

MA0004 Matematická analýza 1, 11. seminář

26. 4. 2022

1 Parciální derivace funkce dvou proměnných

Literatura a použité zdroje

- Kuben J. a kol. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z:
home1.vsb.cz/~kab002/vyuka/vpzma13_14/materialy/Diferencialni_pocet_vice_promennych.pdf
- Došlá Z., Došlý O. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Masarykova univerzita v Brně, Přírodovědecká fakulta. 2. vydání, 1999. ISBN 80-210-2052-0. Dostupné z:
<http://www.math.muni.cz/~plch/mapm/protisk.pdf>
- Klaška J. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných*. Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně. 2009. Dostupné z:
http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu funkce dvou proměnných

Definice: Necht' funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná v bodě $[x_0; y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0 , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0; y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$. To znamená, že

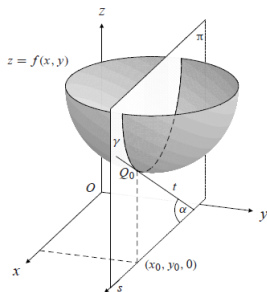
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0 , nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0; y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, event. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Při parciální derivaci podle proměnné x bereme proměnnou y jako konstantu a takto s ní nakládáme při derivaci. Stejně naopak, derivujeme-li podle proměnné y .

Geometrický význam parciální derivace 1. řádu

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \pi$ křivka v rovině π a parciální derivace $f_x(x_0; y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$, viz obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je $\operatorname{tg} \alpha$).



Podobně, derivace $f_y(x_0; y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0 , která vznikne průsečíkem plochy G_f s rovinou $x = x_0$.

Příklady na parciální derivace 1. řádu

Příklad 1: Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $z = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 100$

b) $z = \frac{x}{y}$

c) $z = (x^2y + y)^4$

d) $z = x^y$

e) $z = x \cdot \ln(x^2 - y^2)$

f) $z = \sqrt{x + \sin xy}$

Příklad 2: Spočtěte parciální derivace 1. řádu funkce v bodě A:

a) $f(x, y) = y^2 + y \cdot \sqrt{1 + x^2}$, $A = [2, 5]$

b) $f(x, y) = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$, $A = [1, 2]$

c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $A = [0, 1]$

Příklad 1:

- a) $z_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4$, $z_y = 2x^2 + 6xy - 5$,
- b) $z_x = \frac{1}{y}$, $z_y = -\frac{x}{y^2}$, $y \neq 0$
- c) $z_x = 8xy^4(x^2 + 1)^3$, $z_y = 4y^3(x^2 + 1)^4$
- d) $z_x = yx^{y-1}$, $z_y = x^y \ln x$, $x > 0$
- e) $z_x = \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - y^2}$, $z_y = -\frac{2xy}{x^2 - y^2}$, $x^2 - y^2 > 0$
- f) $z_x = \frac{1 + y \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}$, $z_y = \frac{x \cdot \cos xy}{2\sqrt{x + \sin xy}}$, $x + \sin xy > 0$

Příklad 2:

- a) $f_x(2, 5) = 2\sqrt{5}$, $f_y(2, 5) = 10 + \sqrt{5}$
- b) $f_x(1, 2) = 0$, $f_y(1, 2) = \frac{1}{4}$
- c) $f_x(0, 1) = 1$, $f_y(0, 1) = 0$

Parciální derivace 2. řádu funkce dvou proměnných

Parciální derivace 1. řádu $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ mohou mít v bodech svého definičního oboru opět parciální derivace podle x nebo y , které nazýváme *parciální derivace 2. řádu funkce f* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f''_{xx} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f''_{yy} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f''_{xy} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } x \text{ a } y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = f''_{yx} \dots \text{druhá parciální derivace } f \text{ podle } y \text{ a } x.$$

Schwarzova věta: Necht' funkce f má spojité parciální derivace f_{xy} , f_{yx} v bodě $[x_0; y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Příklady na parciální derivace 2. řádu

Příklad 3: Spočtete parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b) $z = \frac{xy+x}{y}$

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$

Příklady na parciální derivace 2. řádu

Příklad 3: Spočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu funkcí:

a) $z = x^2 + xy - 3xy^3$

b) $z = \frac{xy+x}{y}$

c) $z = e^{2y} \cdot \sin x$

Výsledky:

a) $z_x = 2x + y - 3y^3$, $z_y = x - 9xy^2$, $z_{xx} = 2$, $z_{yy} = -18xy$,
 $z_{xy} = z_{yx} = 1 - 9y^2$

b) $z_x = \frac{y+1}{y}$, $z_y = -\frac{x}{y^2}$, $z_{xx} = 0$, $z_{yy} = \frac{2x}{y^3}$, $z_{xy} = z_{yx} = -\frac{1}{y^2}$

c) $z_x = e^{2y} \cos x$, $z_y = 2e^{2y} \sin x$, $z_{xx} = -e^{2y} \sin x$,
 $z_{yy} = 4e^{2y} \sin x$, $z_{xy} = z_{yx} = 2e^{2y} \cos x$