Sbírka úloh ze SHODNÝCH ZOBRAZENÍ pro studium učitelství 1. stupně základní školy

Leni Lvovská

Říjen 2019

Inspirace je stav, v němž duše živěji vnímá dojmy, chápe a třídí představy, a tedy je i lépe objasňuje. Je stejně nutná v geometrii jako v poezii.

Alexander Sergejevič Puškin (1799 - 1837)[11]

Úvod

Sbírka úloh vznikla jako podpora k výuce geometrie pro studium učitelství prvního stupně základní školy.

Tato sbírka nabízí studentům soubor řešených příkladů i množství dalších cvičení specificky vybraných pro téma *Shodná zobrazení*, kde v podobném rozsahu studijní materiály chybí a studenti jsou nuceni vybírat si úlohy z několika různých zdrojů. V rámci úloh je předloženo i množství didaktických nápadů vedoucích k podpoře geometrické představivosti, mimo jiné je zapojena stavebnice Geomag.

Současně tento text poukazuje v některých předložených příkladech a cvičeních na propojení geometrie s ostatními předměty a především se světem kolem nás, čímž je zahrnut nejnovější trend mezipředmětovosti. Nechybí ani náročnější konstrukční či důkazové úlohy.

K tvorbě většiny obrázků byl použit výukový software GeoGebra, ve kterém lze úlohy řešit i dynamicky. Je tedy snadné použít výukový software GeoGebra také přímo ve výuce nebo při samostatném řešení úloh. Na vybrané dynamické aplety a krokované konstrukce jsou u konkrétních konstrukcí uvedeny přímé odkazy.

Tento text vznikl s podporou projektu MUNI/FR/1193/2018, Inovace čtyř předmětů Geometrie pro učitelství 1. stupně základní školy se stavebnicí Geomag a výukovým softwarem Geogebra na Pedagogické fakultě MU v Brně.

1 Základní vlastnosti shodných zobrazení

Zobrazení v rovině je předpis, který každému bodu X roviny připisuje právě jeden bod X' roviny. Bod X se nazývá vzor, bod X' se nazývá obraz.
Shodné zobrazení je v geometrii takové zobrazení mezi Euklidovskými prostory, které zachovává vzdálenost. Shodné zobrazení prostoru do sebe se nazývá shodnost.

- Shodné zobrazení zachovává vzdálenost, tj. pro libovolné dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $XY \cong X'Y'$.
- Složením shodných zobrazení vznikne opět shodné zobrazení.
- Shodné zobrazení je prosté (injekce).
- Pro každé shodné zobrazení je inverzní zobrazení opět shodné.
- Identita je shodné zobrazení.
- Všechny shodnosti euklidovského prostoru tvoří s operací skládání zobrazení grupu shodností, tzv. euklidovskou grupu.
- Jsou-li A, B, C a A', B', C' dvě trojice bodů neležících v přímce a platí-li $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $AC \cong A'C'$, pak existuje jediné hodné zobrazení v rovině, v němž je obrazem bodu A bod A', bodu B bod B' a bodu C bod C' (tzv. věta o určenosti shodného zobrazení v rovině).

V tomto textu se budeme zabývat pouze shodnostmi v rovině.

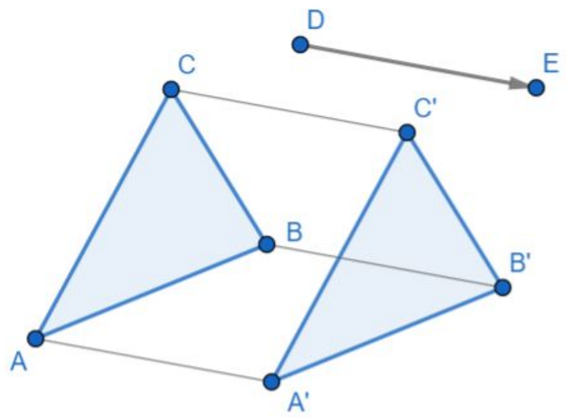
2 Základní druhy shodností v rovině

Pro ujasnění pojmů, které používáme v úlohách, uvádíme přehled základních shodností v rovině a jejich vlastností.

posunutí (translace)

Všechny body roviny jsou posunuty stejným směrem o stejnou vzdálenost směr a vzdálenost jsou dány orientovanou úsečkou, resp. vektorem posunutí. Dané posunutí je vektorem posunutí určeno jednoznačně.

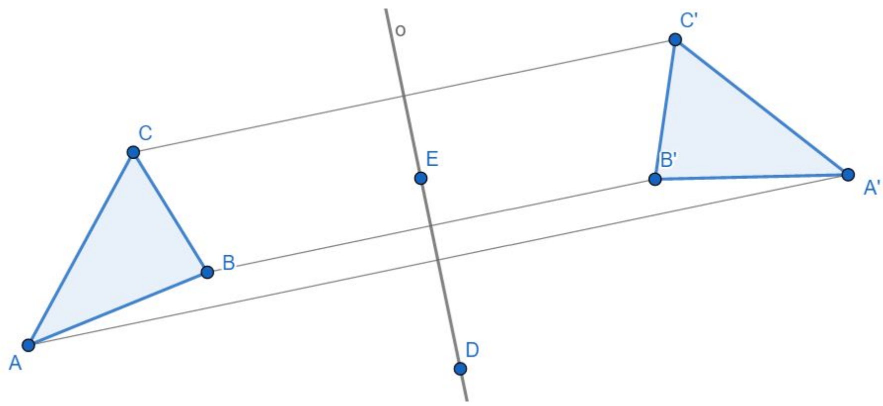
$$\mathcal{T}(\overrightarrow{DE}) : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$$



osová souměrnost (zrcadlení, osová symetrie)

Zobrazení dané osou souměrnosti, která dělí rovinu na dvě poloroviny. Odpovídající si body leží na kolmici k ose souměrnosti v opačných polorovinách a ve stejné vzdálenosti od osy.

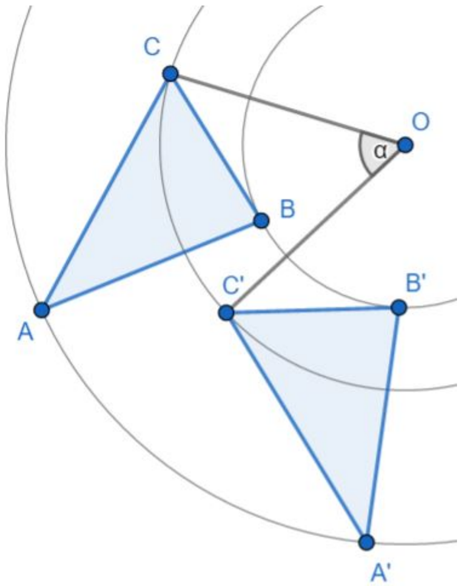
$$\mathcal{O}(\leftrightarrow DE) : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$$



otočení (rotace)

Všechny body roviny jsou otočeny kolem pevně daného bodu (středu otočení) stejným směrem o stejný úhel (úhel otočení).

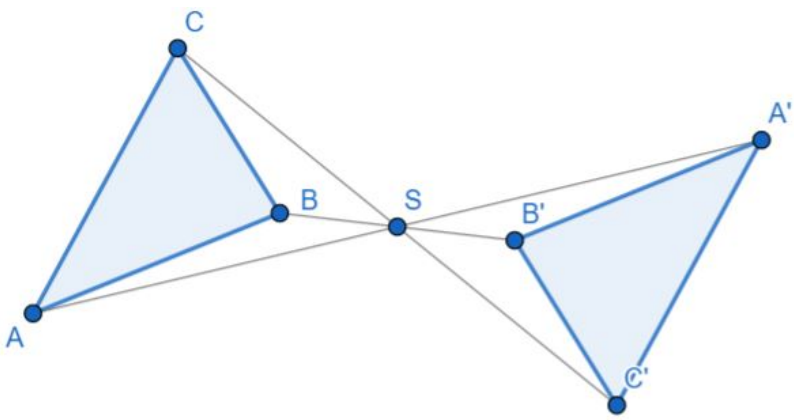
$$\mathcal{R}(O,\alpha) : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$$



středová souměrnost (středová symetrie)

Středová souměrnost v rovině je zvláštní případ otočení - otočení kolem středu souměrnosti o 180 stupňů.

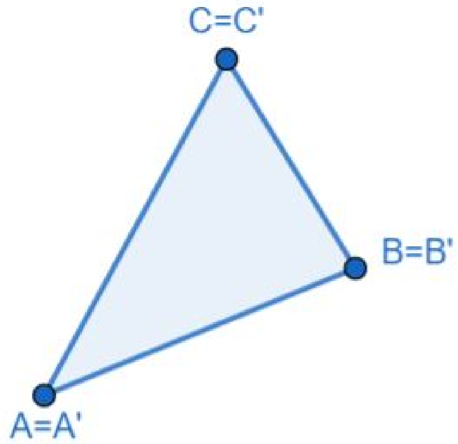
$$\mathcal{S}(S) : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$$



totožnost (identita)

Zobrazení, které každý bod zobrazuje na sebe sama. Lze ji považovat za posunutí o úsečku nulové délky nebo za otočení o nulový úhel.

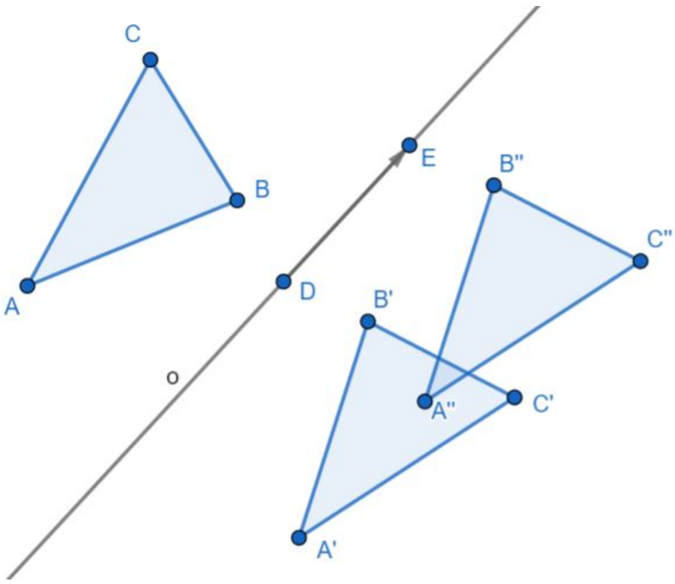
$$\mathcal{I}\lceil : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$$



posunutá (osová) souměrnost

Složení osové souměrnosti a posunutí ve směru osy.

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{DE})\mathcal{O}(o) : \triangle ABC \mapsto \triangle A''B''C''$$



Příklad 2.1. Uvedené základní shodnosti v rovině rozdělte na shodnosti přímé, tj. shodnosti zachovávající orientaci, a shodnosti nepřímé, tj. shodnosti nezachovávající orientaci.

Řešení: Přímé shodnosti - posunutí, otočení středová souměrnost, totožnost. Nepřímé shodnosti - osová souměrnost, posunutá osová souměrnost.

Příklad 2.2. Která z velkých tiskacích písmen abecedy A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z lze zakreslit tak, že jsou osově souměrná? Rozdělte písmena do skupin podle počtu os souměrnosti.

Řešení: 1 osa - A, B, C, D, E, K, M, T, U V, W, Y; 2 osy - H, I, X, O.

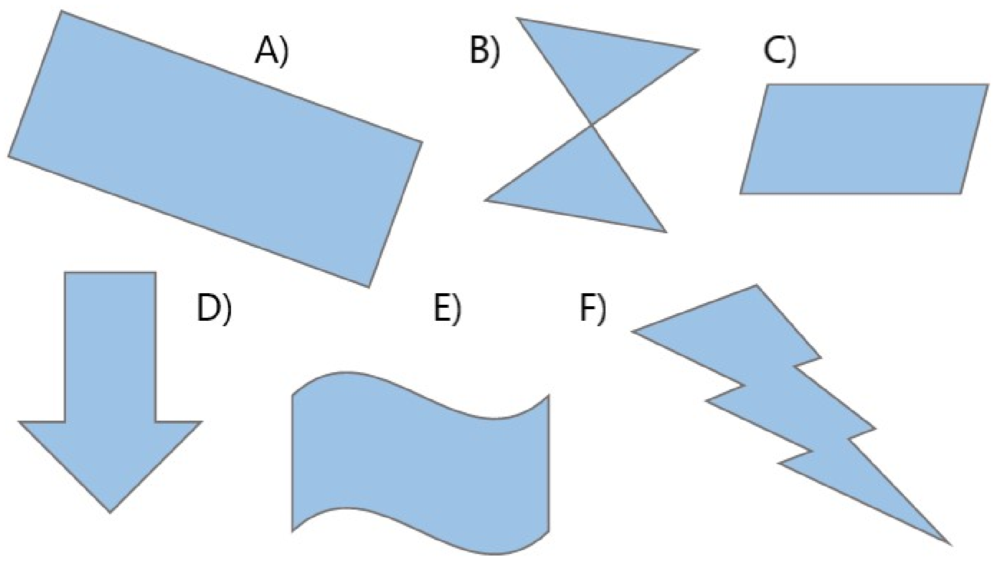
Příklad 2.3. Na obrázku je nakresleno šest rovinných útvarů:

a) Které z útvarů na obrázku níže jsou osově souměrné?

b) U osově souměrných útvarů určete všechny jejich osy souměrnosti.

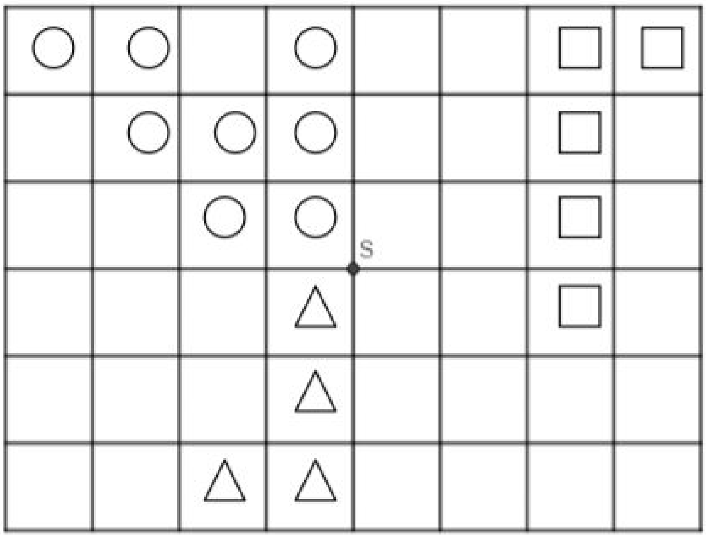
c) Načrtněte rovinný útvar, který má právě čtyři osy souměrnosti.

c) Načrtněte rovinný útvar, který má nekonečně mnoho os souměrnosti.



Řešení: A) 2 osy souměrnost, B) 2 osy souměrnosti, D) jedna osa souměrnosti. Čtyři osy souměrnosti má např. čtverec. nekonečně mnoho os souměrnosti má např. kruh.

Cvičení 2.4. Dokresli obrázek tak, aby byl středově souměrný podle středu S.

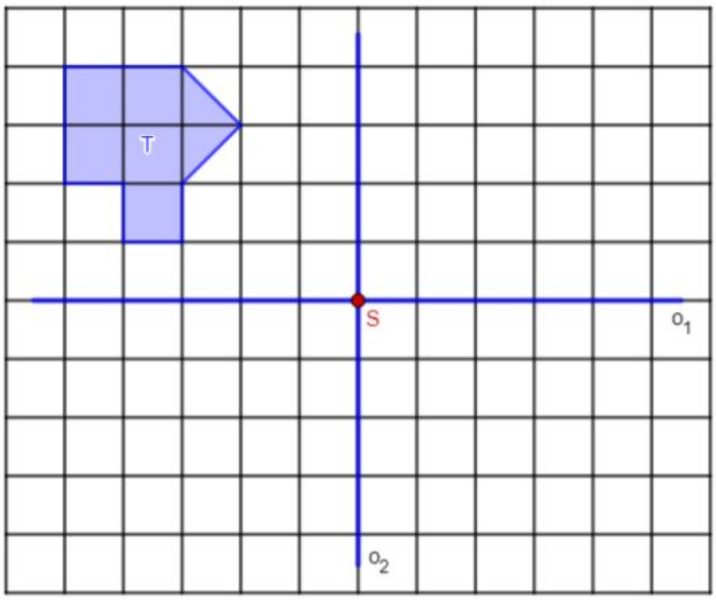


Cvičení 2.5. Ve čtvercové síti přerýsuj útvar T:

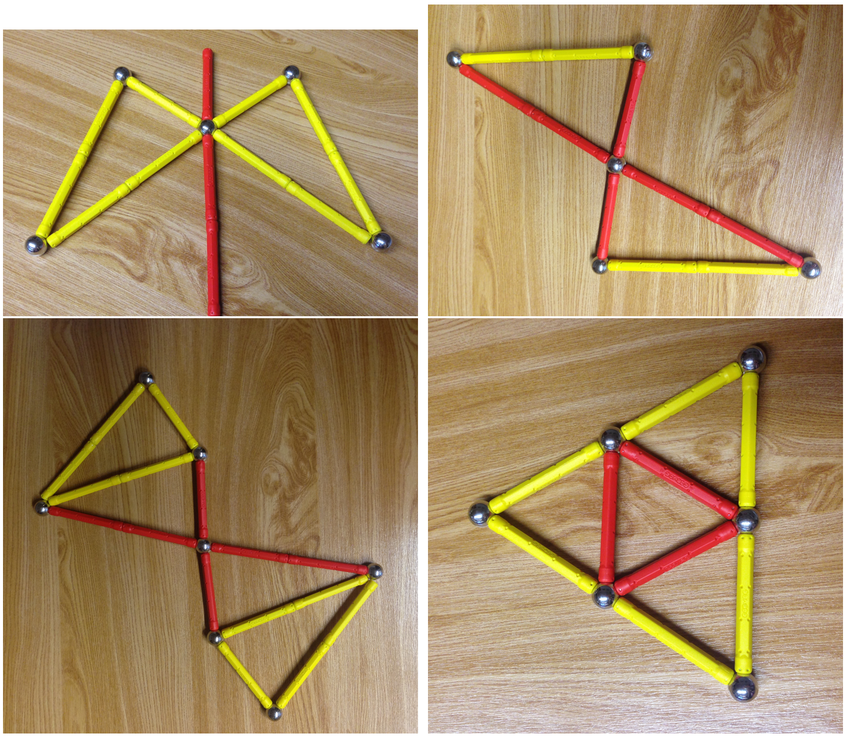
a) v osové souměrnosti podle osy o_1 a pojmenuj ho T_1,

b) v osové souměrnosti podle osy o_2 a pojmenuj ho T_2,

c) ve středové souměrnosti podle středu S a pojmenuj ho T_3,



Cvičení 2.6. Diskutujte nad danými obrázky. Jaká zobrazení a modely demonstrují? Jaké jsou určující prvky a samodružné body těchto zobrazení? Vytvořte podobné modely.



Cvičení 2.7. Sestrojte obraz úsečky AB v osové souměrnosti s osou o, která:

a) protíná úsečku AB v jednom bodě, který není totožný s jejím krajním bodem,

b) protíná úsečku AB ve středu a je na ni kolmá,

c) je rovnoběžná s úsečkou AB,

d) protíná úsečku AB v bodě B a není kolmá k úsečce AB.

Cvičení 2.8. Kolik os souměrnosti má každá : a) úsečka b) polopřímka c) přímka

Cvičení 2.9. Sestrojte obraz kružnice k v osové souměrnosti s osou o, která:

a) prochází středem S kruhu K,

b) prochází mimo kruh K,

c) prochází kruhem K, ale neprochází jeho středem.

Cvičení 2.10. Je dán libovolný čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte čtyřúhelník k němu osově souměrný tak, aby v této souměrnosti byl vrcholu A přiřazen bod A', který je totožný se středem strany BC.

Cvičení 2.11. Které z následujících útvarů jsou středově souměrné:

a) úsečka,

b) polopřímka,

c) obdélník,

d) kružnice,

e) čtverec,

f) kosočtverec,

g) obdélník,

h) rovnoběžník,

i) trojúhelník, jehož strany mají různou velikost,

j) rovnostranný trojúhelník,

k) rovnoramenný trojúhelník.

Načrtněte obrázky a v kladném případě určete střed souměrnosti.

Cvičení 2.12. Ve středové souměrnosti určené bodem S sestrojte obraz úsečky AB, kde střed souměrnosti

a) neleží na přímce AB,

b) je totožný s bodem A,

c) leží na úsečce AB, $S \neq A \neq B$.

Cvičení 2.13. Narýsujte úhel AVB o velikosti 45° . Sestrojte jeho obraz ve středové souměrnosti se středem a) V, b) A, c) $S \notin \sphericalangle AVB$.

Cvičení 2.14. V otočení určeném bodem S a úhlem $\beta = 45°$ sestrojte obraz úsečky AB, která prochází bodem S.

Cvičení 2.15. V otočení určeném bodem M a úhlem $\gamma = 60°$ sestrojte obraz přímky p, která neprochází středem otáčení.

Cvičení 2.16. V otočení určeném bodem R a úhlem $\sigma = -60^\circ$ sestrojte obraz kružnice k.

Cvičení 2.17. Narýsujte libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti:

a) se středem v bodě S, který je střed strany AC,

b) ve které je obrazem bodu A bod B.

Cvičení 2.18. Jsou dány dvě kolmé přímky k a l. Sestrojte jejich obrazy ve středové souměrnosti se středem S, jestliže:

a) S leží na průsečíku přímek k a l,

b) S leží na přímce k a není totožný s průsečíkem přímek k a l.

Cvičení 2.19. Jsou dány dvě kolmé přímky a a b. Určete posunutí $\mathcal{T}$, které zobrazí přímky a a b na přímky přímky a' a b' tak, aby prusečíky přímek a, b, a' a b' tvořily

a) čtverec,

b) obdélník.

Cvičení 2.20. Jsou dány tři různé body A, B, C, které neleží v přímce. V osunutí určeném orientovanou úsečkou AB sestrojte obraz:

a) úsečky AC,

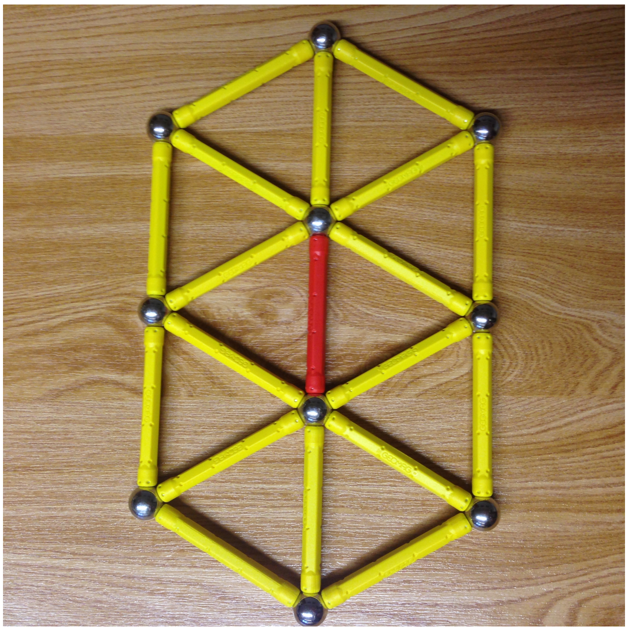
b) přímky BC,

c) přímky AB.

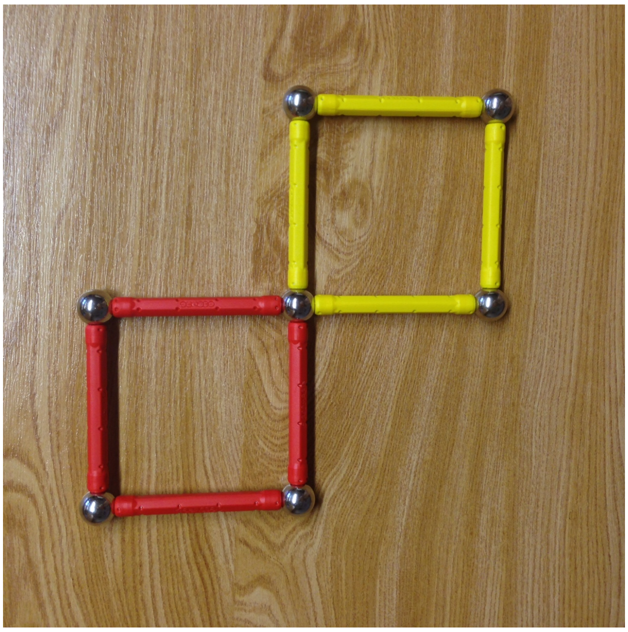
Cvičení 2.21. Je dán čtverec $ABCD$, $a = 5\,\text{cm}$. Bod S je průsečík úhlopříček čtverce. Sestrojte kružnici k, která je určena bodem S a poloměrem $2\,\text{cm}$. Bod X leží na polopřímce AS, $|AX| = 8\,\text{cm}$. Obrazec otočte podle bodu A o úhel 45°.

Cvičení 2.22. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a jeho obraz $A'B'C'D'E'F'$ v posunutí určeném orientovanou úsečkou SD, kde S je střed souměrnosti šestiúhelníku $ABCDEF$.
Jaký útvar vznikne sjednocením šestiúhelníku $ABCDEF$ a šestiúhelníku $A'B'C'D'E'F'$? Úlohu modelujte s využitím stavebnice Geomag.

Řešení:
Sjednocením šestiúhelníku $ABCDEF$ a šestiúhelníku $A'B'C'D'E'F'$ vznikne šestiúhelník, ale nejedná se o pravidelný šestiúhelník. V modelu je červenou komponentou vyznačena orientovaná úsečka SD.



Cvičení 2.23. Určete všechna shodná zobrazení, která převedou žlutý čtverec na červený. Nakreslete obrázky i s odpovídajícím popisem vrcholů čtverců ke každému zobrazení.



Příklad 2.24. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, $|AB| = 2|CD|$, $AB \parallel CD$, S je střed úsečky AB. Určete shodné zobrazení, které zobrazí:

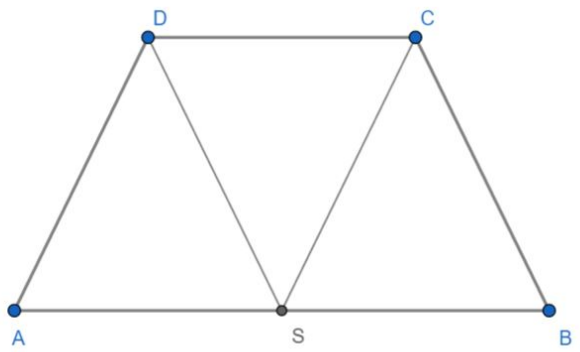
a) $\triangle ASD \mapsto \triangle BSC$,

b) $\triangle ASD \mapsto \triangle SBC$,

c) $\triangle SBC \mapsto \triangle ASD$,

d) $\triangle DCS \mapsto \triangle DCS$,

Řešení:



a) osová souměrnost $\mathcal{O}(\leftrightarrow AB) : \triangle ASD \mapsto \triangle BSC$,

b) posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{AS}) : \triangle ASD \mapsto \triangle SBC$,

c) posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{SA}) : \triangle SBC \mapsto \triangle ASD$,

d) identita $\mathcal{I}d : \triangle DCS \mapsto \triangle DCS$,

Cvičení 2.25. Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Určete shodné zobrazení, které zobrazí:

a) $\triangle ADE \mapsto \triangle BGF$,

b) $\triangle ACD \mapsto \triangle EGH$,

c) $\triangle ACD \mapsto \triangle DEG$,

d) $\triangle ACD \mapsto \triangle GED$,

Příklad 2.26. Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ zobrazte:

a) ve středové souměrnosti se středem D,

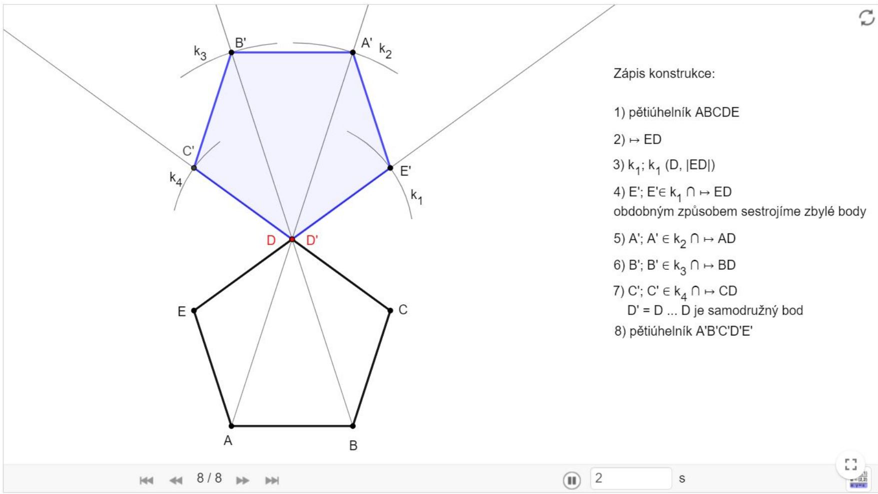
b) v osové souměrnosti s osou AC,

c) v posunutí určeném vektorem CE,

d) v otočení o úhel 60° kolem bodu C.

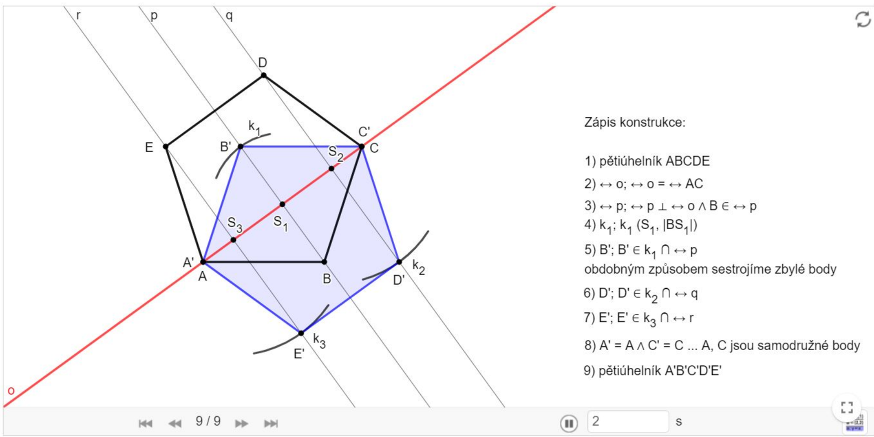
Řešení:

a) Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ ve středové souměrnosti se středem D.



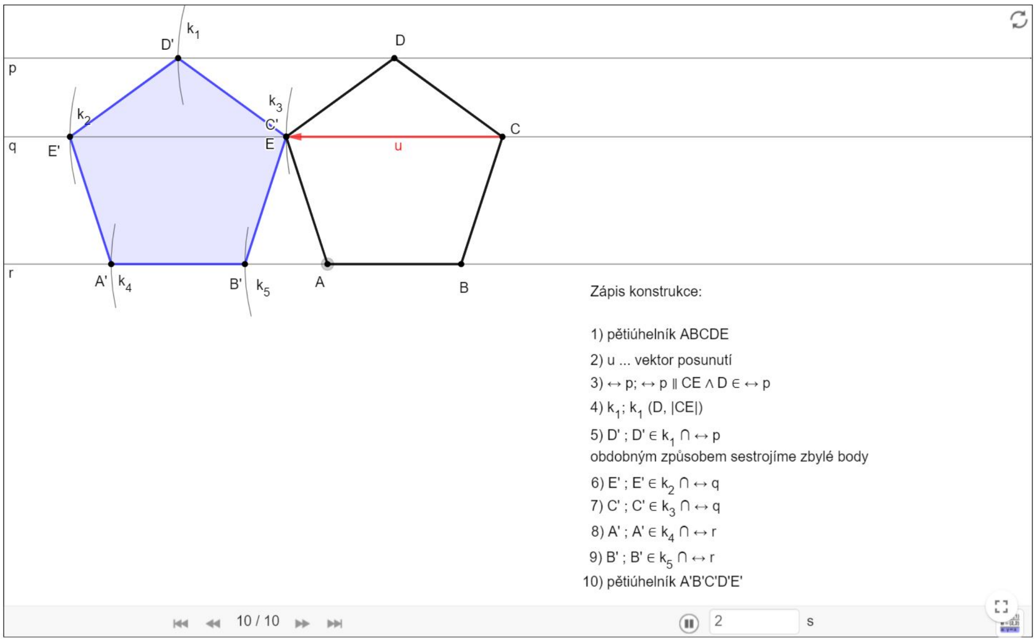
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/kzb9kwdm

b) Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ v osové souměrnosti s osou AC.



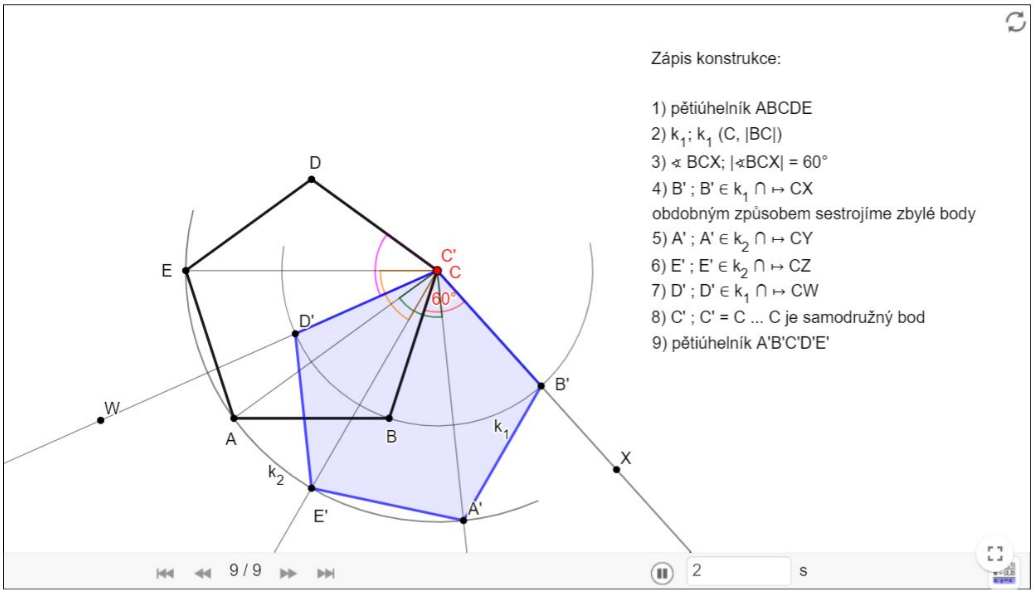
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/xmygytx8

c) Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ v posunutí určeném vektorem CE.



Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/p59bhmen`

d) Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ v otočení o úhel 60° kolem bodu C.



Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/tpjxeurj`

Příklad 2.27. Určete všechny shodnosti, které reprodukují

a) rovnostranný trojúhelník,

b) pravidelný pětiúhelník,

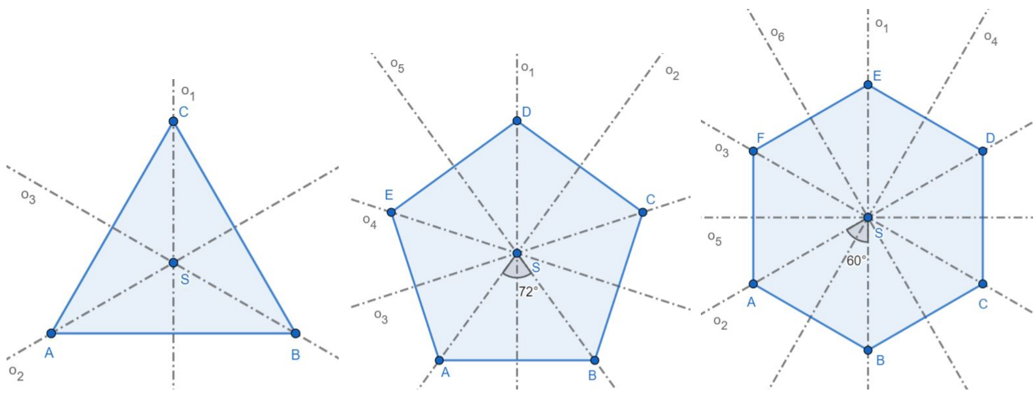
c) pravidelný šestiúhelník.

Řešení: V každé shodnosti, která reprodukuje některý z pravidelných n-úhelníků, je zřejmě střed kružnice tomuto n-úhelníku opsané samodružným bodem. Užitím vlastností pravidelných n-úhelníků a shodností v rovině dostaneme následující výsledky:

a) Pro rovnostranný trojúhelník existuje 6 shodností, které ho reprodukují: $\mathcal{I}d$, $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$, $\mathcal{O}_3(o_3)$, $\mathcal{R}_1(S, 120°)$, $\mathcal{R}_2(S, 240°)$, tj. identita, tři osové souměrnosti s osami v osách jeho stran, dvě rotace se středem ve středu kružnice jemu opsané a odpovídajícími úhly.

b) Pro pravidelný pětiúhelník existuje 10 shodností, které ho reprodukují: $\mathcal{I}d$, $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$, $\mathcal{O}_3(o_3)$, $\mathcal{O}_4(o_4)$, $\mathcal{O}_5(o_5)$, $\mathcal{R}_1(S, 72°)$, $\mathcal{R}_2(S, 144°)$, $\mathcal{R}_3(S, 216°)$, $\mathcal{R}_4(S, 288°)$, tj. identita, pět osových souměrností s osami v osách jeho stran, čtyři rotace se středem ve středu kružnice jemu opsané a odpovídajícími úhly.

c) Pro pravidelný šestiúhelník existuje 12 shodností, které ho reprodukují: $\mathcal{I}d$, $\mathcal{S}(S)$, $\mathcal{O}_1(o_1)$, $\mathcal{O}_2(o_2)$, $\mathcal{O}_3(o_3)$, $\mathcal{O}_4(o_4)$, $\mathcal{O}_5(o_5)$, $\mathcal{O}_6(o_6)$, $\mathcal{R}_1(S, 60°)$, $\mathcal{R}_2(S, 120°)$, $\mathcal{R}_3(S, 240°)$, $\mathcal{R}_4(S, 300°)$, tj. identita, středová souměrnost, šest osových souměrností – tři s osami v osách jeho stran a tři s osami procházejícími dvojicemi protějších vrcholů, čtyři rotace se středem ve středu kružnice jemu opsané a odpovídajícími úhly.

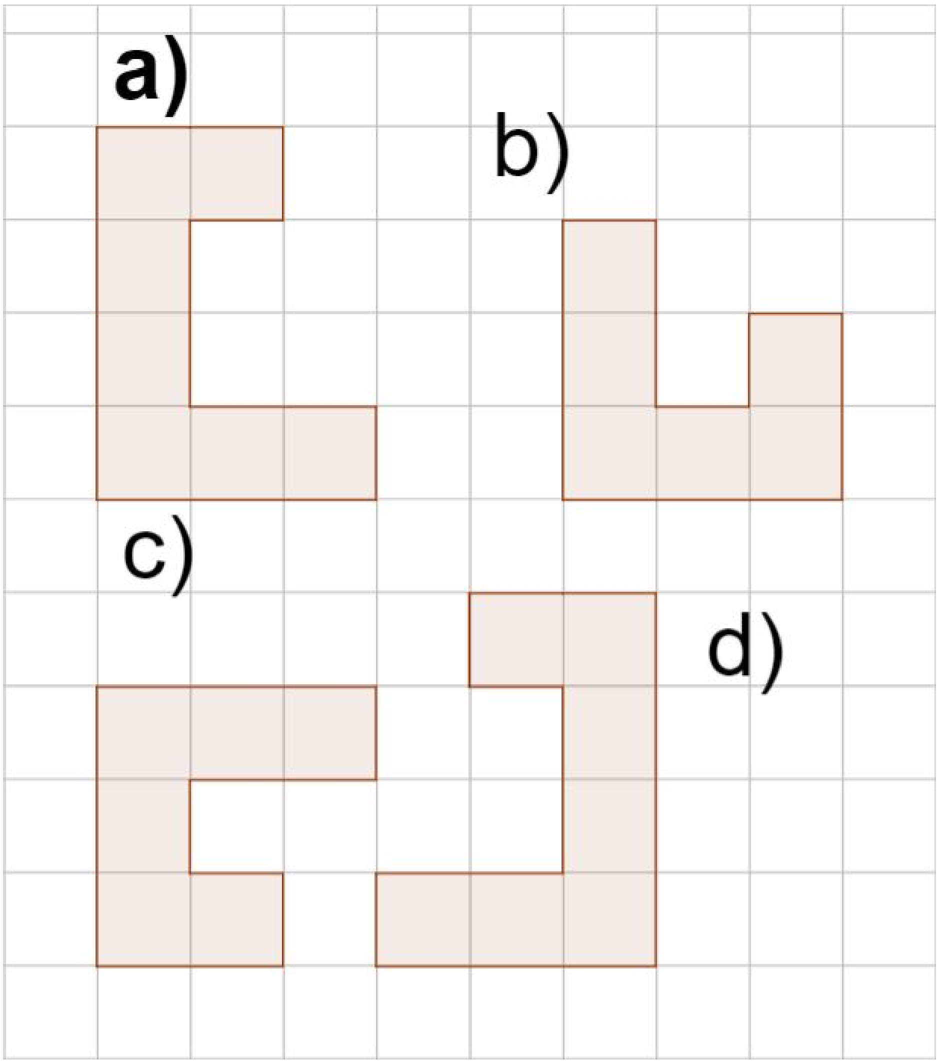


Cvičení 2.28. Na obrázku jsou zobrazeny ve čtvercové síti čtyři útvary.

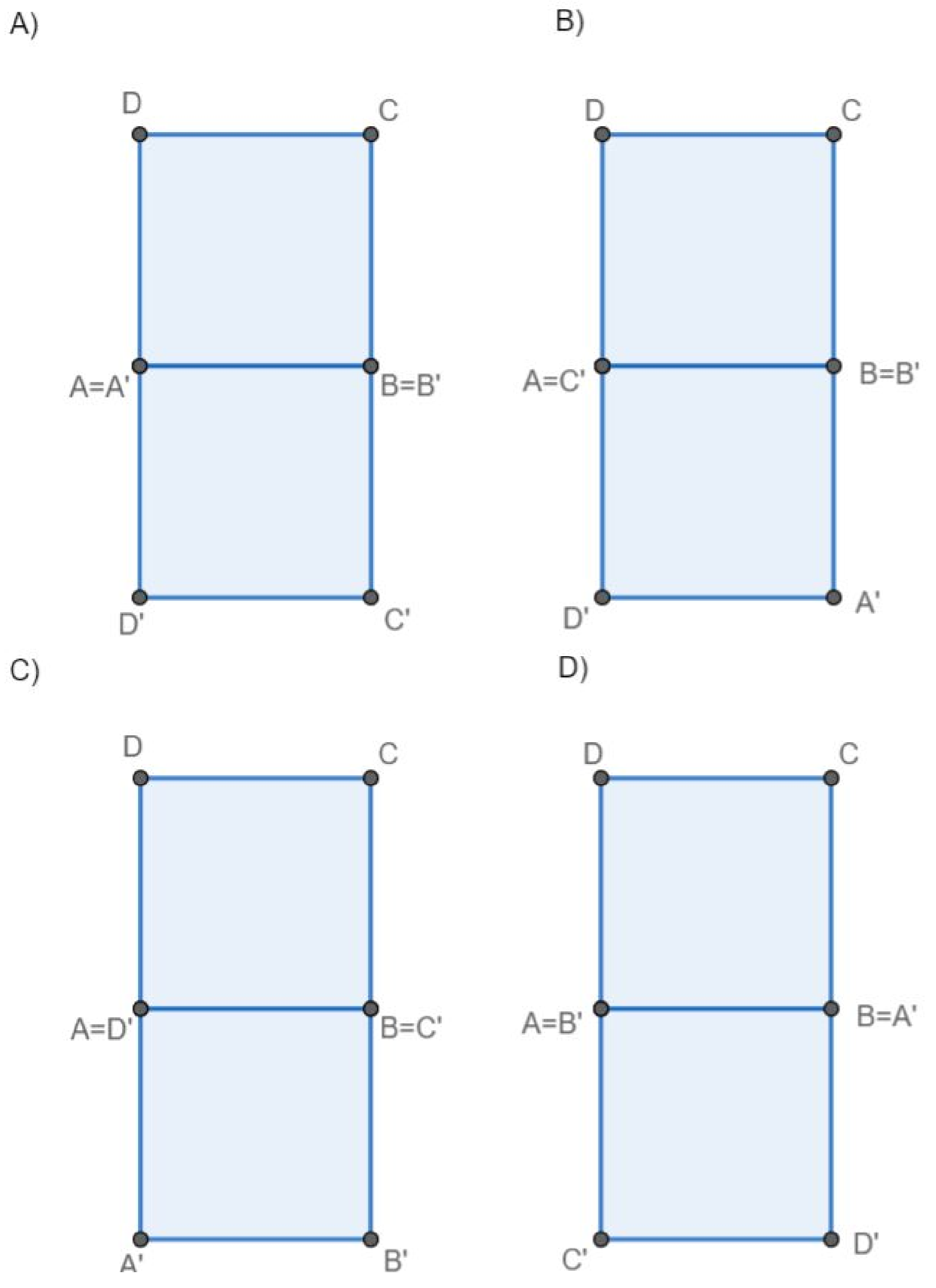
a) Rozhodněte, mezi kterými útvary na obrázcích existuje shodé zobrazení.

b) U nalezených shodností určete, zda se jedná o shodnost přímou nebo nepřímou.

c) Určete typ shodnosti a její určující prvky.



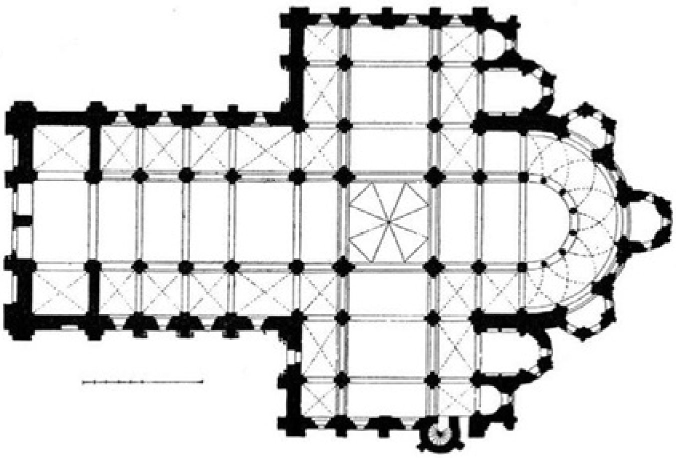
Příklad 2.29. Určete zobrazení, které převádí čtverec $ABCD$ na čtverec $A'B'C'D'$. U každého zobrazení zapište i jeho určiújící prvky.



Řešení: A) osová souměrnost s osou AB, B) otočení se středem v bodě B o $90°$, C) posunutí o vektor $\overrightarrow{DA}$, D) středová souměrnost se středem ve středu úsečky AB.

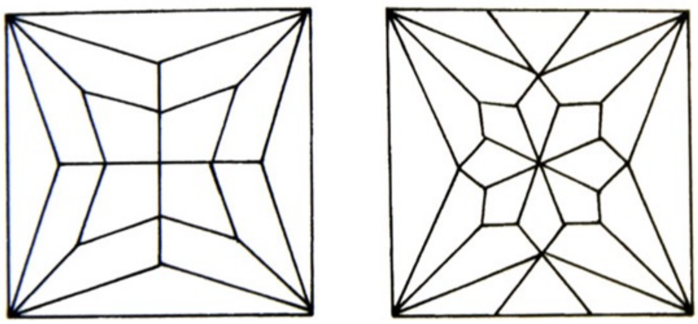
Cvičení 2.30. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby $|AB| = |BD|$. Určete všechna shodná zobrazení v rovině, ve kterých je obrazem rovnostranného trojúhelníka ABD druhý trojúhelník tvořící spolu s trojúhelníkem ABD kosočtverec $ABCD$.

Příklad 2.31. Na obrázku je půdorys románského kostela Sainte Foy v Conques ve Francii. Najdi na obrázku shodná zobrazení a zakresli je, tj. např. zvýrazni části zobrazené a) v posunutí, b) v otočení, c) ve středové souměrnosti a d) v osové souměrnosti.



Řešení: V příloze na konci textu.

Příklad 2.32. Na obrázku je hvězdová klenba renesančního zámku Náměšť na Hané. Na obou obrázcích klenby najděte všechny osy souměrnosti a vyznačte střed souměrnosti. Zkuste navrhnout vybarvení obrázku tak, aby v obrázku byly: a) 1 osa souměrnosti, b) 2 osy, c) 3 osy a d) 4 osy souměrnosti.



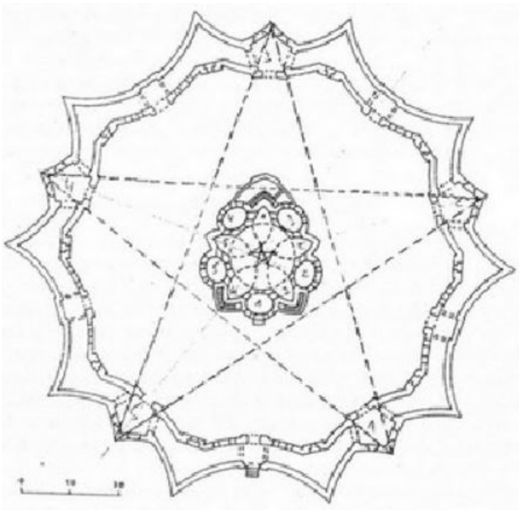
Řešení: Příklad vybarvení první klenby v příloze na konci textu.

Cvičení 2.33. Na obrázku je půdorys kostela sv. Jana Nepomuckého na Zelené hoře ve tvaru pěticípé hvězdy:

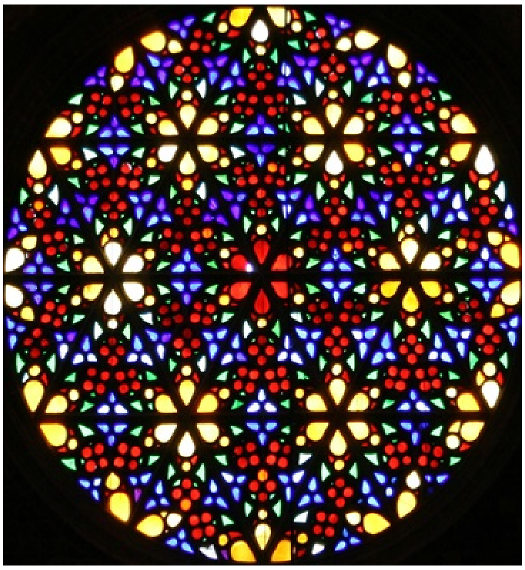
a) Najděte všechny osy souměrnosti.

b) Určete rotaci, kterou je třeba použít, aby se jeden cíp hvězdy přesunul na místo vedlejšího cípu?

c) Zvolte si jednu osu a podle ní, půdorys vybarvěte tak, aby byl osově souměrný.



Cvičení 2.34. Na obrázku je rozeta Katedrály La Seu na Mallorce. Najděte v ní posunutí, otočení, středovou a osovou souměrnost.

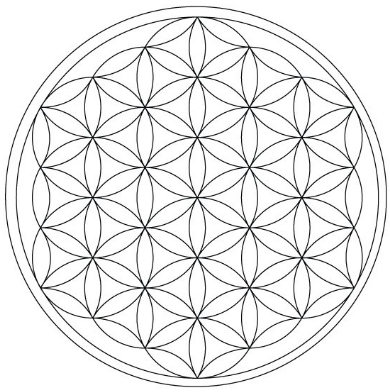


Cvičení 2.35. Na obrázku je mandala známá jako *Květ života*.

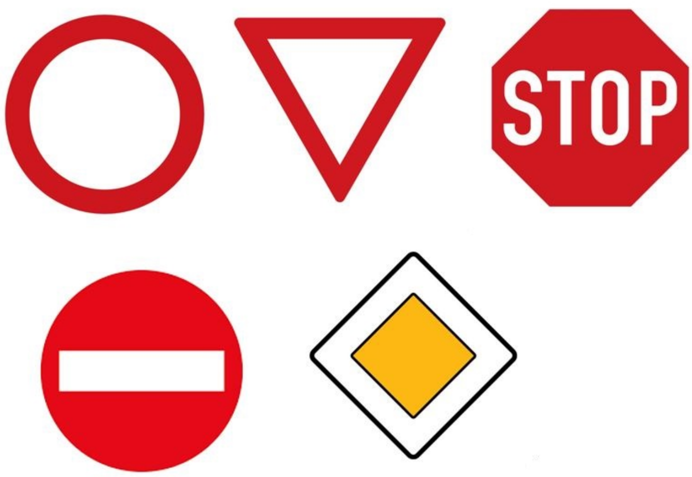
a) Najděte všechny osy souměrnosti.

b) Vybarvěte mandalu tak, aby se počet os souměrnosti změnil na 2.

c) Lze vybarvit mandalu tak, aby byla středově souměrná, ale nebyla osově souměrná? Zdůvodněte.



Příklad 2.36. Pojmenujte dopravní značky na obrázku a určete u nich počet os souměrnosti. Za domácí úkol nafoťte na cestách další značky a rozdělte je do skupin podle počtu os souměrnosti.



Řešení: Zákaz vjezdu všech vozidel (v obou směrech) - nekonečně mnoho os, Dej přednost v jízdě - 3 osy, Stop, dej přednost v jízdě - 0 os, Zákaz vjezdu v jednom směru - 2 osy, Hlavní silnice - 4 osy.

3 Skládání shodností

Příklad 3.1. Doplňte korektně následující tvrzení:

1. Složením (dvou) posunutí je......................
2. Složením dvou středových souměrností je ....
3. Složením dvou otočení se stejným středem je ....
4. Složením dvou osových souměrností se stejnou osou je................
5. Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je ....
6. Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami je ....

Ke každému tvrzení načrtněte vhodný obrázek.

Řešení: 1) Složením (dvou) posunutí je *posunutí*. 2) Složením dvou středových souměrností je *posunutí*. 3) Složením dvou otočení se stejným středem je *otočení se stejným středem*. 4) Složením dvou osových souměrností se stejnou osou je *identita*. 5) Složením dvou osových souměrností s různými rovnoběžnými osami je *posunutí*. 6) Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami je *otočení kolem průsečíku os*.

Cvičení 3.2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a body S_1, S_2, S_3 jsou po řadě středy jeho stran AB, BC, CD. Určete obraz trojúhelníka ABC v zobrazení $F = \mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_3$, kde $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ jsou středové souměrnosti se středy po řadě v bodech S_1, S_2, S_3. Určete výsledné zobrazení F.

Cvičení 3.3. Čtverec $ABCD$ zobrazte nejdříve v posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{CD})$ a výsledný obraz $A'B'C'D'$ potom v otočení $\mathcal{R}$ se středem otáčení D o úhel $90°$. Určete výsledné složené zobrazení $f = \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.

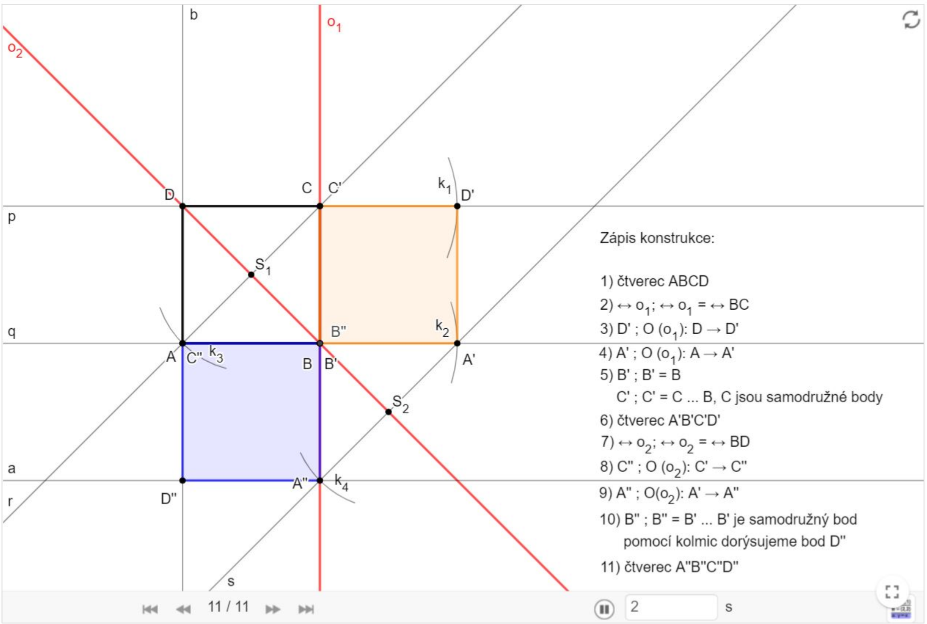
Cvičení 3.4. Kosočtverec $ABCD$ zobrazte nejdříve v osové souměrnosti $\mathcal{O}$ s osou DC a výsledný obraz $A'B'C'D'$ potom v otočení $\mathcal{R}$ se středem otáčení C o úhel $\alpha = |\sphericalangle DCB|$. Určete výsledné složené zobrazení $f = \mathcal{R} \circ \mathcal{O}$.

Příklad 3.5. Čtverec $ABCD$ zobrazte nejdříve v osové souměrnosti $\mathcal{O}_1$ s osou BC a výsledný obraz $A'B'C'D'$ potom v osové souměrnosti $\mathcal{O}_2$ s osou BD. Určete výsledné složené zobrazení $f = \mathcal{O}_2 \circ \mathcal{O}_1$.

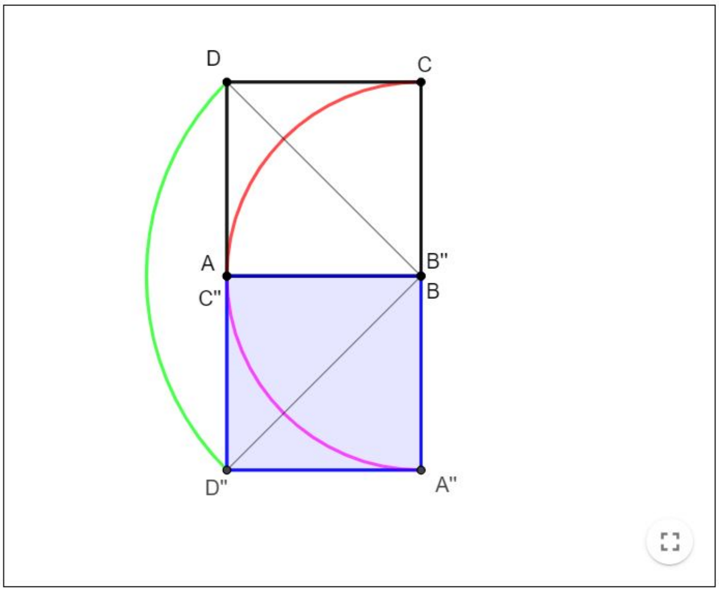
Řešení: Bod B má výsledný obraz B'' na stejném místě. Z čehož plyne, že výsledné zobrazení může být buď středová souměrnost nebo otočení.

Náhledem na polohu vzoru a obrazu vidíme, že o středovou souměrnost se nejedná. Musí tedy jít o rotaci a zbývá vyřešit o kolik stupňů a v jakém směru. Po spojení vzorů a obrazů (barevné části kružnic) snadno nahlédneme, že došlo k rotaci o 90° proti směru hodinových ručiček.

Výsledné zobrazení je tedy $\mathcal{R}(B, +90°)$.



Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/p59bhmen`



Cvičení 3.6. Je dána dvojice shodných trojúhelníků ABC a KLM. Sestrojte dvojici osových souměrností tak, aby vzniklé složené zobrazení zobrazilo trojúhelník KLM do trojúhelníku ABC.

Nápověda: Použijte dvojici osových souměrností. První souměrnost zvolte tak, aby se jeden zvolený bod trojúhelníku KLM zobrazil do odpovídajícího bodu trojúhelníku ABC, (využijte toho, že dvojice vzor - obraz jednoznačně definuje osovou souměrnost).

Druhou souměrnost zvolte tak, aby se trojúhelník zobrazený první osovou souměrností zobrazil do trojúhelníku ABC.

4 Důkazové úlohy

Příklad 4.1. Nechť ve shodném zobrazení v rovině je obrazem bodu A bod A', bodu B bod B' a bodu C bod C'. Dokažte, že platí: leží-li bod C mezi body A, B, leží bod C' mezi body A', B'.

Řešení: Z definice shodného zobrazení v rovině plyne pro body A, B, C a jejich obrazy A', B', C' platnost následujících vztahů:

$$A'C' \cong AC, \quad B'C' \cong BC, \quad A'B' \cong AB \tag{1}$$

Figure 1

Leží-li bod C mezi body A, B, platí $AC + CB = AB$. Vhledem k (1) platí též $A'C' + C'B' = A'B'$, tj. bod C' ležé mezi body $A'B'$.

Dokazované tvrzení plyne též z věty, která říká, že ve shodném zobrazení v rovině je obrazem úsečky AB úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB.

Uvedený důkaz je částí důkazu této věty.

Příklad 4.2. Z je shodné zobrazení v rovině, které má dva různé samodružné body. Má toto zobrazení ještě samodružné body?

Řešení: Označme uvažované samodružné body A, B a jejich obrazy v daném zobrazení A', B'. Podle zadání je $A = A'$, $B = B'$. Obrazem úsečky AB je tedy úsečka AB. Leží-li bod X mezi body A, B, leží bod X' mezi body A', B', tj. rovněž mezi body A, B a platí $AX \cong AX'$ (též $BX \cong BX'$), tj. $X = X'$. Odpověď na otázku úlohy je tedy kladná. Navíc je zřejmé, že v zobrazení Z je zamodružný každý bod úsečky AB.

Analogickým postupem snadno ukážeme, že samodružné jsou nejen body úsečky AB, ale všechny body přímky AB: Je-li bod Y bodem přímky AB a platí např., že bod B leží mezi body A, Y, pak bnod B leží mezi body A, Y'. Vzhledem k tomu, že $BY' \cong BY'$, je $Y = Y'$.

Podobně postupujeme v případě, že uvažovaný bod přímky AB je bodem polopřímky opačné k polopžímce AB. Shodné zobrazení Z, které má alespoň dva různé samodružné body, má tedy nekonečně mnoho samodružných bodů - samodružné jsou všechny body přímky určené danými dvěma samodružnými body.

Příklad 4.3. Dokažte, že ve shodném zobrazení v rovině, které má tři samodružné body neležící v přímce, je každý bod roviny samodružný, tj. uvažované zobrazení je identitou.

Řešení: Vzhledem k výsledkům příkladu 4.2 je samodružným bodem každý bod přímek AB, BC, AC. Je-li X libovolný bod roviny, který neleží na žádné z těchto přímek, lze vždy sestrojit přímku, která prochází bodem X, je různoběžná alespoň se dvěma z těchto přímek a protíná je ve dvou různých bodech (zdůvodněte). Tyto body (v obr. **??** označeny Y, Z) jsou samodružné, a tedy též bod X je vzhledem k výsledkům příkladu 4.2 samodružný. je tedy každý bod roviny samodružný a uvažované zobrzení je identitou.

Poznámka: Z řešení příkladů 4.2 a 4.3 je zřejmé, že pokud má shodné zobrazení v rovině dva různé samodružné body, je toto zobrazení buď osová souměrnost s osou určenou těmito body, nebo identita (v případě, má-li uvažované zobrazení ještě jeden další samodružný bod neležící na přímce určené danými dvěma samodružnými body).

Příklad 4.4. Jsou dány dva různé body P, P'. Určete alespoň jedno shodné zobrazení, ve kterém je obrazem bodu P bod P'.

Řešení: Vyjdeme-li z vlastností jednotlivých typů shodných zobrazení v rovině, je zřejmé, že bod P' je obrazem bodu P:

a) v osové souměrnosti s osou v ose úsečky PP' (Obr. 2a),

b) ve středové souměrnosti se středem ve středu O úsečky PP',

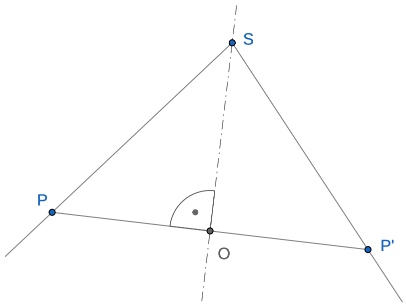
c) v otočení se středem S na ose úsečky PP' a orientovaným úhledm $\sphericalangle PSP'$ (S je lib. bod osy úsečky PP'; je-li $S \in PP'$, tj. $S = 0$, je příslušné otočení středovou souměrností - viz b) (Obr. 2a),

d) v posunutí určeném uspořádanou dvojicí P, P',

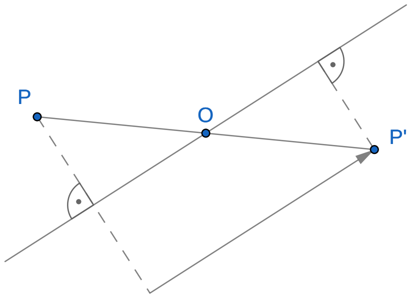
e) v posunuté souměrnosti, složené z osové souměrnosti, jejíž osa o prochází středem úsečky PP', přičemž $o \neq\leftrightarrow PP'$, $o \perp PP'$, a z posunutí ve směru této osy, přičemž velikost posunutí je rovna velikosti pravoúhlého průmětu úsečky PP' do přímky o (Obr. 2b).

Poznámka: Uvědomte si souvislosti výsledků příkladu s větou o určenosti shodného zobrazení v rovině.

Příklad 4.5. Jsou dány dvě shodné kružnice $k_1(S_1, r)$, $k_2(S_2, r)$, které se protínají v bodech X, Y. Určete alespoň jedno shodné zobrazení, ve kterém je obrazem kružnice k_1 kružnice k_2.



(a)



(b)

Figure 2

Řešení: Ve shodném zobrazení je obrazem kružnice $k(S, r)$ opět kružnice s týmž poloměrem r, jejímž středem je obraz bodu S. Obrazem dané kružnice k_1 bude tedy kružnice k_2 v každém shodném zobrazení, v němž je obrazem bodu S_1 bod S_2. K řešení úlohy tedy lze využít výsledků příkladu 4.4.

Příklad 4.6. Ukažte, že složením dvou osových souměrností s kolmými osami vznikne středová souměrnost se středem v průsečíku těchto os.

Řešení: Uvažované osové souměrnosti označme O_1, O_2, jejich osy o_1, o_2, průsečíky těchto os S, Z zobrazení složené z těchto souměrností, tj. $Z = O_1 \circ O_2$. Obraz bodu X v O_1 označme X_1, obraz bodu X_1 v O_2 označme X', tj. obrazem bodu X v Z je bod X'.

Zobrazení Z bude se středovou souměrností se středem S právě tehdy, když pro každý bod X roviny a jeho obraz X' v tomto zobrazení bude bod S středem úsečky XX'.

a) Je-li $X = S$, je $X = X' = S$, neboť S je samodružným bodem zobrazení Z.

b) Nechť $X \in o_1$ a $X \neq S$. Pak je $X = X_1$ a bod S je středem XX'. (Obr. 3)

c) Nechť $X \in o_2$ a $X \neq S$. Pak $X_1 \in o_2$, S je středem XX_1 a $X_1 = X'$. Platí tedy, že S je střed XX'. (Obr. 4)

d) Nechť $X \notin o_1$ a $X \notin o_2$. Pak $X_1 \notin o_2$. Označme X_0 průsečík přímky XX_1 s o_1. Body X, S, X_1 neleží v přímce. Pro thojúhelník XSX_1 platí $XS \cong SX_1$ a o_1 je jeho osa souměrnosti, tj. $\sphericalangle XSX_0 \cong \sphericalangle X_0SX_1$. Označme dále X'' průsečík přímky X_1X' s osou o_2. Body X_1, S, X' také neleží v přímce. Pro trojúhelník X_1SX' platí $X_1S \cong X'S$ a o_2

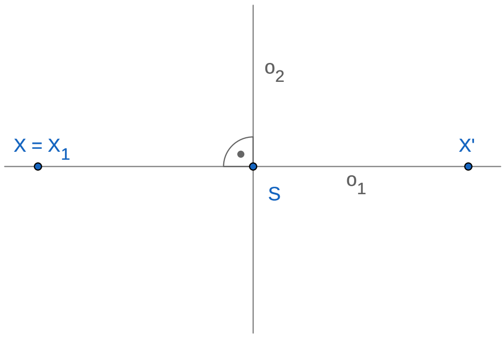


Figure 3

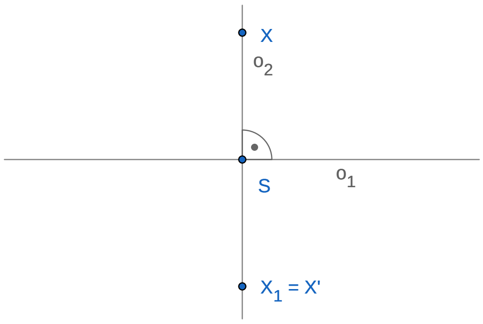


Figure 4

je jeho osa souměrnosti, tj. $\sphericalangle X_1SX'' \cong \sphericalangle X''SX'$. Úhel $\sphericalangle XSX'$ je grafickým součtem úhlů $\sphericalangle XSX_1$, $\sphericalangle X_1SX'$, tj.

$$\sphericalangle XSX' = \sphericalangle XSX_1 + \sphericalangle X_1SX' = 2(\sphericalangle X_0SX_1 + \sphericalangle X_1SX'') = 2R.$$

Úhel XSX' je tedy přímý, což znamená, že body X, S, X' leží v přímce. Dále platí $XS \cong X_1S \cong X'S$, tj. $XS \cong X'S$. Je tedy bod S středem úsečky XX'.

Ve všech případech, které mohou pro polohu libovolného bodu X roviny vzhledem k přímkám o_1, o_2 mohou nastat, tedy dostáváme, že bod S je středem úsečky XX'. Uvažované zobrazení $Z = O_1 \circ O_2$ je tedy středovou souměrností se středem S.

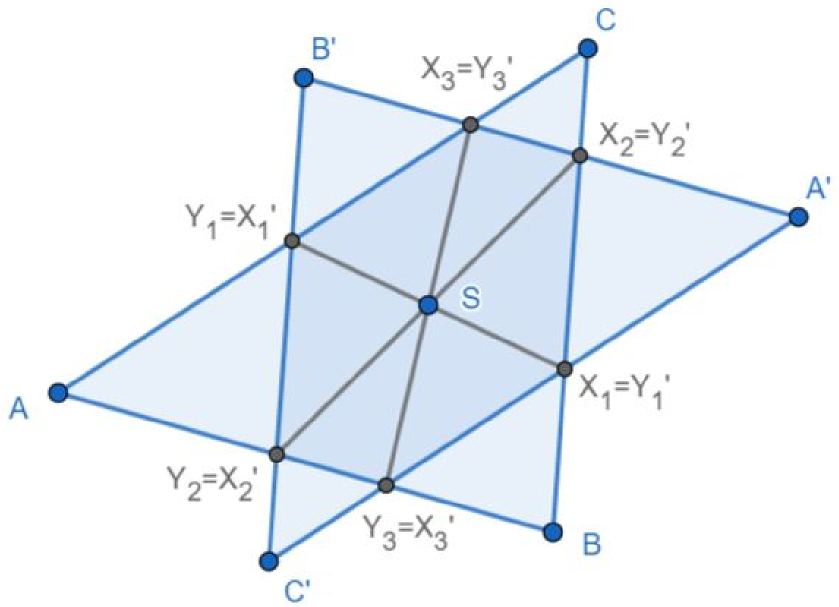
5 Konstrukční úlohy

Příklad 5.1. Je dán bod S ležící uvnitř daného trojúhelníku ABC. Sestrojte příčku XY trojúhelníka ABC, která je bodem S půlena.

Řešení: Krajní body hledané úsečky XY leží na hranici daného trojúhelníku a odpovídají si ve středové souměrnosti se středem S. Tedy:

$$\mathcal{S}(S) : X \mapsto X' = Y.$$

Neznáme jejich polohu, ale známe objekt, na kterém leží vzor i obraz. Zobrazíme tedy ve středové souměrnosti se středem S trojúhelník ABC a tak, kde se protnou hranice vzoru ABC a obrazu $A'B'C'$, budou ležet hledané krajní body příčky.



Závěr: Podle polohy bodu S v trojúhelníku může úloha mít 1, 2 nebo 3 řešení. (Načrtněte si všechny případy.)

Příklad 5.2. Je dána kružnice $k(S; r)$, $r = 3\,\text{cm}$, a bod A tak, že $|SA| = 1,5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které mají délku 5,5 cm a které procházejí bodem A.

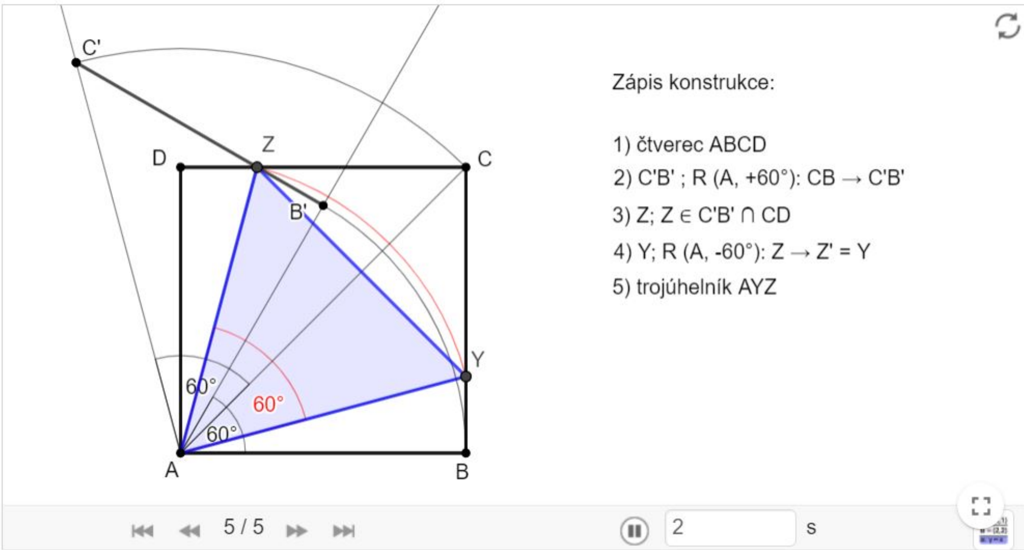
Řešení:

Cvičení 5.3. Je dána úsečka AA_1 délky 5 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí a přitom platí, že velikost strany b je 6 cm a těžnice t_b má velikost 6 cm.

Cvičení 5.4. Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = t_a$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a jejichž další dvě těžnice mají délky t_b a t_c.

Cvičení 5.5. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

Příklad 5.6. Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník AYZ tak, aby $Y \in BC$, $Z \in CD$.

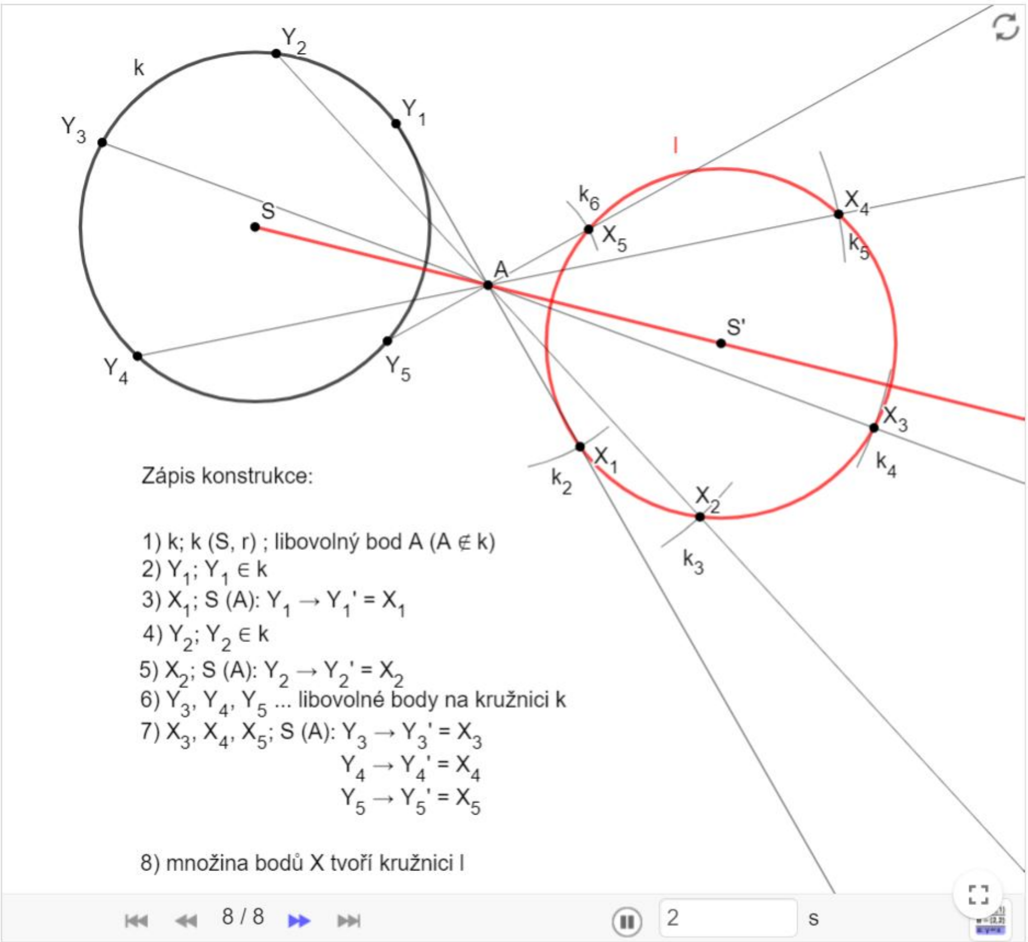


Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/p59bhmen`

Cvičení 5.7. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k(S; 2cm)$, $l(S; 3cm)$ a bod A tak, že $|SA| = 2,3$ cm. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC, pro které platí $B \in k$, $C \in l$.

Cvičení 5.8. Je dána přímka a a bod $A \in a$, dále je dána přímka s, $S \neq a$. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem $S \in s$ a stranou $AB \in a$.

Příklad 5.9. Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod A, který na této kružnici neleží. Určete množinu všech bodů X takových, že bod A je středem úsečky XY , přitom Y leží na kružnici k.



Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/saxej6u9#material/p59bhmen`

Cvičení 5.10. Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S, který na přímce p neleží. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, bod X ležel na přímce p a bod Y náležel obvodu čtverce $ABCD$.

Cvičení 5.11. Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $ABCD$ o straně AB tak, aby strana AB byla rovnoběžná s úsečkou MN, aby $|AB| = |MN|$ a bod A ležel na přímce a, bod B ležel na přímce b.

Cvičení 5.12. Je dána přímka p a dvě kružnice k, l v různých polorovinách určených přímkou p. Sestrojte úsečku XY kolmou k přímce p tak, aby bod X ležel na kružnici k, bod Y na kružnici l a přímka p procházela středem úsečky XY.

Cvičení 5.13. Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod B ležel na přímce a, bod D ležel na přímce b.

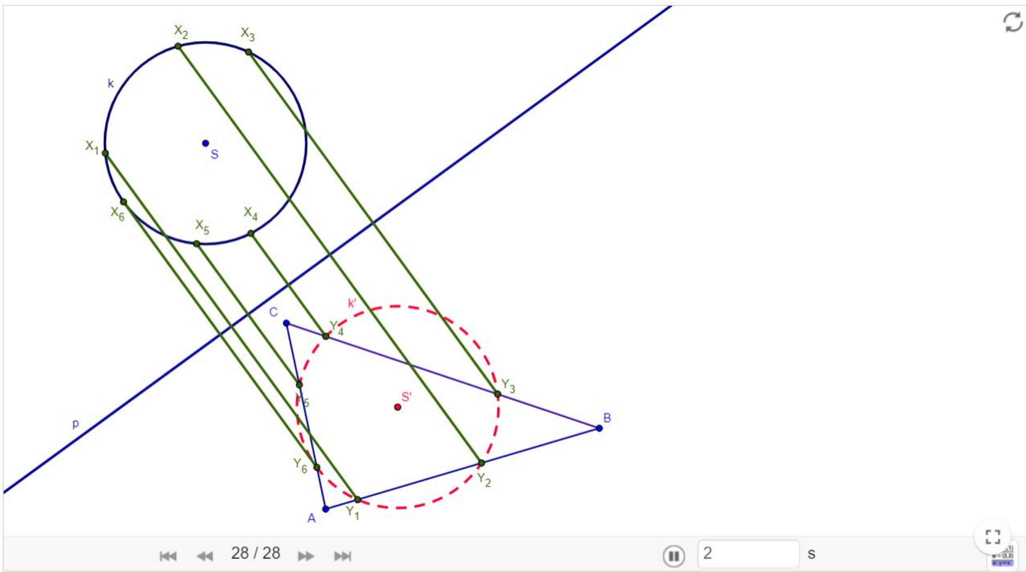
Cvičení 5.14. Je dána přímka p a body A, B ve stejné polorovině určené přímkou p. Určete na přímce p bod X tak, aby vzdálenost $|AX|+|XB|$ byla minimální.

Cvičení 5.15. Jsou dány dvě kružnice k, l, které se protínají v bodech X, Y. Veďte bodem X takovou přímku, která vytíná na obou kružnicích shodné tětivy (uvažujte kružnice s různými poloměry)

Cvičení 5.16. Je dána přímka p a kružnice $k(S;r)$, $l(O;\rho)$, $S \neq O$, $r > \rho$, $|S, \leftrightarrow p| = d_1$, $|O, \leftrightarrow p| = d_2$. Sestrojte všechny přímky rovnoběžné s přímkou p, na nichž kružnice k, l vytínají stejně dlouhé tětivy.

Cvičení 5.17. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, znáte-li: $a+b+c=o$, kde $o = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$.

Příklad 5.18. Je daná přímka p, kružnice k a trojúhelník ABC. Sestrojte všechny úsečky XY tak, že X leží na kružnici k, Y na obvodu trojúhelníka ABC, úsečka XY je kolmá na p a střed úsečky XY leží na přímce p.

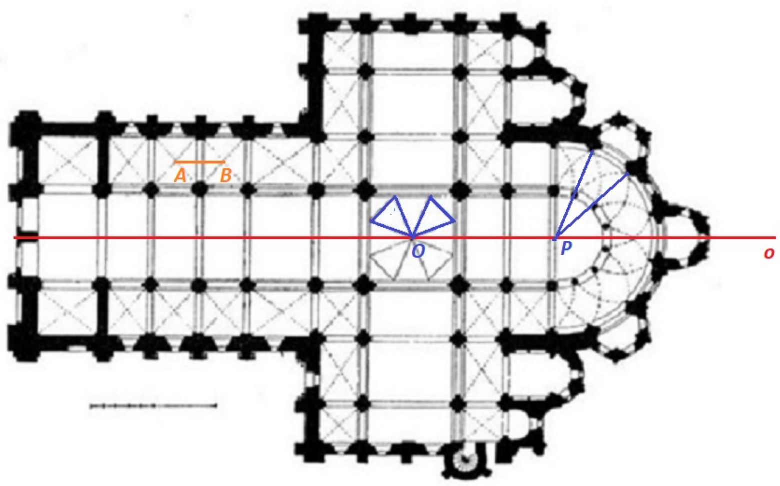


Konstrukce "krok po kroku": `https://www.geogebra.org/m/HxhzBUjd`

Příloha 1

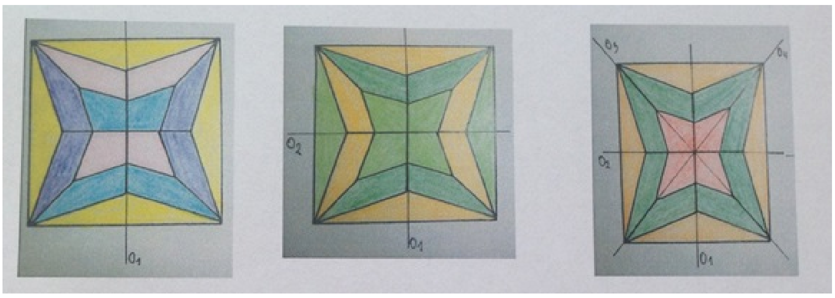
Řešení k příkladu 2.31

Příklady shodných zobrazení v půdorysu: osová souměrnost s osou o půdorysu celé katedrály, otočení se středem O a úhlem 90°, otočení se středem P a úhlem $\frac{180}{7}^\circ$, středovou souměrnost se středem O, posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ apod.



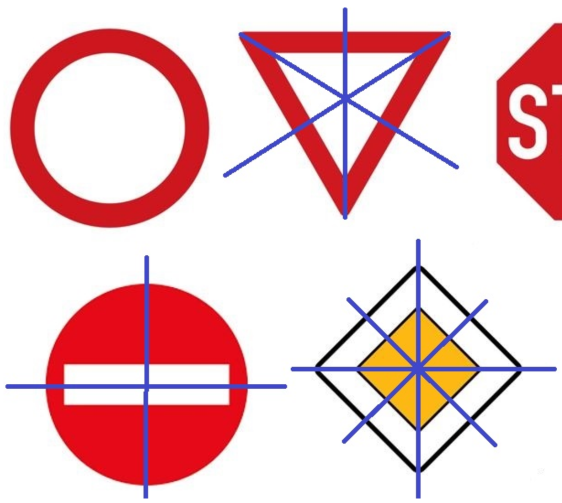
Řešení k příkladu 2.32

Příklad vybarvení a) s 1 osou souměrnosti, b) se 2 osami souměrnosti a d) se 4 osami souměrnosti. Případ c) se 3 osami souměrnosti vybarvid nelze.



Řešení k příkladu 2.36

Zákaz vjezdu všech vozidel (v obou směrech) - nekonečně mnoho os, Dej přednost v jízdě - 3 osy, Stop, dej přednost v jízdě - 0 os, Zákaz vjezdu v jednom směru - 2 osy, Hlavní silnice - 4 osy.



Příloha 2

Vyzkoušejte se (skupinová aktivita)

Následující materiál prezentuje lístečkovou metodu, kterou lze s úspěchem použít např. pro opakování pojmů. Zkopírujte připravené pojmy - vytvořte tolik kopií celé předložené sady, kolik bude skupin. Roztříhejte je na lístečky a každou sadu pojmů dejte jedné skupině.

Soutěží se, která skupina přiřadí nejdříve správně ke všem podtrženým pojmům ostatní pojmy z celé sady. (Pro zpestření můžeme např. požádat, aby studenti ještě každý podtržený pojem doplnili vhodným obrázkem.)

<u>posunutá (osová) souměrnost</u>

<u>osová souměrnost (zrcadlení, osová symetrie)</u>

<u>totožnost (identita)</u>

<u>středová souměrnost (středová symetrie)</u>

<u>otočení (rotace)</u>

<u>posunutí (translace)</u>

vzdálenost a směr (vektor)

pevně daný bod, orientovaný úhel

vzor i obraz leží na přímce procházející samodružným b.

každý bod se zobrazuje na sebe sama

vzor a obraz leží na kolmici k ose souměrnosti

složení osové souměrnosti a posunutí ve směru osy

přímá shodnost

přímá shodnost

přímá shodnost

přímá shodnost

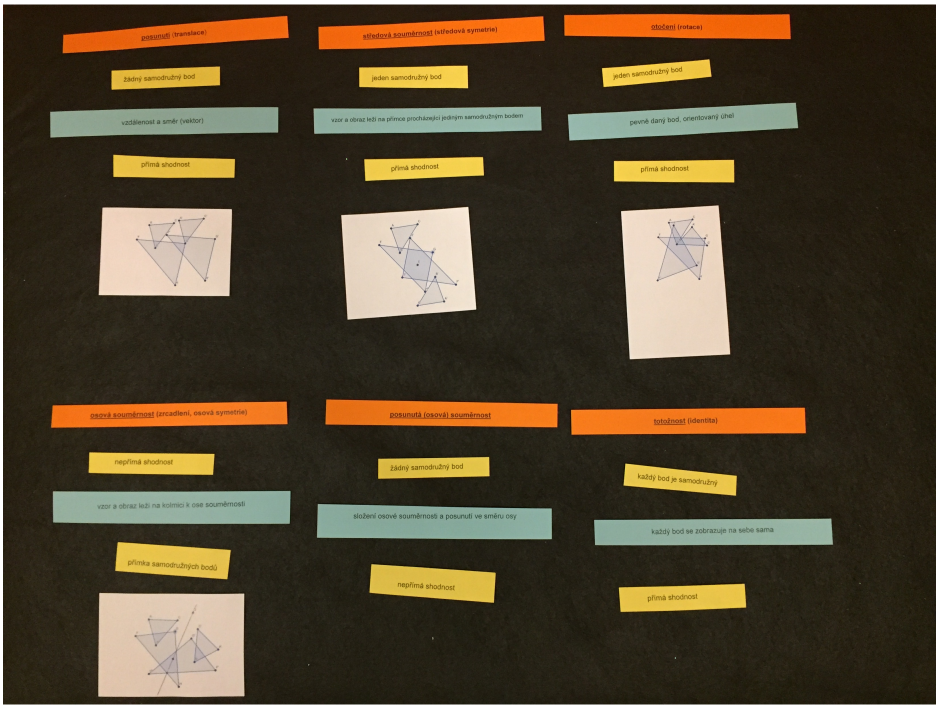
nepřímá shodnost

nepřímá shodnost

přímka samodružných bodů

jeden samodružný bod
jeden samodružný bod
žádný samodružný bod
žádný samodružný bod
každý bod je samodružný

Následující obrázek ukazuje příklad výsledku takovéto skupinové aktivity:



Contents

References

[1] Francová, M., Lvovská, L., *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum PedF MU, Brno 2014.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[3] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[4] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[5] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[6] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[7] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[8] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[9] Mičkalová, B. *Symetrie v matematice a výtvarném umění*, bakalářská práce, PedF MU v Brně, 2017.

[10] Němcová, V. *Geometrie pro 7. ročník ZŠ*, bakalářská práce, PedF v Českých Budějovicích, 2019. v pracovních listech

[11] Citáty na téma geometrie, https://citaty.net/temata/geometrie/.