 0$

proto např. pro volbu $a=0$, $b=3$ nemá rovnice řešení :

$0\circ x = b$

$0\cdot x+1 = 3$

$\underline{1 = 3}$

$(\mathbb{Q},\circ)$ komutativní grupoid

$(\mathbb{Z}, \circ)$ $x \circ y = x + y + xy$ $1 \circ 1 = 3$ $2 \circ 3 = 11$ atp.

ND: $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y + xy \in \mathbb{Z}$ platí

K: $x \circ y = x + y + xy$ rovná se
$y \circ x = y + x + yx$

A: $L = (x \circ y) \circ z = (x + y + xy) \circ z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy) \cdot z =$
$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz =$
$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$;

$P = x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z + yz) = x + (y + z + yz) + x \cdot (y + z + yz) =$
$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz =$
$= x + y + z + xy + xz + yz + xyz$ $L = P$

EN $a \circ e = a$
$a + e + ae = a \quad | -a$
$e + ae = 0$
$e(a + 1) = 0$
$e = 0$ nebo $a = -1$

Pro všechna celá čísla různá od -1 je $e = 0$; zkusíme, jak $e = 0$ „působí" na $a = -1$:
$-1 \circ 0 = -1$
$-1 + 0 + (-1) \cdot 0 = -1$
$-1 = -1$ platí, tedy EN

~~EI~~: $a \circ \bar{a} = 0$
$a + \bar{a} + a\bar{a} = 0$
$\bar{a}(1 + a) = -a$
$\bar{a} = \dfrac{-a}{1 + a}$

nemusí být celé číslo, neexistuje pro $a = -1$.
Tedy ~~EI~~.

~~ZR~~: nemůže být podle implikace $A \Rightarrow (EI \Leftrightarrow ZR)$
$1 \quad \boxed{1} \quad 0 \quad 1 \quad 0$

ověříme výpočtem

$a \circ x = b$
$a + x + ax = b$
$x(1 + a) = b - a$
$x = \dfrac{b - a}{1 + a}$

nemusí být celé číslo, neexistuje pro $a = -1$.

KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA S VL. EN.

5 $(\mathbb{Q}, \circ) \quad a \circ b = \dfrac{a+b}{2}$

ND platí $\quad a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$

K $\quad L = a \circ b = \dfrac{a+b}{2} \qquad L = P$

$\quad P = b \circ a = \dfrac{b+a}{2}$

~~A~~: $L = (a \circ b) \circ c = \dfrac{a+b}{2} \circ c = \dfrac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \dfrac{a+b+2c}{4} \qquad L \neq P$

$P = a \circ (b \circ c) = a \circ \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \dfrac{2a+b+c}{4}$

~~EN~~:

$a \circ e = a \qquad e \circ a = a$

$\dfrac{a+e}{2} = a \qquad \dfrac{e+a}{2} = a$

$a + e = 2a \qquad e = a$

$e = a$

e závisí na a!

~~EI~~

ZR

$a \circ x = b$

$\dfrac{a+x}{2} = b$

$x = 2b - a \in \mathbb{Q}$

komutativní grupoid s vlastností ZR.

6 $(\mathbb{Q}, *) \quad a * b = 2ab$

ND platí $\quad a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2ab \in \mathbb{Q}$

K platí $\quad a * b = 2ab, \; b * a = 2ba$

A: $L = (a * b) * c = 2ab * c = 2 \cdot (2ab) \cdot c = 4abc \qquad L = P$

$P = a * (b * c) = a * 2bc = 2 \cdot a \cdot (2bc) = 4abc$

EN: $a * e = a$

$2ae = a \;|: a, \; a \neq 0$

$e = \dfrac{1}{2}$

je-li $a \neq 0$, pak $e = \frac{1}{2}$;

je-li $a = 0$, pak $0 * \frac{1}{2} = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$,

$0 * \frac{1}{2} = 0$

Číslo $\frac{1}{2}$ je neutrální prvek.

~~EI~~: $a * \bar{a} = \dfrac{1}{2}$

$2a\bar{a} = \dfrac{1}{2}$

$a\bar{a} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \bar{a} = \dfrac{1}{4a}$

pro $a = 0$ inverzní prvek neex. ~~neexis~~.

~~ZR~~: $A \Rightarrow (EI \Leftrightarrow ZR)$

$1 \; \boxed{1} \; 0 \; 1 \; 0$

Nechť $P(M)$ je potenční systém množiny $\{a,b\} = M$. operace je $\cup$ (sjednocení množin). Urči typ struktury $(P(M), \cup)$;

KOMUTATIVNÍ POLOGRUPA S EN

využijeme tabulku:

$\cup$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

ND, K, A, EN, ~~EI~~, ~~ZR~~

operace $\cup$ je asociativní, protože víme, že platí pro každé tři mn.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ověřili jsme, že neutrální prvek je $\emptyset$ $(A \cup \emptyset = A)$, agresivní prvek je M $(A \cup M = M)$.

Nechť $M = \{0,1,2,3\}$, operace $\circ$ je dána $x \circ y = |x - y|$

využijeme opět tabulku

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

ND, K, ~~A~~, EN, EI, ~~ZR~~

protože platí EI $\wedge$ ~~ZR~~, nemůže být asociativní.

Je lepší takto než obecně dokazovat, že neplatí

$$|x - |y - z|| = ||x - y| - z|.$$

Komutativní grupoid s vlastnostmi EN a EI.

$(\mathbb{R}, \circ)$ reálná čísla $\quad x \circ y = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad 1 \circ 1 = \sqrt{2}$, $2 \circ 3 = \sqrt{13}$ atd.

ND: $x, y \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$ platí

K: $L = x \circ y = \sqrt{x^2+y^2}$
$P = y \circ x = \sqrt{y^2+x^2}$ $\quad L = P$ platí

A: $L = (x \circ y) \circ z = \sqrt{x^2+y^2} \circ z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$P = x \circ (y \circ z) = x \circ \sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad L = P$ platí

EN: $x \circ e = x$

$\sqrt{x^2+e^2} = x \quad |^2$

$x^2+e^2 = x^2 \quad | -x^2$

$\underline{\underline{e = 0}}$

zk $x \circ e = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \underline{\underline{x}}$

~~EI~~: $x \circ \bar{x} = 0$

$\sqrt{x^2+\bar{x}^2} = 0 \quad |^2$

$x^2 + \bar{x}^2 = 0$

$\bar{x}^2 = -x^2$

nemá řešení.

$x^2 \geq 0$, proto $\bar{x}^2$ by muselo být ≤ 0, což obecně neplatí.

~~ZR~~: nemůže být z platnosti vztahu

$A \Rightarrow (EI \Leftrightarrow ZR)$

$\underline{1} \; \boxed{1} \; 0 \; \underline{1} \; \underline{0}$

ověříme: $a \circ x = b$

$\sqrt{a^2+x^2} = b \quad |^2$

$a^2+x^2 = b^2$

$x^2 = b^2-a^2$

$x = \pm\sqrt{b^2-a^2}$

obecně nemá řešení, b^2-a^2 může být záporné.

$(\mathbb{R}, \circ)$ je komutativní pologrupa s vlastností EN.

Určete typ algebraické struktury $(\mathbb{R}^+, \circ)$, kde $x \circ y = \sqrt{xy}$.

ND: $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sqrt{xy} \in \mathbb{R}^+$ platí

K: $L = x \circ y = \sqrt{xy}$

$P = y \circ x = \sqrt{yx}$ $\quad L = P$ platí

$\cancel{A}$: $L = (x \circ y) \circ z = \sqrt{xy} \circ z = \sqrt{\sqrt{xy} \cdot z}$

$P = x \circ (y \circ z) = x \circ \sqrt{yz} = \sqrt{x \cdot \sqrt{yz}}$

„Zkusíme" protipříklad: $x = 9, y = 4, z = 16$

$L = \sqrt{\sqrt{36} \cdot 16} = \sqrt{6 \cdot 16} = 4\sqrt{6}$ $\quad L \neq P$

$P = \sqrt{9 \cdot \sqrt{64}} = \sqrt{9 \cdot 8} = 3\sqrt{8}$

obecně $\sqrt{\sqrt{xy} \cdot z} = \sqrt{x \cdot \sqrt{yz}} \quad |^2$

$\sqrt{xy} \cdot z = x \cdot \sqrt{yz} \quad |^2$

$xyz^2 = x^2yz \quad |: xyz \in \mathbb{R}^+$

$z = x$

$\cancel{EN}$: $x \circ e = x$ $\qquad$ potom též $\cancel{EI}$

$\sqrt{xe} = x \quad |^2$

$xe = x^2$

$\underline{e = x}$ nelze

ZR: $a \circ x = b$

$\sqrt{ax} = b \quad |^2$

$ax = b^2$

$\underline{x = \frac{b^2}{a}}$

x neexistuje pro $a = 0$, to je ale z předpokladu $a, b \in \mathbb{R}^+$ vyloučeno, tj. ZR platí.

$(\mathbb{R}^+, \circ)$ je komutativní grupoid s vlastností ZR.