Aritmetika 2 – jaro 2021

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Organizace semestru

– Cvičení budou probíhat v aplikaci MS Teams podle rozvrhu, účast na cvičení je povinná.

– Během semestru budou nahrávány studijní materiály v dostatečném předstihu do ISu. Ve skupinkách si připravíte řešení jednoho ze zadaných příkladů a na cvičení řešení některý člen skupinky předvede (tohoto člena určí náhodně vyučující).

– Na konci semestru zápočtová písemná práce (ukázku nahrajeme během semestru do studijních materiálů v ISu).

Relace dělitelnosti

- Definice 1:

Říkáme, že celé číslo ***b* dělí** celé číslo ***a*** (nebo ***b* je dělitelem *a*** nebo ***a* je dělitelné *b*** nebo ***a* je násobkem *b***), právě když existuje celé číslo *x*, pro které platí $a = b \cdot x$.

Symbolicky: $b|a \iff (\exists x \in \boldsymbol{Z})(a = b \cdot x)$

MUNI PED

Relace dělitelnosti

- Jestliže k celým číslům *a, b* neexistuje takové celé číslo *x, že* $a = b \cdot x$, říkáme, že ***b* nedělí *a***, značíme $b \nmid a$.

- Platí-li, že $a = b \cdot x$, pak čísla *b, x* jsou dělitelé čísla *a* a nazývají se **sdružení dělitelé čísla *a***.

- Dělitelé čísla *a* patřící do množiny přirozených čísel se nazývají **přirození dělitelé čísla *a***.

Relacе dělitelnosti

- Každé celé číslo $A \neq 0; 1; -1$ má alespoň 4 celočíselné dělitele, a to čísla $1; A; -1; -A$. Tyto dělitele nazýváme **samozřejmými děliteli čísla A**. Ostatní dělitele (pokud existují) nazýváme nesamozřejmými děliteli čísla A.

- Čísla 1 a -1 mají právě dva celočíselné dělitele, a to 1 a -1.

- Číslo 0 má nekonečně mnoho dělitelů, a to každé celé číslo.

MUNI PED

Relace dělitelnosti

– **Příklad 1**

Rozeberme si dělitele čísla 10

– Celočíselných dělitelů čísla 10 je osm, jsou to čísla

$1; 2; 5; 10; -1; -2; -5; -10.$

– Dvojice sdružených dělitelů čísla 10 jsou:

$$1; 10 \quad 2; 5 \quad -1; -10 \quad -2; -5$$

– Samozřejmí dělitelé čísla 10 jsou čísla

$$1; 10; -1; -10$$

– Přirození dělitelé čísla 10 jsou čísla

$$1; 2; 5; 10$$

MUNI PED

Relace dělitelnosti

– Věta 1:

Pro libovolná celá čísla a, b, c platí:

- jestliže $b|a$ a zároveň $b|c$, pak také $b|(a+c)$ a $b|(a-c)$ symbolicky $(b|a \wedge b|c) \Longrightarrow (b|(a+c) \wedge b|(a-c))$
- jestliže $b|a$, pak také $(-b)|a$, symbolicky $b|a \Longrightarrow (-b)|a$
- jestliže $b|a$, pak také $b|(-a)$, symbolicky $b|a \Longrightarrow b|(-a)$

MUNI PED

Důkaz věty 1:

- Předpokládejme, že pro libovolná celá čísla a, b, c platí $b|a$ a $b|c$. Podle definice 1 to znamená, že existují celá čísla x_1, x_2 taková, že $a = b \cdot x_1,\ \ c = b \cdot x_2$. Po úpravě dostáváme

$$a + c = b \cdot (x_1 + x_2)$$

$$a - c = b \cdot (x_1 - x_2)$$

Protože součet a rozdíl celých čísel x_1, x_2 je zase celé číslo, platí

$$b|(a + c), \qquad b|(a - c)$$

- Plyne z možnosti zapsat $-b = (-1) \cdot b$.
- Plyne z možnosti zapsat $-a = (-1) \cdot a$.

MUNI PED

Relace dělitelnosti

Definice 2

Celé číslo dělitelné dvěma se nazývá **sudé číslo**.

Celé číslo, které není dělitelné dvěma (dává při dělení dvěma zbytek 1), se nazývá **liché číslo**.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 2

Dokažte, že

a) součet libovolného sudého čísla a libovolného lichého čísla je liché číslo;

b) součin libovolných dvou lichých čísel je liché číslo;

c) součin libovolného sudého čísla s libovolným lichým číslem je sudé číslo.

Příklad 3

Určete vlastnosti relace „dělitelnost celých čísel“ a tvrzení zdůvodněte.

Příklad 4

Jsou dána čísla *a, b*, pro která platí, že *a* je dělitelné osmi a *b* je dělitelné šesti. Dokažte, že jejich součin je dělitelný číslem 24.

Relace dělitelnosti - příklady

Příklad 5

Dokažte, že

a) součet tří po sobě jdoucích celých čísel, z nichž prostřední je sudé, je dělitelný šesti;

b) součet každých tří po sobě jdoucích mocnin čísla 2 (počínaje 2^1) je dělitelný 7;

c) druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o 1 je dělitelná 8.

MUNI PED