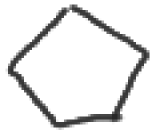
IV. PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY

(A) ÚVODNÍ POČTY

- úhly, strany, ...

(B) PRAVIDELNÝ 

- možnosti, zkratky, ...

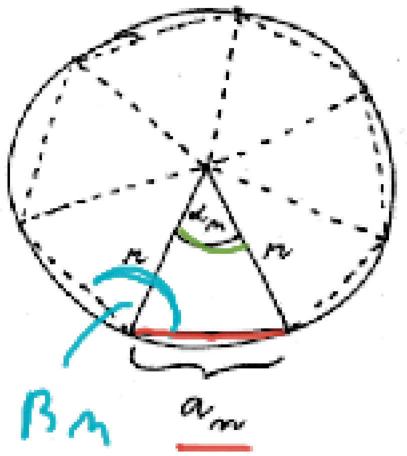
(C) DALŠÍ ...

- nové kombinace předch. nápadů

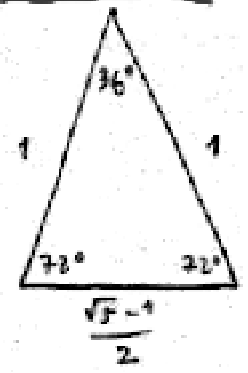
(A) DOKAŽTE ...

1. Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360^\circ/n$.
2. Velikost strany pravidelného n-úhelníku veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r\sqrt{2-2\cos\alpha_n}.$$



! 3. spec.



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36^\circ$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72^\circ$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

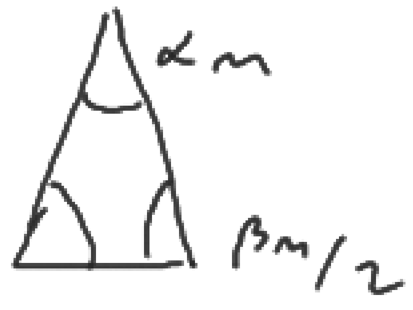
Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

4. Důsl.

5-, resp. 10-úhelník LZE sestrojit a umíme vymyslet JAK!!

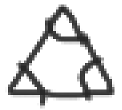
ad 1 vrcholový úhel



$\beta_n = ?$

$$\boxed{\alpha_n + \frac{\beta_n}{2} + \frac{\beta_n}{2} = 180^\circ}$$

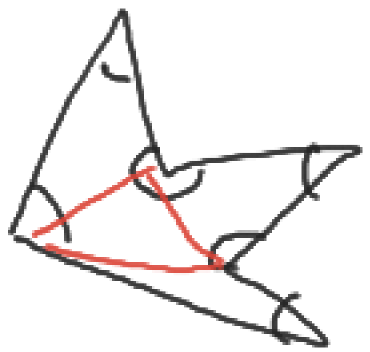
$$\beta_n = 180^\circ - \alpha_n = 180^\circ - 360^\circ/n = 180^\circ\left(1-\frac{2}{n}\right) = 180^\circ\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{1}{n}(n-2)180^\circ$$

 180°

 360°

 540°

⋮



součet ∠ ob. n-úhelník

(A) … POKRAČOVÁNÍ

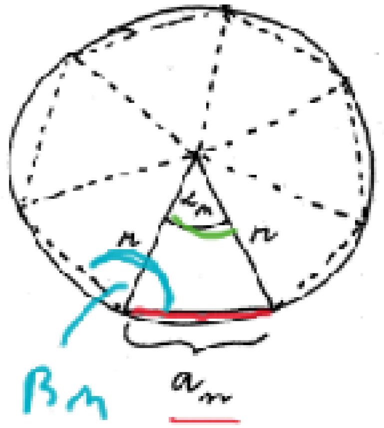
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

— KOS. VĚTA —

(1) Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360°/n$.

(2) Velikost strany pravidelného n-úhelníku veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

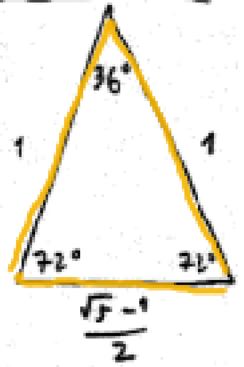
$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



$a_n^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\alpha_n$

$a_n^2 = r^2(2 - 2\cos\alpha_n)$ ✓

(3) Spec.



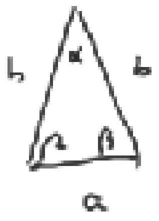
Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36°$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72°$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. !



$\beta = 2\alpha \iff a : b =$ zlatý

def — věta

$\cancel{1^2} = \cancel{1^2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cos 72°$

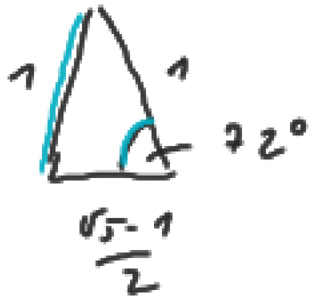
$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\cancel{2}} = 2\left(\cancel{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\cos 72° \implies \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ✓

Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$ ✓

$2 \cdot \cos 72°$!

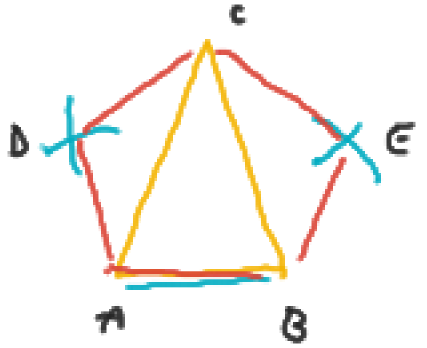
$r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$



(B) SESTROJTE pravid. 5-úhelník

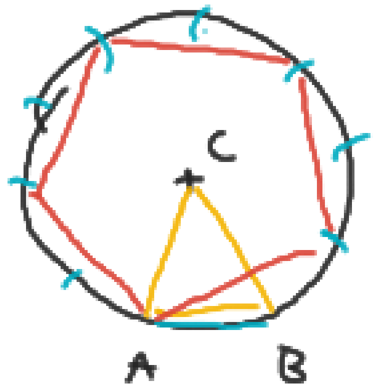
NÁPAD 1 .. pomocí předch. alg. vyjádření $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

NÁPAD 2 ..



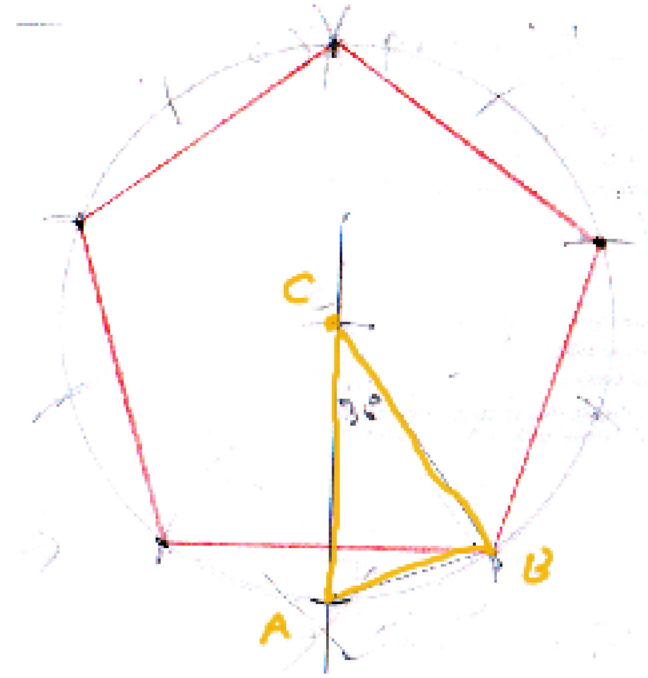
1) zlatý △ ABC
2) ⇝ strany AD = DC = CE = EB = AB
(⇝ úhlopříčky AE = ED = DB = BC = CA)

NÁPAD 3 ..

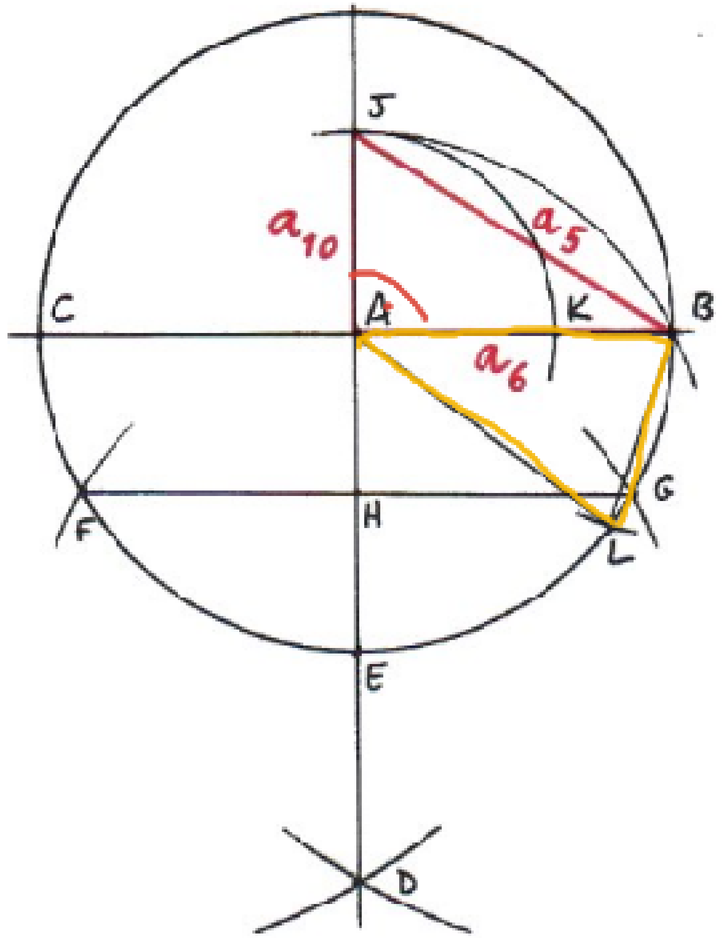


1) zlatý △ ABC
2) ops. kružnice (r = CA = CB)
3) ⇝ 10-úhelník
⇝ 5-úhelník (vynech liché vrcholy)

AB : AC = zlatý poměr



(B) ZKRATKA … navazující na předch. NÁPAD 3:



1) konstr. AB ⇝ E ⇝ H ⇝ J

… klas. konstrukce ZLATÉHO ŘEZU

2) zlatý △ ABL (… $AJ = a_{10}$)

⋮

ZKRATKA

$$\boxed{BJ = a_5 = \text{strana prav. 5-úh. vepsaného do kružnice } r = AB}$$

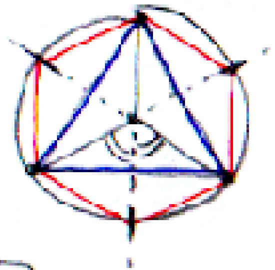
DŮKAZ … Pyth. věta △ BAJ:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$$
$$= r^2\left(1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right)$$
$$= r^2\left(1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\right)$$
$$= r^2\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}\right)$$
$$= \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) \quad ✓$$

(c) DALŠÍ ...

* umíme $\boxed{k}$-úhelník $\Longrightarrow$ umíme $\boxed{2k}$-úhelník

$k = 3$ ...

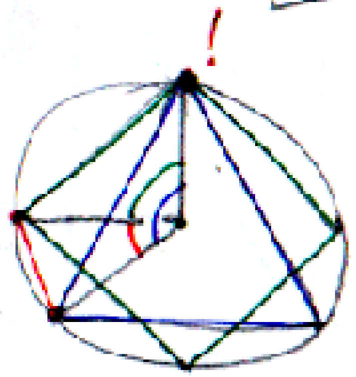


← půlením středového úhlu

* umíme $\boxed{k}$-úh. a $\boxed{l}$-úh., kde k, l .. NESOUDĚLNÉ

$\Longrightarrow$ umíme $\boxed{k \cdot l}$-úhelník !

$k = 3$
$l = 4$



← úprava zlomků:

$\measuredangle = \frac{360^\circ}{k}$, $\measuredangle = \frac{360^\circ}{l}$

$\measuredangle = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right) \cdot 360^\circ = \boxed{\frac{l-k}{k \cdot l}} \cdot 360^\circ$

* některé ÚHLY NEJDOU $\Longrightarrow$ některé $\boxed{n}$-úh. NEJDOU !

... viz Gauss-Wantzelova věta

		2·3, 2·4, 2·5, 2·6 = 3·4
lze	podstatné	3 4 5 17
	odvozené	6 8 10 12 15 16
nelze		7 9 11 13 14 18 19 ...