

# MA0004 Matematická analýza 1, 6. seminář

22. 3. 2022

## 1 Výpočet limity s pomocí L'Hospitalova pravidla

### Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z:  
<https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>

## L'Hospitalovo pravidlo

**Věta:** Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Nechť je splněna jedna z podmínek

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$ .

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , pak existuje také  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Poznámka:** L'Hospitalovo pravidlo lze využít pro výpočet limit z neurčitých výrazů

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

# Použití L'Hospitalova pravidla

- 1 Limity typu  $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$ ,  $\left[\frac{0}{0}\right]$  se řeší L'Hospitalovým pravidlem přímo, přičemž jej můžeme použít opakovaně.
- 2 Limity typu  $[\infty - \infty]$  se řeší úpravou výrazu a převodem na výše uvedené typy, například takto:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

- 3 Limity typu  $[0 \cdot \infty]$  se řeší úpravou

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

- 4 Limity typu  $[0^0]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[1^\infty]$  se řeší úpravou

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = [e^{0 \cdot \infty}]$$

a následným výpočtem limity z výrazu  $g(x) \cdot \ln f(x)$ , což vede na předchozí případ.

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

# Příklady na použití L'Hospitalova pravidla

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

**Výsledky:**

$$1. \left[\frac{4}{3}\right], 2. \left[\frac{1}{2}\right], 3. \left[-\frac{2}{\pi}\right], 4. [0], 5. [0]$$

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln \frac{1}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln (x - 1)$

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln \frac{1}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

10.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

**Výsledky:**

6.  $[0]$ , 7.  $[\infty]$ , 8.  $[0]$ , 9.  $[0]$ , 10.  $[0]$



**Příklad 1:** Vypočtete následující limity:

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \cos \frac{\pi}{2} x \right)^{\ln x}$$

# Příklady na použití L'Hospitalova pravidla

**Příklad 1:** Vypočtete následující limity:

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \cos \frac{\pi}{2} x \right)^{\ln x}$$

**Výsledky:**

$$11. \left[ e^{-\frac{9}{2}} \right], \quad 12. \left[ \frac{1}{e} \right], \quad 13. \left[ \frac{1}{e} \right], \quad 14. \left[ e^{-\frac{1}{6}} \right], \quad 15. [1]$$

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

16.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \cdot \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

**Příklad 1:** Vypočtěte následující limity:

16.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \cdot \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

**Výsledky:**

16.  $\left[ \frac{1}{2} \right]$ , 17.  $\left[ \frac{1}{6} \right]$ , 18.  $[0]$