MA0004 Matematická analýza 1, 3. seminář

1. 3. 2022

Náplň cvičení

Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* MU: Brno, 2004.
- Horváth, P. *Materiály k výuce Matematika 1*. Dostupné zde: https://jointlab.upol.cz/~horvath/matematika1_ftk/
- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I.* Brno, 2012. Dostupné z: https://is.muni.cz/elportal/?id=980552

Limita funkce

Definice: Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou číslu $L \in \mathbb{R}^*$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

když ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje okolí $O(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in O(L)$.

Rozlišujeme tyto čtyři případy dle x_0, L:

x_0, L vlastní	vlastní limita ve vlastním bodě
x_0 nevlastní, L vlastní	vlastní limita v nevlastním bodě
x_0 vlastní, L nevlastní	nevlastní limita ve vlastním bodě
x_0, L nevlastní	nevlastní limita v nevlastním bodě

Animace limity: viz `https://www.geogebra.org/m/ymptkVU3`

Typy limit funkcí

Příklad 1: Zkuste pomocí vhodných počítačových aplikací, na základě vlastního úsudku či po poradě s kamarády, přijít na to, jakého typu jsou následující limity:

$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x+1}$ $\quad$ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$ $\quad$ $\lim_{x\to 2} \frac{3}{(x-2)^2+5}$

$\lim_{x\to -\infty} 2^x$ $\quad$ $\lim_{x\to \infty} \frac{1-x^3}{x^2+4}$ $\quad$ $\lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x$

Věta: Nechť existuje okolí $O(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in O(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí rovnost $f(x) = g(x)$. Pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$$

kde $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Jednostranné limity funkce

Limita zprava a zleva

Definice: Funkce $f(x)$ má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ **limitu zprava** rovnou $L \in \mathbb{R}^*$, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L,$$

když ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ platí $f(x) \in O(L)$. Podobně pro limitu zleva $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Vybrané důležité věty:

1. Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu, přičemž $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
2. Jestliže platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ a pro funkci g existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0, v němž je g ohraničená, pak $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.
3. Početní operace s limitami...

Spojitost funkce

Spojitost funkce v bodě

Definice: Funkce $f(x)$ je v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ spojitá, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Podobně pro spojitost zleva, či zprava.

Věta o složené funkci: Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ a funkce g je spojitá v bodě α. Pak platí, že

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)) = g(\alpha).$$

Příklad 2: Spočítejte následující limity

a) $\lim_{x \to \infty} 3^{\frac{6x+1}{2x-3}}$

b) $\lim_{x \to \infty} \ln \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$

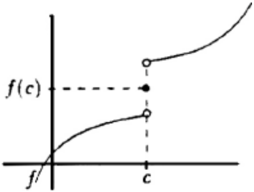
Body nespojitosti – typy

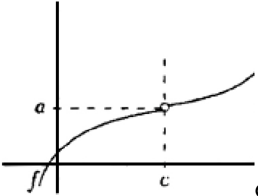
Předpokládejme, že funkce $f(x)$ není v bodě x_0 spojitá.

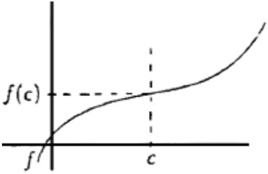
- x_0 je bod **odstranitelné nespojitosti**, když existuje vlastní $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ale nerovná se $f(x_0)$.
- x_0 je bod **nespojitosti 1. druhu**, když existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$ a $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$, avšak $a \neq b$.
- x_0 je bod **nespojitosti 2. druhu**, když alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní.

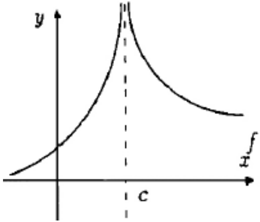
Druhy nespojitosti funkcí

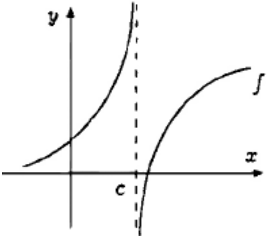
Příklad 3: Na obrázcích jsou znázorněny grafy 5 funkcí. Určete, zda jsou spojité v bodě c, pokud ne, určete, o jaký druh nespojitosti se jedná.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Nalezení funkce splňující limitní kritéria

Příklad 4: Rozdělte se do skupin po 2-3 lidech. Jeden ze skupiny určí, jaké limitní omezení či podmínku na spojitost má splňovat neznámá funkce $f(x)$. Zbývající členové skupiny se snaží najít vhodný příklad funkce $f(x)$ vyhovující kritériím kamaráda(ky). Následně si role vymění.

Příklady omezení či podmínek:

(a) Najdi funkci $f(x)$ takovou, která má v bodě $x = 3$ limitu rovnou 5.

(b) Najdi funkci $f(x)$ takovou, která má v bodě $x = 3$ limitu rovnou 5, ale není v něm ($x = 3$) spojitá.

(c) Najdi funkci $f(x)$ takovou, která má v bodě $x = 0$ limitu rovnou $-\infty$.

Poznámka: Tyto příklady slouží pouze pro inspiraci. Vymýšlejte svá vlastní limitní omezení či podmínky na spojitost.

Příklad 5: Pomocí jednoduchých úprav spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

(b) $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ [víme, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$]

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

(e) $\lim_{x\to -\infty} \left(4x^3 - x^2 + x + 2\right)$

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}$

(g) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

(h) $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x})$

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3-x^2}$

Výsledky příkladu 1

(a) $\frac{2}{3}$
(b) $-\frac{1}{56}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) 8
(e) $-\infty$
(f) ∞
(g) 2
(h) 0
(i) neexistuje
(j) $-\infty$