MUNI
PED

Aritmetika 2 – jaro 2021

4. prezentace

Mgr. Helena Durnová, Ph.D.
RNDr. Petra Bušková

Největší společný dělitel

Jak už název napovídá, největší společný dělitel dvou přirozených čísel je ten největší ze všech společných dělitelů.
Např. čísla 50 a 60 mají následující společné dělitele: 1, 2, 5, 10
Největší z těchto společných dělitelů je číslo 10. Formálně řečeno:

Hledání největšího společného dělitele

Největšího společného dělitele dvou přirozených čísel lze najít třemi způsoby:

(a) využitím definice;

(b) pomocí tzv. Eukleidova algoritmu;

(c) pomocí rozkladu na součin prvočinitelů.

Hledání s využitím definice lze použít u malých čísel, u větších je spíše neobratné.

Hledání pomocí rozkladu na prvočísla se učí na ZŠ.

Eukleidův algoritmu nabízí silný nástroj pro hledání největšího společného dělitele.

Příklad

Příklad: *Určete množinu všech společných dělitelů čísel 24 a 30 a největší společný dělitel čísel 24 a 30.*

Řešení: Číslo 24 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Číslo 30 je dělitelné čísly 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Množina všech společných dělitelů čísel 24 a 30 je průnik těchto dvou množin, tj. množina {1, 2, 3, 6}

Největší společný dělitel D(24,30) = 6.

Toto číslo je dělitelné všemi menšími společnými děliteli, tj. platí:

$1 \mid 6$, $2 \mid 6$, $3 \mid 6$, $6 \mid 6$

Věta (Eukleidův algoritmus)

Tím převádíme úkol určit D(a,b) na určení D(*b,z*). To je výhodné, neboť čísla *b* a z jsou menší než čísla *a, b*. **Důkaz** je uveden v ZEA, s. 189. *Na větě 5. je založen postup výpočtu největšího společného dělitele dvou přirozených čísel nazývaný* ***Eukleidův algoritmus.***

Eukleidův algoritmus (řešený příklad)

Příklad: Zjistěte D (268, 80), tj. největšího společného dělitele čísel 268 a 80, pomocí Eukleidova algoritmu.

Řešení:	268 : 80 = 3 neboli	268 = 80 . 3 + 28	(zbytek 28)
D (80, 28):	80 : 28 = 2	80 = 28 . 2 + 24	(zbytek 24)
D (28, 24):	28 : 24 = 1	28 = 24. 1 + 4	(zbytek 4)
D (24, 4):	24 : 4 = 6	24 = 6 . 4	(zbytek 0)

Největší společný dělitel čísel 268 a 80 je číslo 4, tj. poslední nenulový zbytek při postupném dělení.

Rozšíření definice (největšího) společného dělitele na tři a více čísel

Definice 3 (společný dělitel dvou čísel) a Definici 4 (největší společný dělitel dvou čísel D (a, b)) lze rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklad: Hledáme společné dělitele čísel 12, 27 a 36.
Společnými děliteli čísel 12 a 27 jsou čísla 1 a 3; D (12, 27) = 3.
Společnými děliteli čísel 27 a 36 jsou číslo 1, 3 a 9; D (27, 36) = 9.
Společnými děliteli čísel 12 a 36 jsou číslo 1, 2, 3, 4, 6 a 12;
D (12, 36) = 12. Tedy D (12, 27, 36) = 3.

MUNI PED

Čísla soudělná a nesoudělná

Libovolná dvě čísla mají vždy alespoň jednoho společného dělitele. Tím je číslo 1. Pokud jiného společného dělitele nemají, nazývají se **nesoudělná**; v opačném případě se nazývají **soudělná**.

Formálně:

[redacted]

Příklady: čísla soudělná a nesoudělná

Podobně jako Definice 3 a 4 lze Definice 5 a 6 rozšířit na libovolný konečný počet přirozených čísel.

Příklady:

Čísla 4, 7, 6, 9 jsou nesoudělná, protože D(4,7,6,9) = 1

Čísla 8, 12, 32 jsou soudělná, protože D(8, 12, 32) = 4

MUNI PED

Příklady

Příklad 1

Určete všechny přirozené společné dělitele čísel:

a) 60, 36

b) 48, 72, 0

c) 24, -132, 54

Příklad 2

K číslu $a = 51$ najděte číslo b tak, aby $D(a,b) = 17$.

Příklad 3

Najděte dvě přirozená čísla, jejichž součet je 432 a největší společný dělitel je 36.

Příklady

Příklad 4

Největší společný dělitel dvou přirozených čísel je 24. Jedno z nich je dvojnásobkem druhého. Která jsou to čísla?

Příklad 5

Určete pomocí rozkladu na prvočinitele i pomocí Eukleidova algoritmu:

a) D(455, 273)

b) D(360, 504)

c) D(90, 108, 84)

d) D(568, 426, 355)