

MA0004 Matematická analýza 1, 2. seminář

22. 2. 2022

1 Hromadné body posloupnosti

2 Limita funkce

Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. MU: Brno, 2004.
- * Samková, L. *Materiály k výuce v zimním semestru - Matematická analýza 3*. 2019. Dostupné zde:
<http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/ma3.htm>
- # Voldánová, A. *Posloupnosti a jejich hromadné body*. Bakalářská práce, 2007. Dostupné zde:
https://is.muni.cz/th/150974/prif_b/

Hromadné body posloupnosti

Příklad 1: Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Čas na rešerši: 3 minuty.

Hromadné body posloupnosti

Příklad 1: Vysvětlete, co je to hromadný bod posloupnosti. Pokud nevíte, podívejte se sami do svých poznámek z přednášky, případně na mobilu. Čas na rešerši: 3 minuty.

Vybraná podposloupnost a hromadný bod

Definice: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a necht' $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybraná podposloupnost** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazývá **hromadný bod** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé okolí $O(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in O(a)$.

Věta: Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Příklad 2: Najděte všechny hromadné body daných posloupností a určete limitu superior a limitu inferior daných posloupností:

(a) $a_n = (-1)^{n+3}$

(b) $a_n = (-2)^n$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

(d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{n+1}$

(e) $a_n = \operatorname{tg} \left((2n+1) \cdot \frac{\pi}{4} \right)$

(f) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

(g) $a_n = \sin \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

(h) $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$

(i) $a_n = 5 + 4 \cdot \cos \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

(j) $a_n = 5 + 4 \cdot \cos^n \left(n \cdot \frac{\pi}{3} \right)$

Výsledky Příkladu 2

- (a) $H(a_n) = \{-1, 1\}$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$
- (b) $H(a_n) = \{-\infty, \infty\}$, $\liminf a_n = -\infty$, $\limsup a_n = \infty$
- (c) $H(a_n) = \{0, 1\}$, $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = 1$
- (d) $H(a_n) = \{-2, 2\}$, $\liminf a_n = -2$, $\limsup a_n = 2$
- (e) $H(a_n) = \{-1, 1\}$, $\liminf a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$
- (f) $H(a_n) = \{0, 1, 2\}$, $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = 2$
- (g) $H(a_n) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (h) $H(a_n) = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{2}$, $\limsup a_n = 1$
- (i) $H(a_n) = \{1, 3, 7, 9\}$, $\liminf a_n = 1$, $\limsup a_n = 9$
- (j) $H(a_n) = \{1, 5, 9\}$, $\liminf a_n = 1$, $\limsup a_n = 9$

Příklad 3: Když máme tak hezké datum...

Udejte příklad posloupnosti, která má právě dva hromadné body 0, 2.

Příklad 4: Limita funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tj. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ může být různého typu, známe tyto případy:

- (a) Vlastní limita ve vlastním bodě
- (b) Vlastní limita v nevlastním bodě
- (c) Nevlastní limita ve vlastním bodě
- (d) Nevlastní limita v nevlastním bodě

Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarády, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2+5}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$