Kartézský součin množin, binární relace z množiny do množiny

Kartézským součinem dvou množin A, B rozumíme množinu **A x B** = {[x,y]; x $\in$ A $\wedge$ y $\in$ B}, tj. množinu všech uspořádaných dvojic [x,y], kde x $\in$ A a y $\in$ B.

Znázornění kartézského součinu **A x B** se provede tzv. **kartézským grafem** – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku x (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny A, z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku y (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny B, z níž vybíráme druhé složky dvojic. Uspořádanou dvojici [*x,y*] $\in$ A x B znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body *x, y* a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.

Binární relací R v neprázdné množině M rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M x M.

Znázornění binárních relací se provede:

- **Kartézským grafem** relace R – analogicky jako u kartézského součinu výše.
- **Uzlovým grafem** relace R v množině M - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny M . Uspořádanou dvojici [*x,y*] $\in$ R znázorníme pomocí šipky (tzv. orientované hrany), která vychází z uzlu *x* a směřuje do uzlu *y*. V případě, že *x* = *y*, nazýváme šipku smyčkou. Pokud jsou v relaci R dvojice [*x,y*] a [y,*x*], znázorníme je "dvojšipkou" (tzv. neorientovanou hranou).

↑ Opakování z minulého semestru ↑

↓ Nová látka ↓

Definice 1: **Binární relací R** z množiny M do množiny N rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M x N.

Příklad 1. Jsou dány množiny M = {x, y, z}, N = {a, b}.

- Kartézský součin množin M, N: **M x N** = {[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]}
- <u>Binární relace **R** z množiny M do množiny N</u> je libovolná podmnožina množiny **M x N**, tedy např.:

  R_1 = {[x,a]},
  R_2 = {[x,a], [y,a], [y,b]},
  R_3 = {[z,a], [y,a], [z,b], [x,b]},
  R_4 = {[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]} = **M x N** (tj. **úplná relace** z M do N)
  R_5 = ϕ (tj. **nulová relace** z M do N)

Znázornění binární relace **R** z množiny M do množiny N se provede:

- **Kartézským grafem** – analogicky jako u kartézského součinu množin výše.
- **Uzlovým grafem** – vysvětleno níže na Příkladu 2.

Příklad 2. Jsou dány množiny M = {1, 2, 3, 4, 5}, N = {a, b, c, d} a relace R = {[2,a], [3,a], [4,b], [5,d]} z množiny M do množiny N. Sestrojte kartézský a uzlový graf relace R.

Definice 2: Nechť R je relace z množiny A do množiny B a nechť S je relace z množiny B do množiny C. Pak relace daná vztahem

$$\boxed{\mathbf{R} \circ \mathbf{S} = \{[x,y] \in A \times C;\ \text{existuje } b \in B \text{ tak, že } [x,b] \in \mathbf{R} \wedge [b,y] \in \mathbf{S}\}}$$

se nazývá **složená relace** $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ z relací **R** a **S**.

Poznámka. Relaci $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ čteme: **„S po R"**.

Příklad 3. Jsou dány množiny A = {a, b, c, d}, B = {x, y, z}, C = {k, l, m, n}. Dále je dána relace **R** = {[a,x], [c,y], [c,z]} z množiny A do množiny B a relace **S** = {[x,k], [x,l], [x,m], [x,n], [y,k], [y,n]} z množiny B do množiny C. Určete relaci $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$.

Definice 3: Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B. Relace $\mathbf{R}^{-1}$ z množiny B do množiny A daná vztahem

$$\boxed{\mathbf{R}^{-1} = \{[y,x] \in B \times A:\ [x,y] \in \mathbf{R}\}}$$

se nazývá **relace inverzní** k relaci **R**.

Poznámka. Vzhledem k *Definici 3* platí:

- $\mathbf{R} \subset A \times B$
- $\mathbf{R}^{-1} \subset B \times A$.

Příklad 4. Jsou dány množiny A = {a, b, c, d}, B = {x, y, z} a relace **R** = {[a,x], [a,y], [b,z], [c,y], [d,x]} z množiny A do množiny B. Určete relaci $\mathbf{R}^{-1}$ (tj. relaci inverzní k relaci **R**).

Poznámka. Pro libovolnou relaci **R** z množiny A do množiny B platí: $(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$.

Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení

Definice 4: Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že $[a,b] \in \mathbf{R}$. Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme $R: A \to B$.

Definice 5: Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

- Jestliže $[a,b] \in \mathbf{R}$, pak prvek $a \in A$ nazýváme **vzorem** prvku $b \in B$ v zobrazení **R**; prvek $b \in B$ nazýváme **obrazem** prvku $a \in A$ v zobrazení **R**.
- Množina $O_1(\mathbf{R}) = \{a \in A$: existuje $b \in B$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí $O_1(\mathbf{R}) \subset A$.
- Množina $O_2(\mathbf{R}) = \{b \in B$: existuje $a \in A$ takové, že $[a,b] \in \mathbf{R}\}$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. $O_2(\mathbf{R}) \subset B$.

Příklad 5. Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) $\mathbf{R}_1$ = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) $\mathbf{R_2}$ = {[x,a], [z,b]},
c) $\mathbf{R_3}$ = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li $O_1(\mathbf{R}) = A \wedge O_2(\mathbf{R}) = B$, nazývá se **R** **zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li $O_1(\mathbf{R}) \subset A \wedge O_1(\mathbf{R}) \neq A \wedge O_2(\mathbf{R}) \subset B \wedge O_2(\mathbf{R}) \neq B$, nazývá se **R** **zobrazení z množiny A do množiny B**.

Příklad 6. Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.
a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná?
1) **R** = {[x,z], [c,c], [y,c]}.
2) **S** = {[x,z], [y,z], [a,z], [c,x]}.
b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.
c) Zapište výčtem prvků
1) jedno zobrazení $\mathbf{R_1}$ typu z množiny A do množiny B,
2) jedno zobrazení $\mathbf{R_2}$ množiny A do množiny B,
3) jedno zobrazení množiny A na množinu B,
4) jedno zobrazení z množiny A na množinu B.

Definice 5: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace $\mathbf{R^{-1}}$ je zobrazení z množiny B do množiny A.

Důsledek: Zobrazení **R** z množiny A do množiny B je **prosté** právě tehdy, když
a) ke každému $y \in B$ existuje nejvýše jedno $x \in A$ takové, že $[x,y] \in \mathbf{R}$,
b) ke každým dvěma různým vzorům $x_1, x_2 \in A$ přiřadíme dva různé obrazy $y_1, y_2 \in B$ v zobrazení **R.**

Hovoříme pak o:
- Prostém zobrazení množiny A do množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A na množinu B,
- Prostém zobrazení množiny A na množiny B,
- Prostém zobrazení z množiny A do množiny B.

Definice 6: Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Příklad 7. Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:
a) $\mathbf{R_1}$ = {[1,a], [2,c], [3,d]},
b) $\mathbf{R_2}$ = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},
c) $\mathbf{R_3}$ = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}.

Definice 7: **Permutací** konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).

Příklad 8. Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {x, y, z}.

Definice 8: Nechť **R** je zobrazení z množiny M do množiny N a **S** je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace **R** ○ **S** je zobrazení a nazývá se **složené zobrazení** ze zobrazení **R** a **S**.

Příklad 9. Složte permutace $\mathbf{P_2} \circ \mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_3} \circ \mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_4} \circ \mathbf{P_6}$ z *Příkladu 8.*

Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny

Definice 9: Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.

Příklad 10. Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Poznámka. Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin $\mathcal{M}$ vytváří rozklad systému $\mathcal{M}$ na třídy ekvivalentních množin.

Příklad 11. Je dán systém množin $\mathcal{M}$ = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2}, C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {Δ, Δ, Δ}, F = { *, *}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathcal{M}$ jsou ekvivalentní.

Definice 10: Řekneme, že množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

Definice 11: Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

Poznámka. Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když
$M \subset N \wedge M \neq N$.