Geometrie 1

Tabule ze cvičení (jaro 2021)

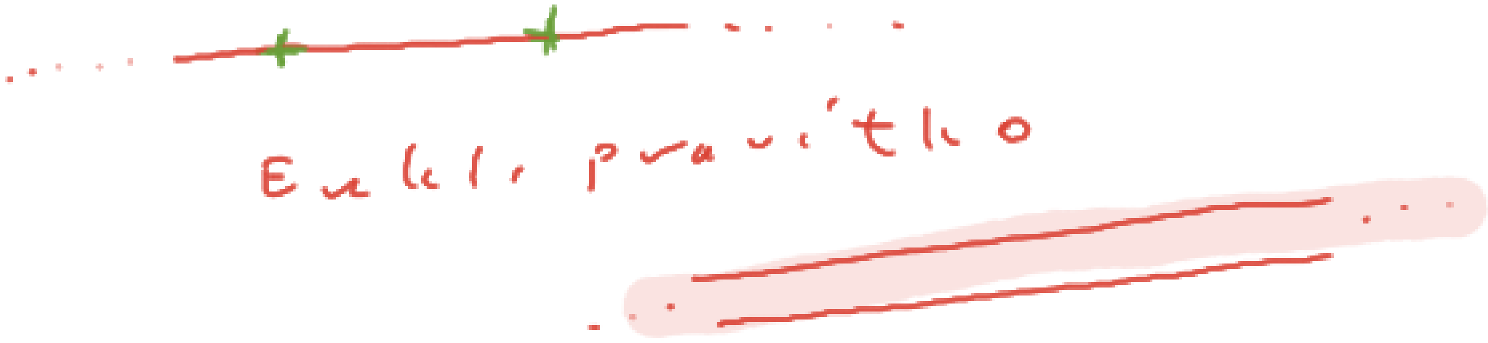
Obsah

Poslední aktualizace 23. května 2021

I. EUKLEIDOVSKÉ KONSTRUKCE

(A) IDEÁLNÍ NÁSTROJE ⟸ Eukl. postuláty I – III

- kolmice
- rovnoběžka

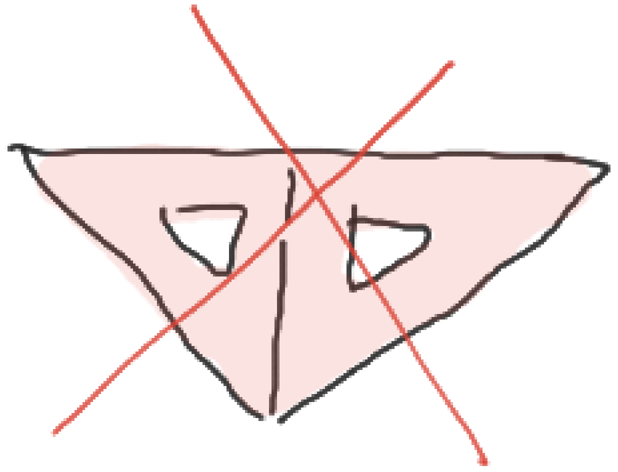


Eukl. pravítko

∞ dlouhé

(B) OMEZENÉ NÁSTROJE

- rovnoběžka ...



Eukl. kružítko

... ∞ velké

(C) OMEZENÁ NÁKRESNA

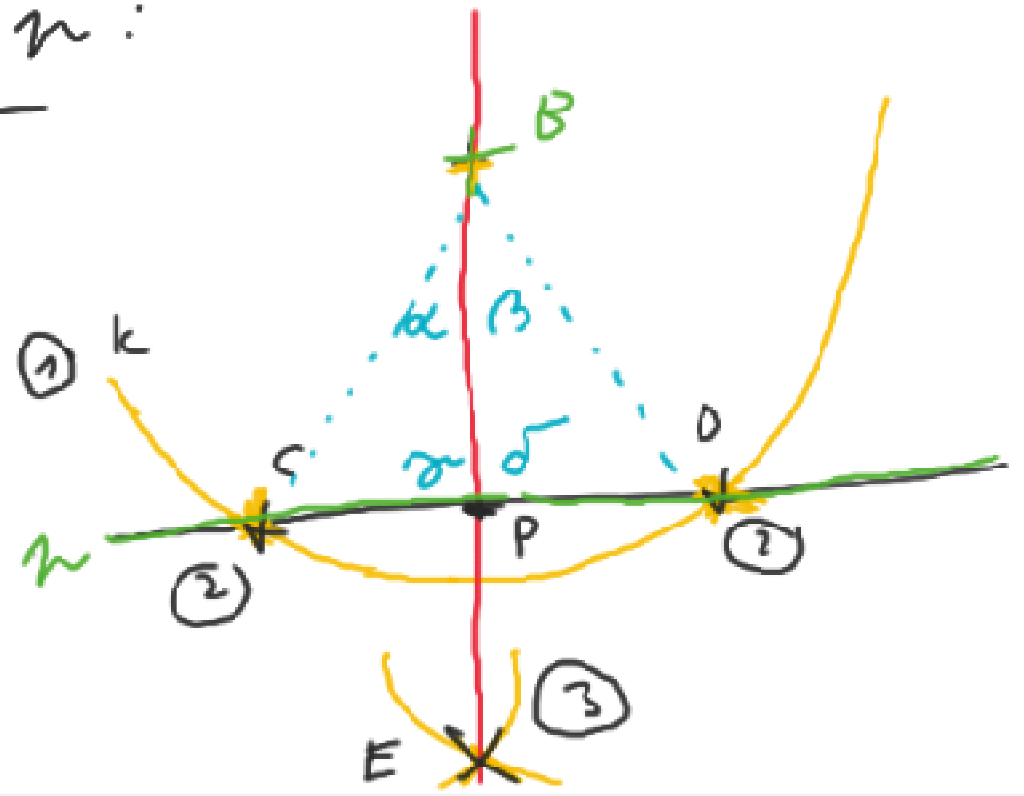
- nedostupný bod

(D) CHYBĚJÍCÍ NÁSTROJE

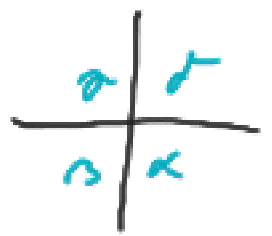
(- pro zajímavost)

(A) KOLMICE Z BODU B K PŘÍMCE p

$B \notin p$:



DEF



← "KOLMÉ", pokud $\alpha = \beta = \gamma = \delta$

KONSTRUKCE

1. kružnice $k \rightsquigarrow C, D$
2. shodné kr. se středy $C, D \rightsquigarrow E$
3. přímka BE = KOLMICE

ZDŮVODNĚNÍ

1. $BC = BD$, 2. $CE = DE \overset{sss}{\Longrightarrow} \triangle BCE \cong \triangle BDE \Longrightarrow \alpha = \beta$

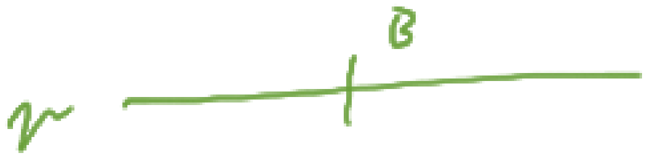
Dále $BC = BD$, $\alpha = \beta \overset{sus}{\Longrightarrow} \triangle BCP \cong \triangle BDP \Longrightarrow \gamma = \delta$

POZN

- P = STŘED úsečky CD
- kolmice BE = OSA úsečky CD

  = OSA úhlu CBD

$B \in p$

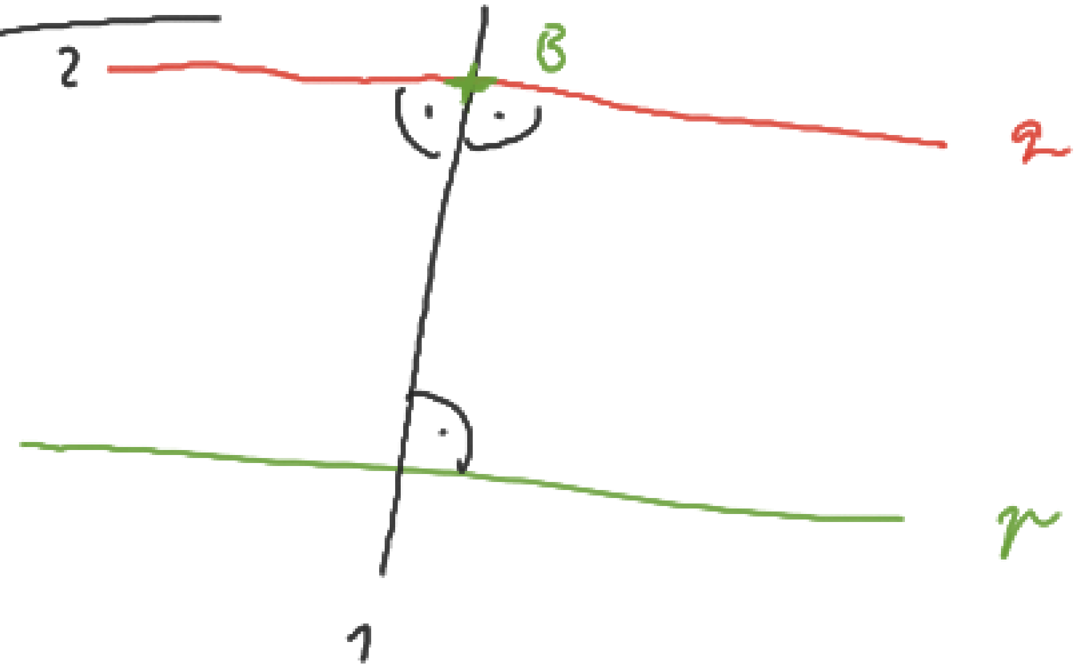


konstr... stejné

zdůvod... snazší

(A) ROVNOBĚŽKA BODEM B S PŘÍMKOU p

NÁPAD 1

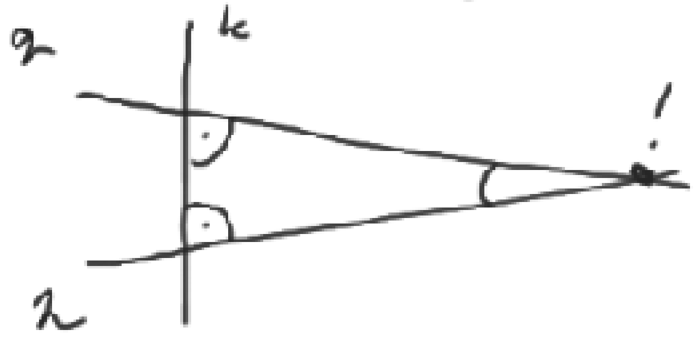


DEF q „ROVNOB.“ pokud $p \cap q = \emptyset$
p

KONSTR . . . „2 x kolmice“

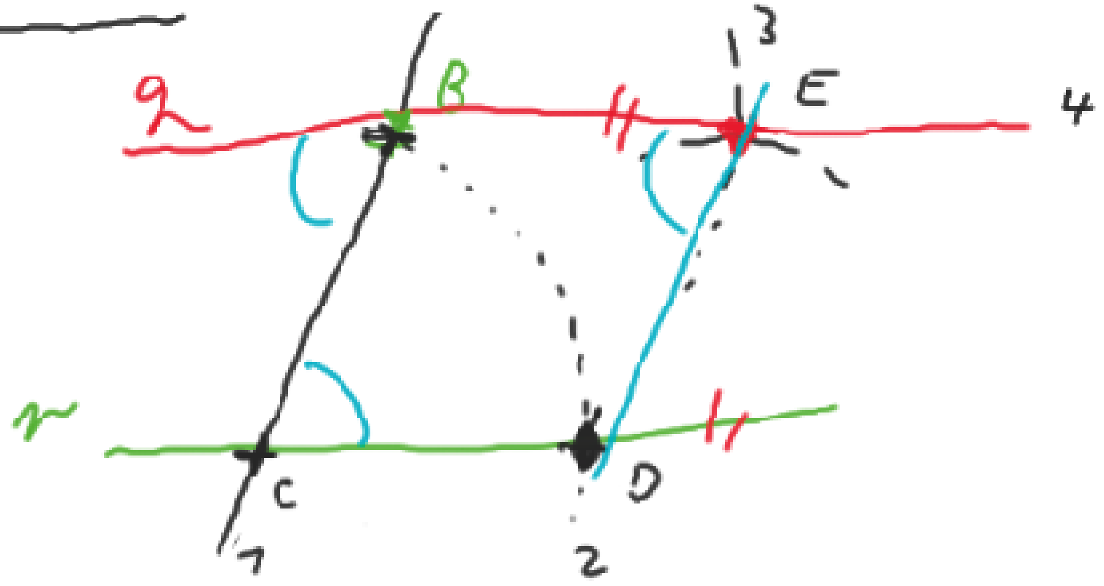
DŮKAZ

co kdyby se protly?



~> SPOR s větou o součtu úhlů v trojúh.!

NÁPAD 2

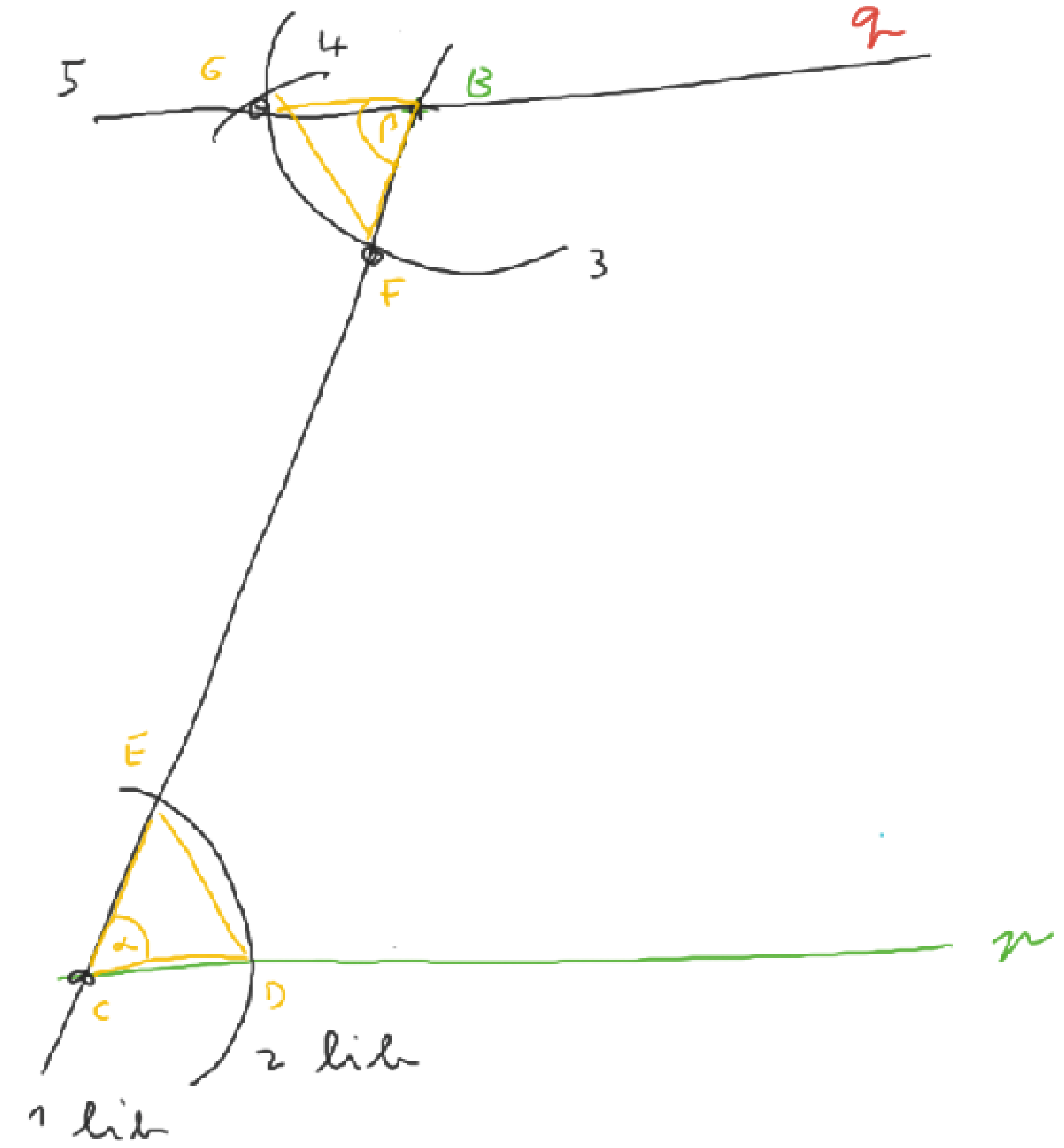


KONSTR
1. $C \in p$ lib.
2. kružnice ~> D ($CD = CB$)
3. shodné kr. ~> E ($BE = DE = CB$ ...)
4. přímka BE = ROVNOBĚŽKA

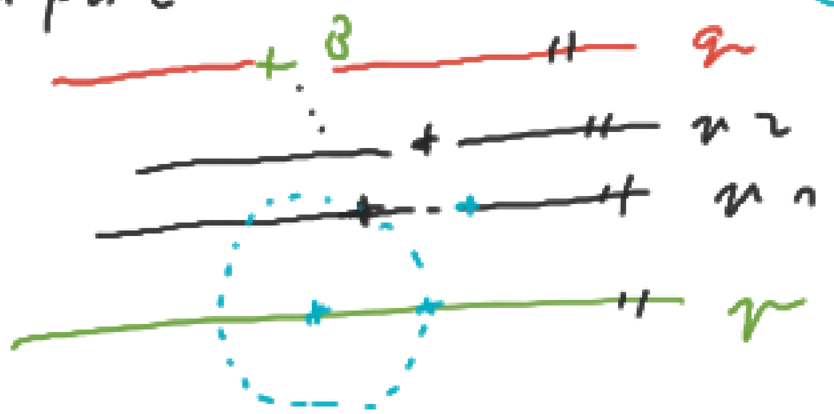
DŮKAZ .. $CDEB$ = KOSOČTVEREC
(stačí střídavé / souhl. úhly)

(B) ad ROVNOBĚŽKA ... s malým kružítkem

max +



NÁPAD 1 ... "postupné posouvání"



NÁPAD 2 ... "přenášení úhlu"

1. $C \in p$ lib
2. lib. kružnice m, D, E
3. shodná kružnice m, $BF = BE$ ...
4. G tak, aby $FG = ED$ (a $BG = CD$)
5. přímka BG = ROVNOBĚŽKA

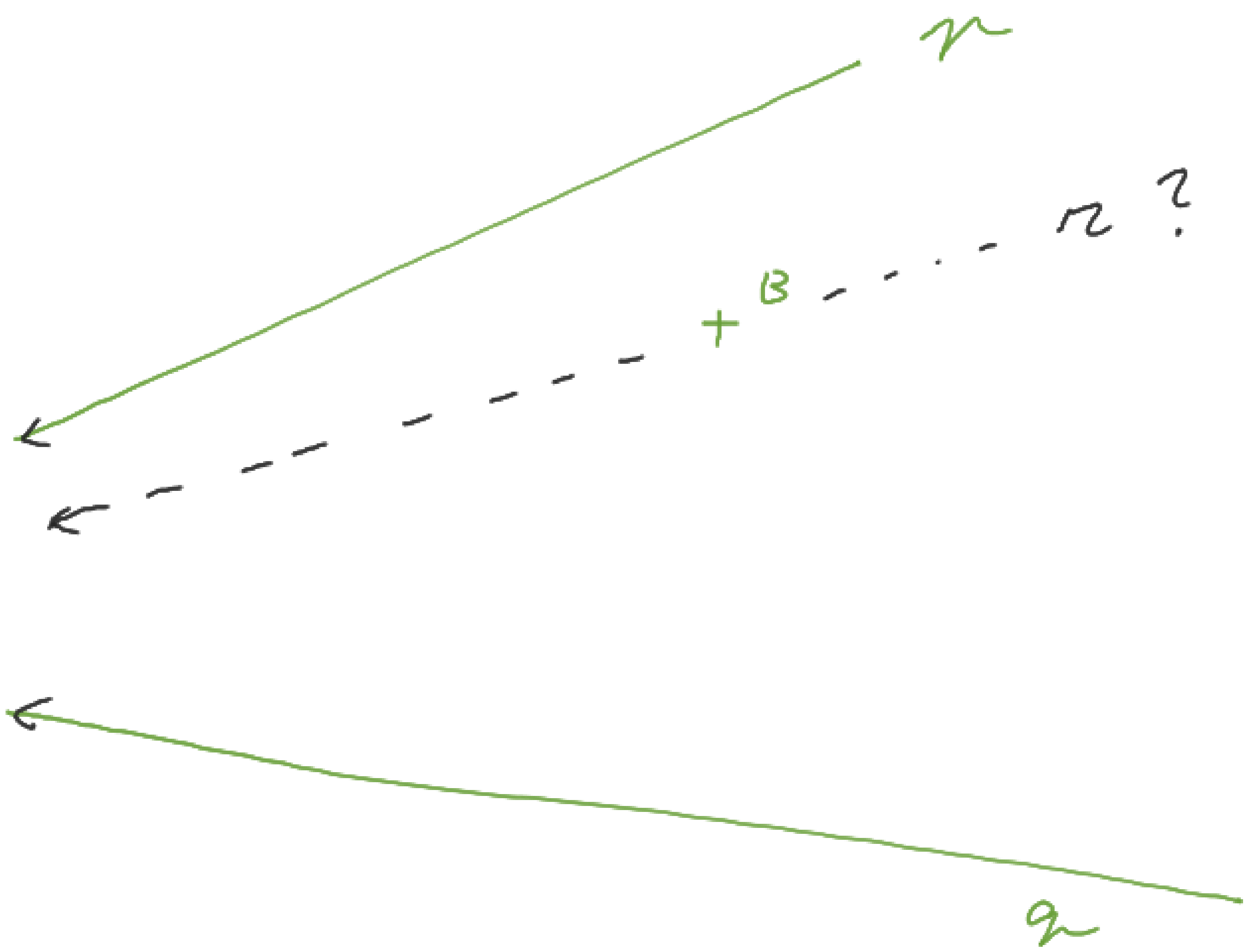
DŮKAZ

(1) až (4) $\xRightarrow{sss} \triangle CDE \overset{!}{=} \triangle BGF$

$\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow p \parallel q$

(C) SPOJNICE BODU B S NEDOSTUPNÝM PRŮSEČÍKEM PŘÍMEK

$c = p \cap q$



NÁPADY

- poměry (resp. středy)
- TRANSFORMACE !
- triky ...

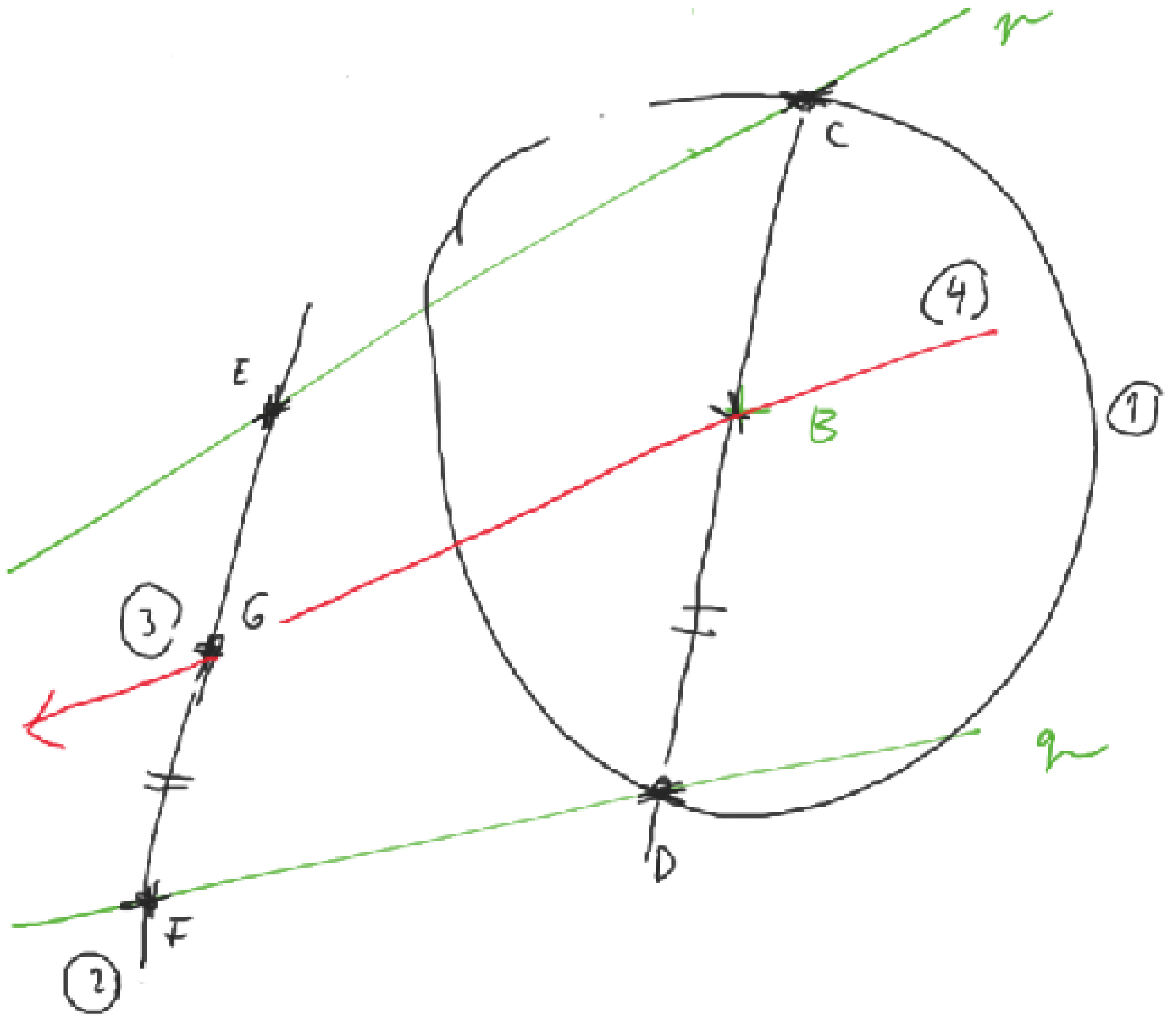
OBECNÉ SCHÉMA

1. transf. "TAM"
2. řešení transf. úlohy !
3. transf. "ZPĚT"

... viz dále

ad SPOJNICE ...

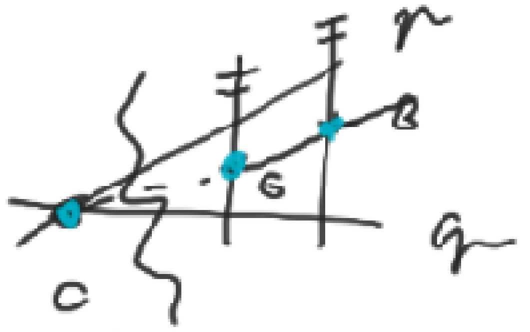
NÁPAD 1



KONSTR

1. lib. kružnice my C, D
2. lib. rovnoběžky my E, F
3. G = střed E, F
4. přímka BG prochází $C = p \cap q$

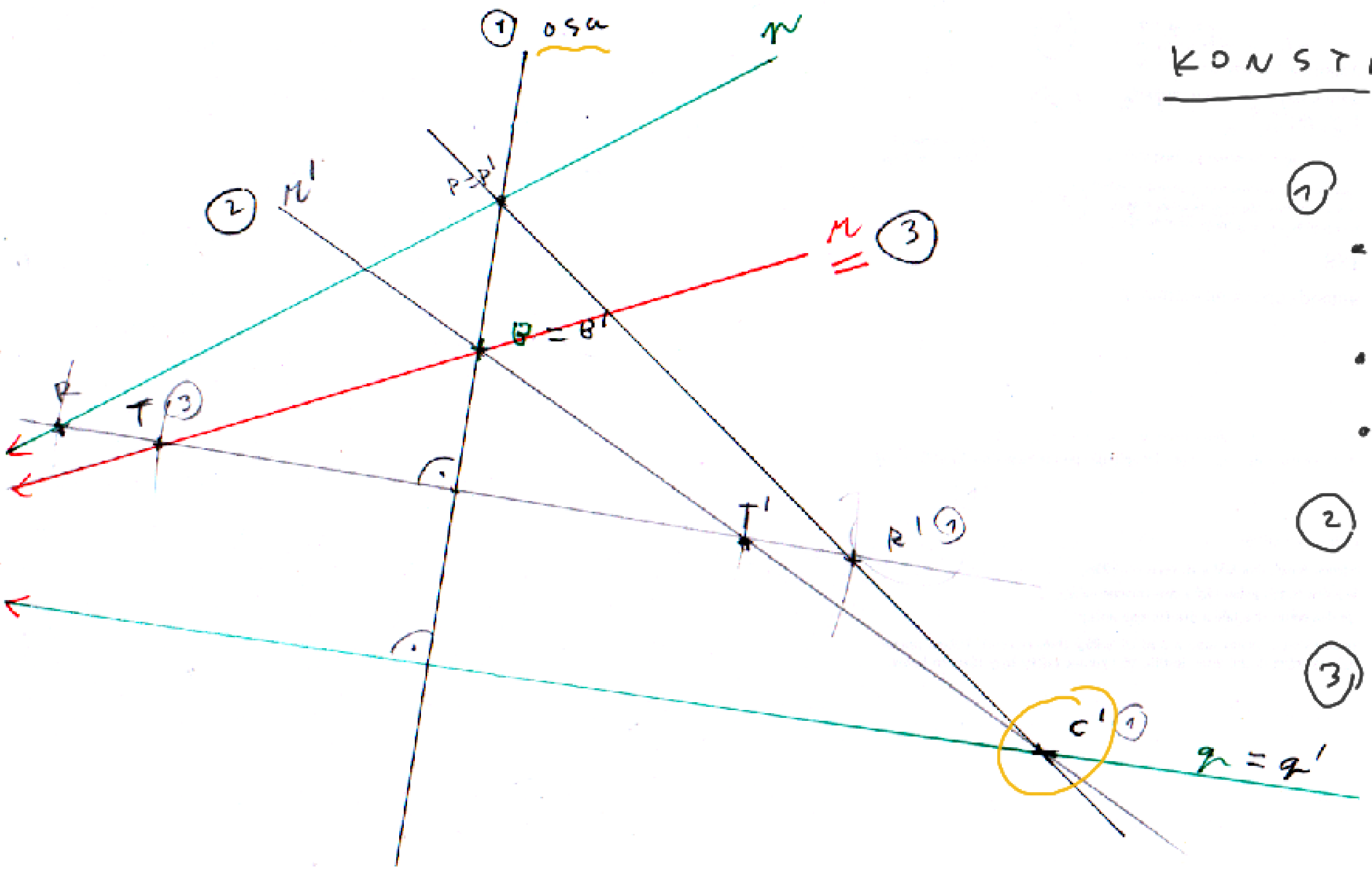
DŮKAZ



(CB : BD = EG : GF)

ad SPOJNICE ...

NÁPAD 2 ... OSOVÁ SOUMĚRNOST

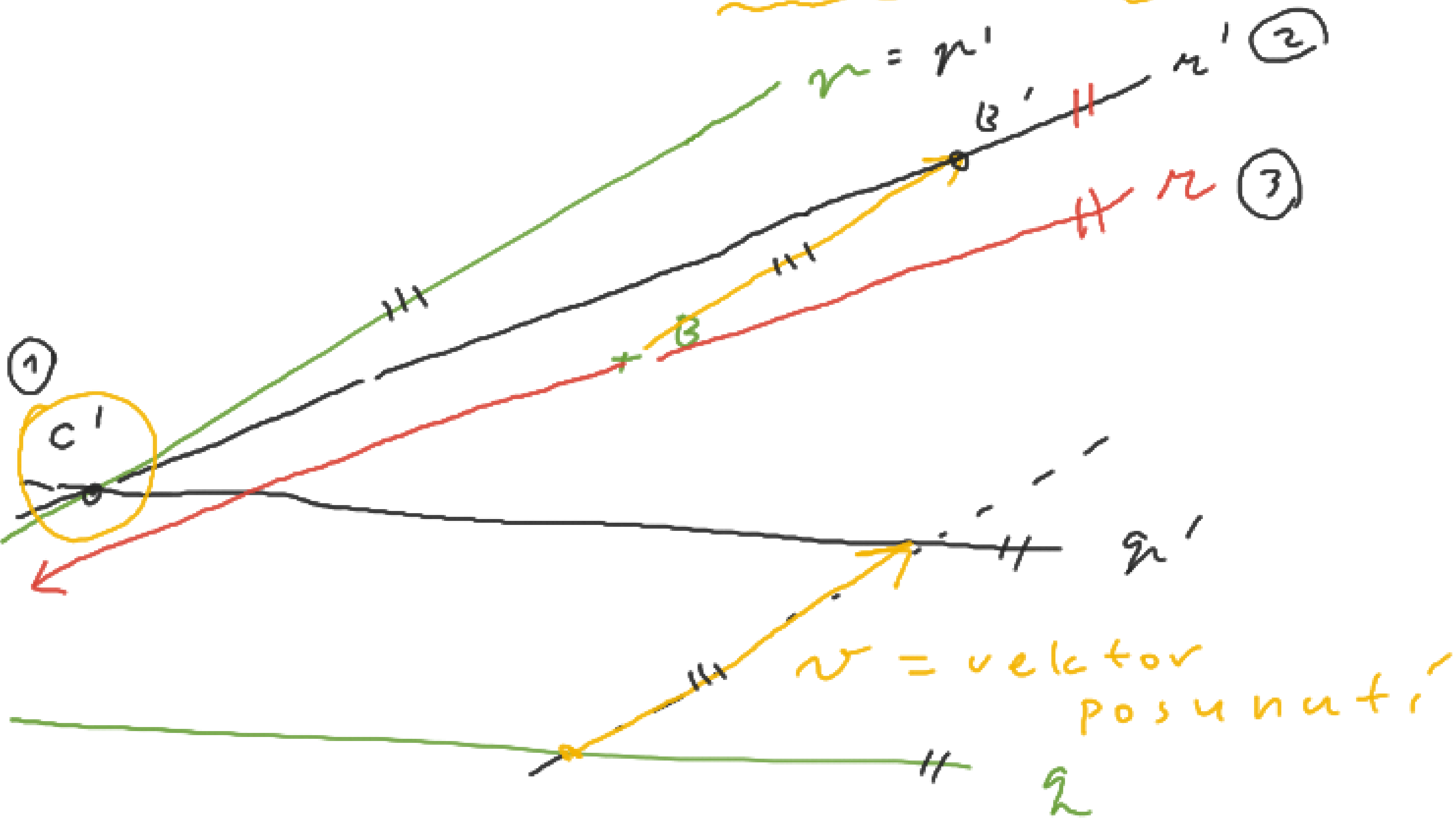


KONSTR ... viz ob. schéma :

1. TAM chytře
   - volíme osa $\ni B$ $(\Rightarrow B' = B)$
     a osa $\perp q$ $(\Rightarrow q' = q)$
   - sestr. p' (pomocí $R \mapsto R'$)
   - průsečík $C' = p' \cap q'$ dostupný!
2. ŘEŠENÍ
   - $r' = B'C'$
3. ZPĚT
   - sestr. r (pomocí $T' \mapsto T$)

ad SPOJNICE ...

NÁPAD 3 ... POSUNUTÍ



KONSTR.:

① TAM ← chytře

- volíme $v \parallel r$ ($\rightsquigarrow r' = r$)
- $q' \parallel q$, aby $C' = r' \cap q'$ na papíře!
- posuneme $B \longmapsto B' = B + v$

② ŘEŠENÍ

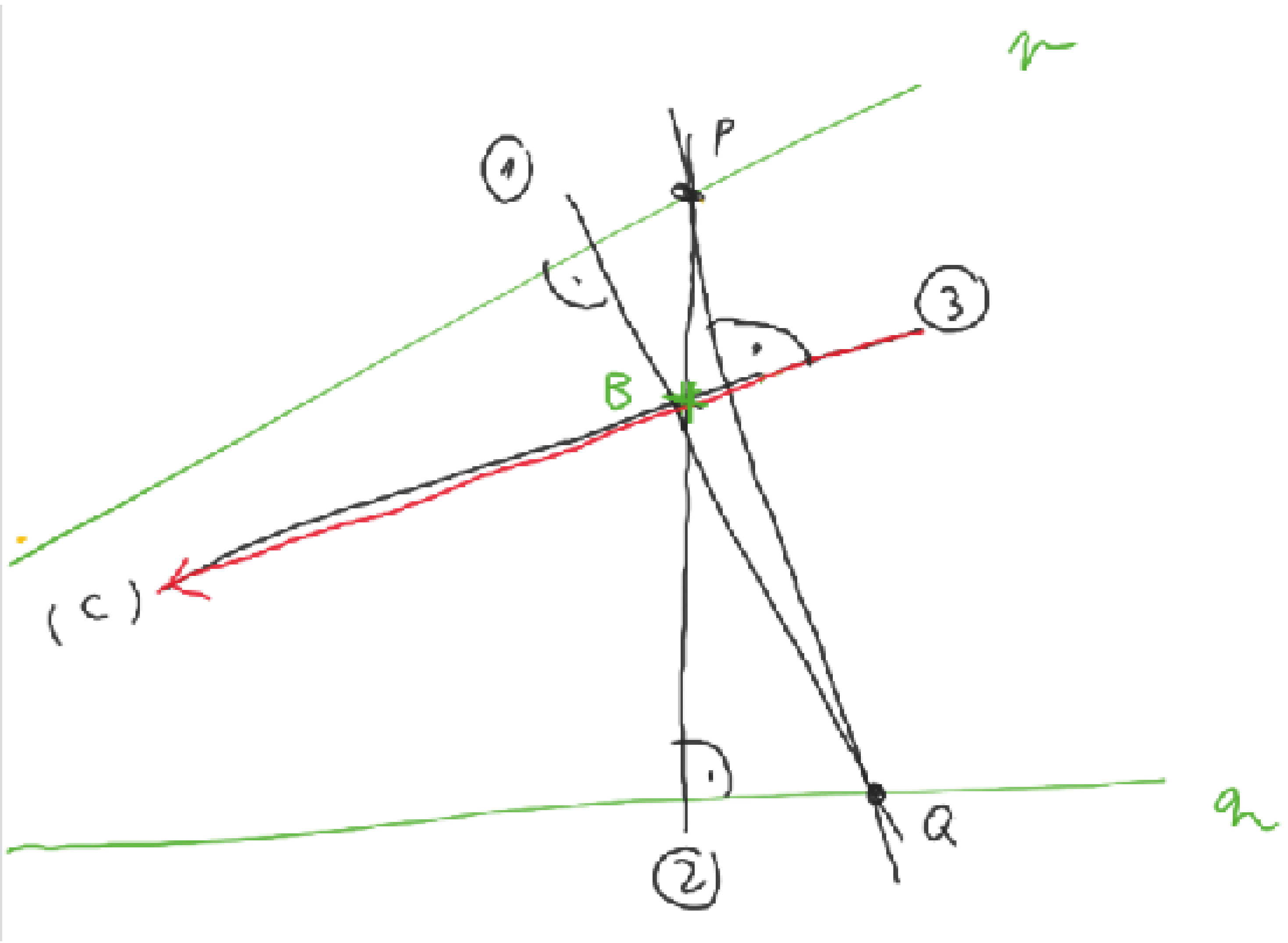
- $n' = B'C'$

③ ZPĚT

- n' = rovnoběžka s n jdoucí B

ad SPOJNICE ...

NÁPAD 4 ... TRIK

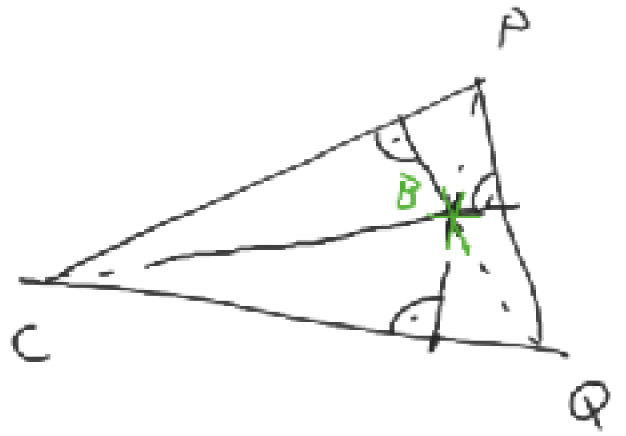


KONSTR

1. kolmice z B k p ⇝ Q
2. —"— B k q ⇝ P
3. —"— B k PQ

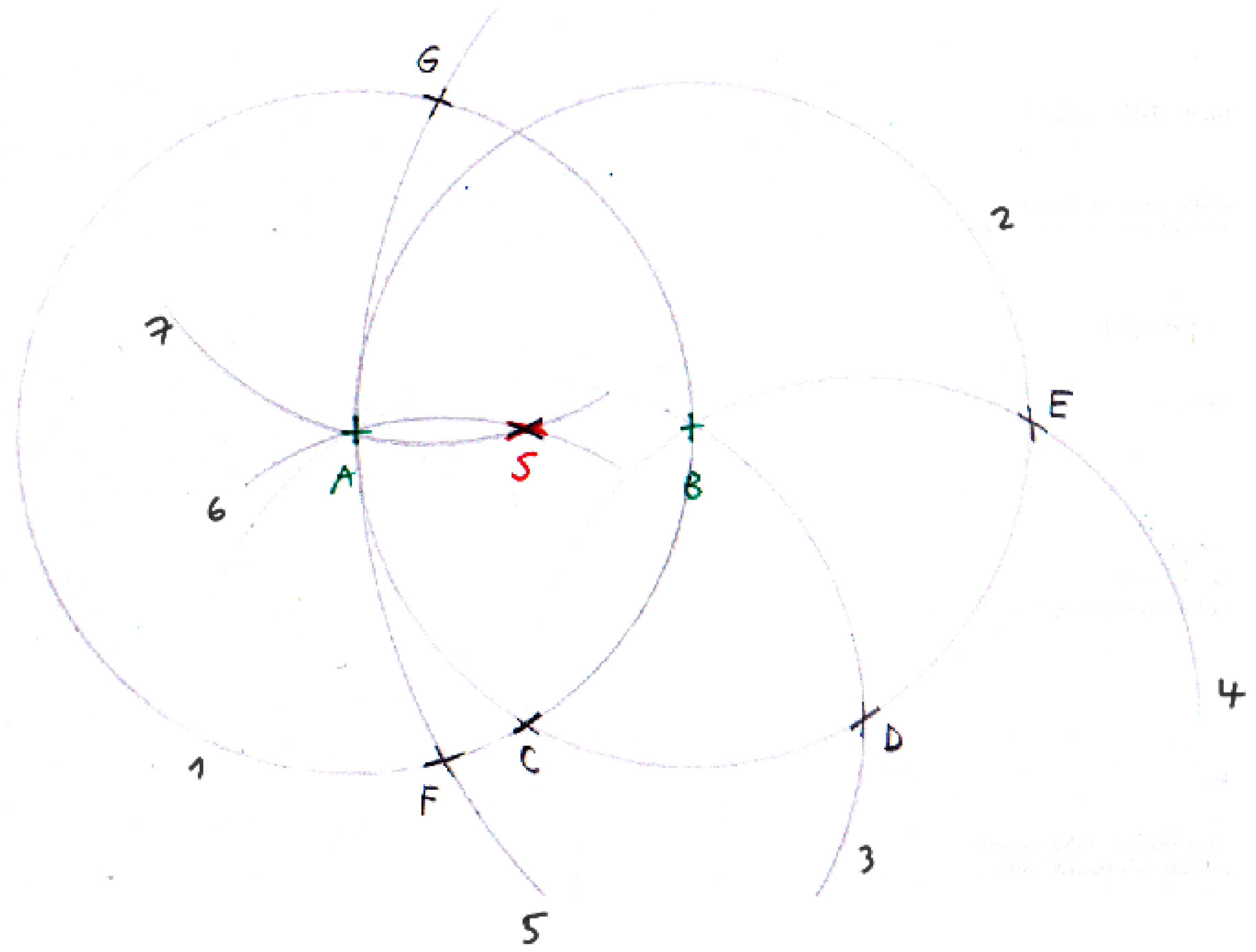
prochází C = p ∩ q

DŮKAZ "B jako ORTOCENTRUM"



(výšky lib. △ mají společný bod)

(D) STŘED ÚSEČKY AB ... bez pravítka



KONSTR

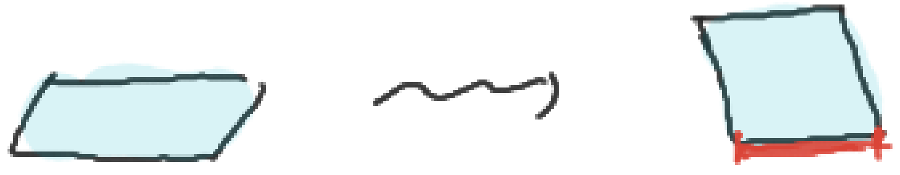
- kružnice 1, 2, 3, 4
  shodné (poloměr = AB)
  ⇝ C, D, E
- kružnice 5
  (střed E, polom. = EA)
  ⇝ F, G
- kružnice 6, 7
  shodné (polom. GA = FA)
  ⇝ S = STŘED AB

DŮKAZ

- A, B, E kolin...
  (shodné △)
- AS : AB = ... = 1 : 2
  (podobné △)

II. OBSAHY A KVADRATURY . .

(A)  . . rovnoběžník

(B)  . . . + daná strana

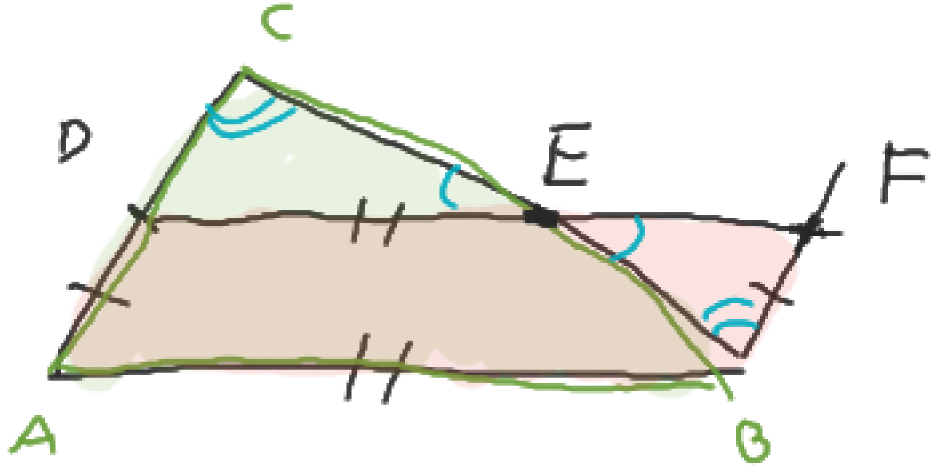
(C)  . . . čtverec

základní úlohy

(D)  → OBECNÁ KVADRATURA!

(E)  . . . stříhání → dodatek

(A) ROVNOBĚŽNÍK (OBDÉLNÍK)
SE STEJNÝM OBSAHEM JAKO DANÝ TROJÚHELNÍK ABC



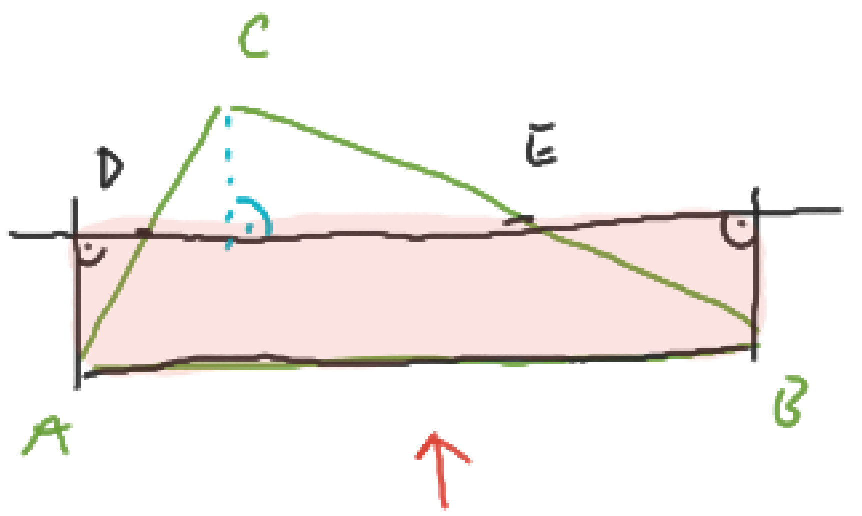
KONSTR.

1. D, resp. E středy stran
2. F doplň. rovnoběžník
3. obsah ▱ ABFD = obsah △ ABC

DŮKAZ

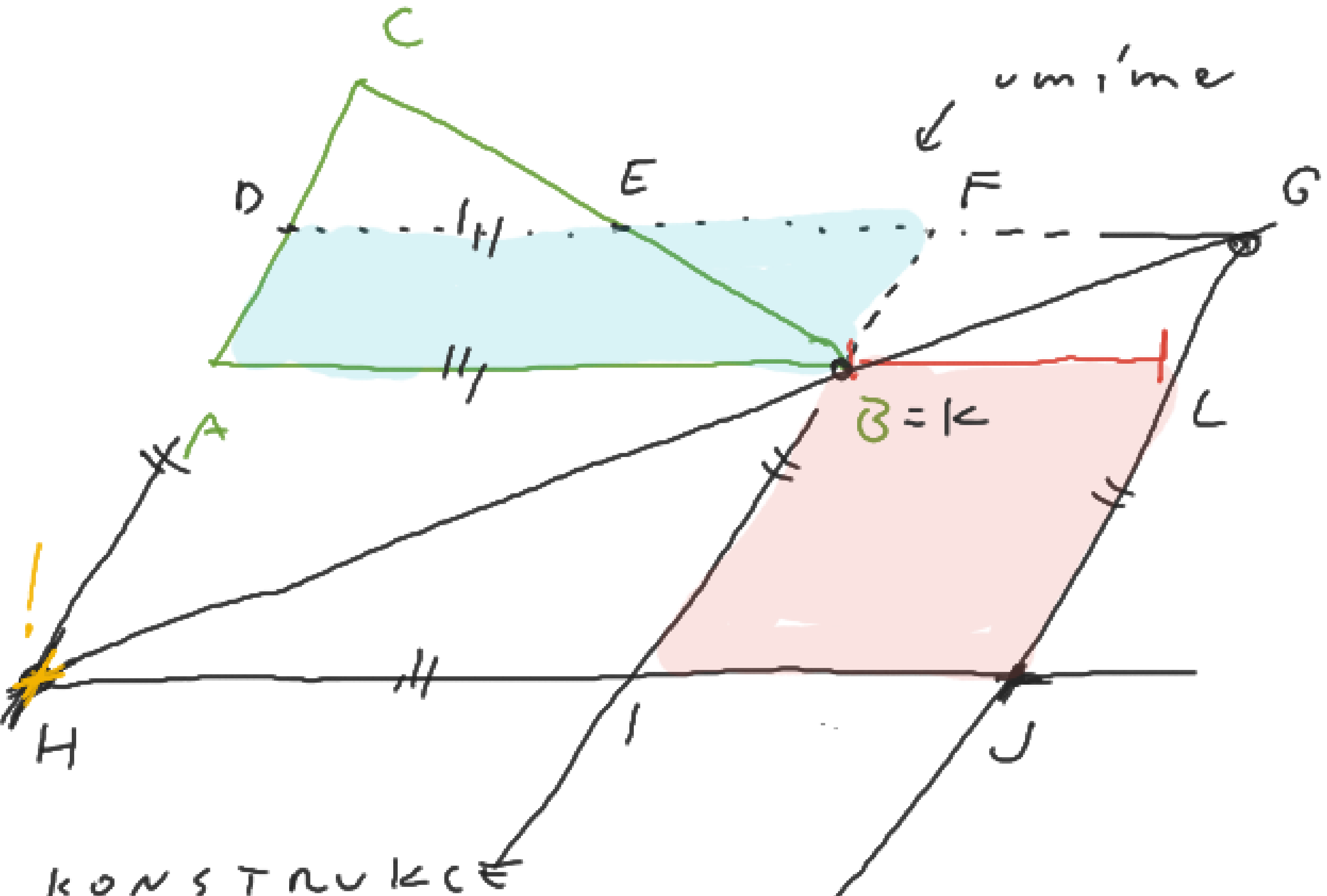
shodné △ DEC ≅ △ FEB

[USU]



varianta s OBDÉLNÍKEM

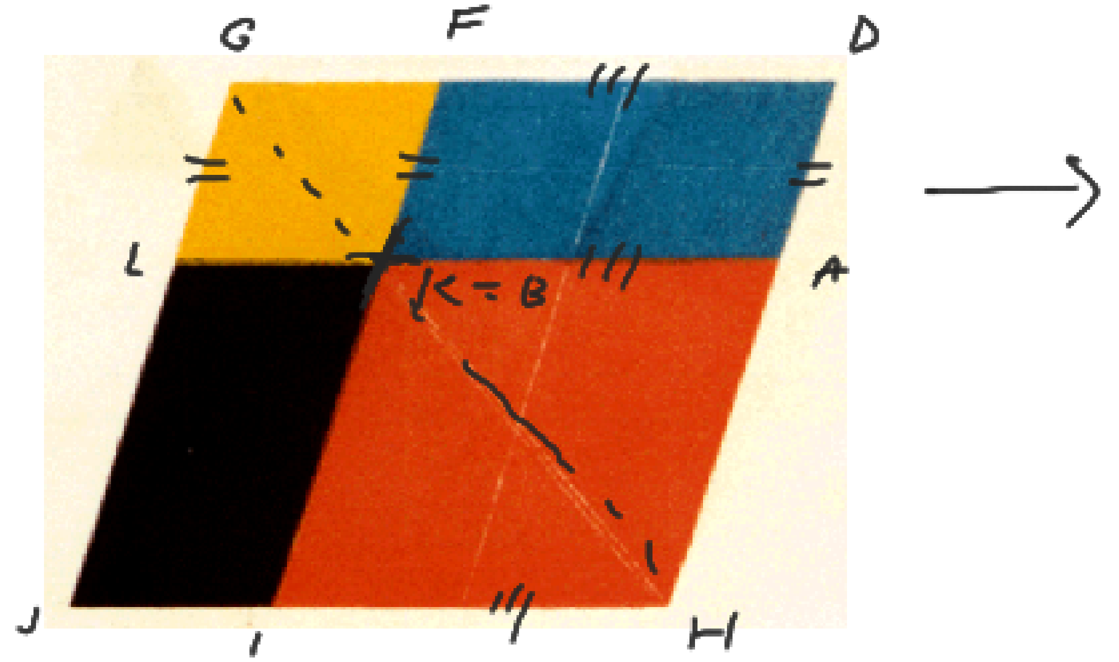
(B) ROVNOBĚŽNÍK (OBDÉLNÍK) S DANOU STRANOU A SE STEJNÝM OBSAHEM JAKO DANÝ TROJÚHELNÍK ABC

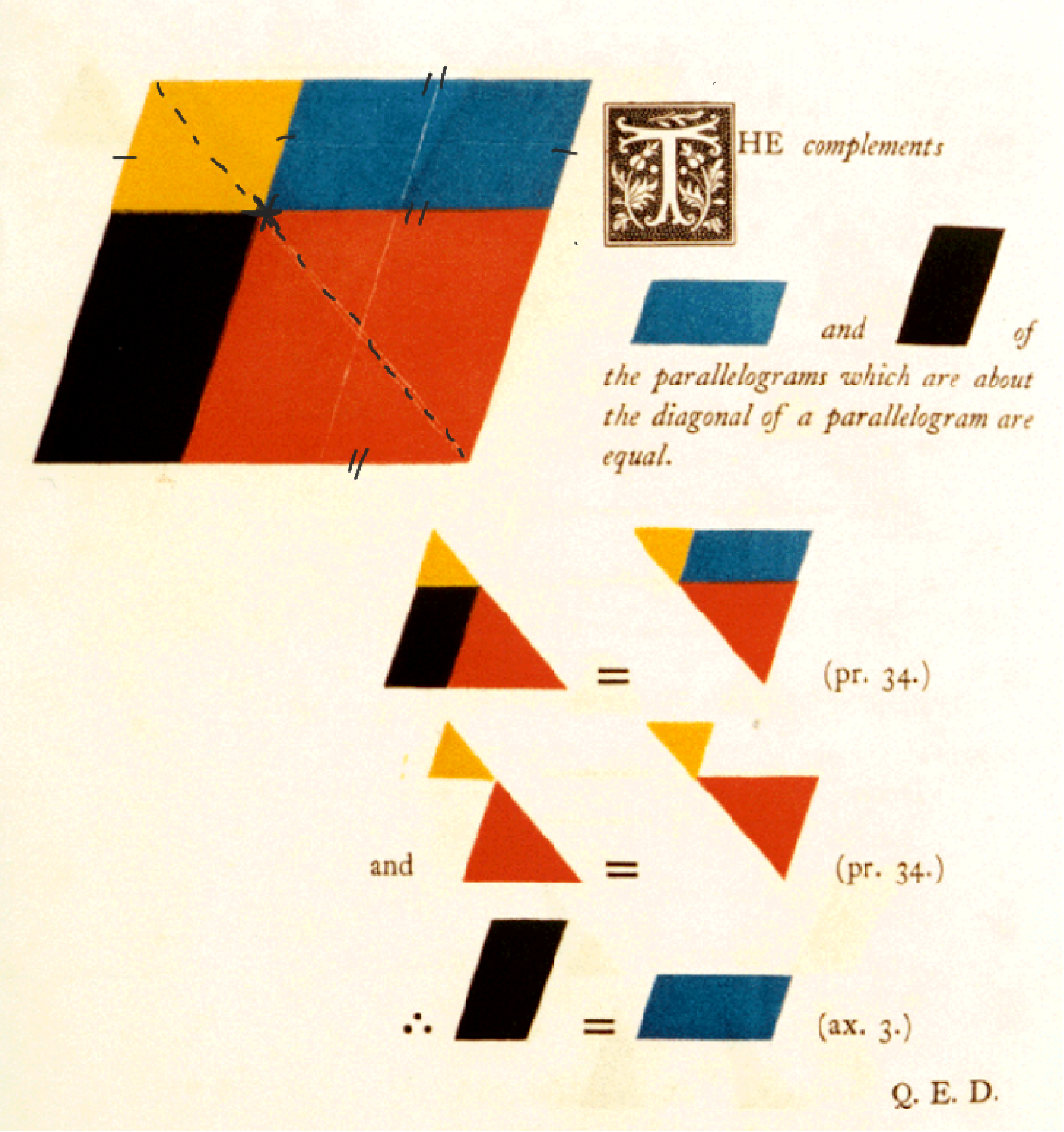


KONSTRUKCE

1. ▱ ABFD ... podle (A)
2. KL přiloženo k AB ..
3. G .. doplň rovnoběžník
4. H .. průs. $GB \cap AC$ ⇝ doplň. I, J
5. obsah ▱ KLJI = obsah △ ABC

Důkaz →





THE *complements* and *of the parallelograms which are about the diagonal of a parallelogram are equal.*

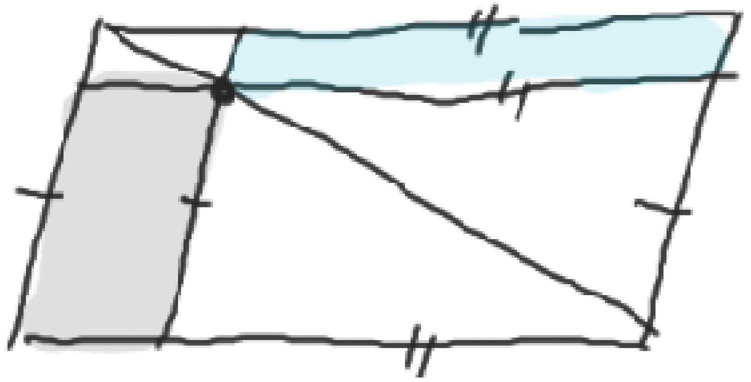
= (pr. 34.)

and = (pr. 34.)

∴ = (ax. 3.)

Q. E. D.

POZNÁMKY K DŮKAZU

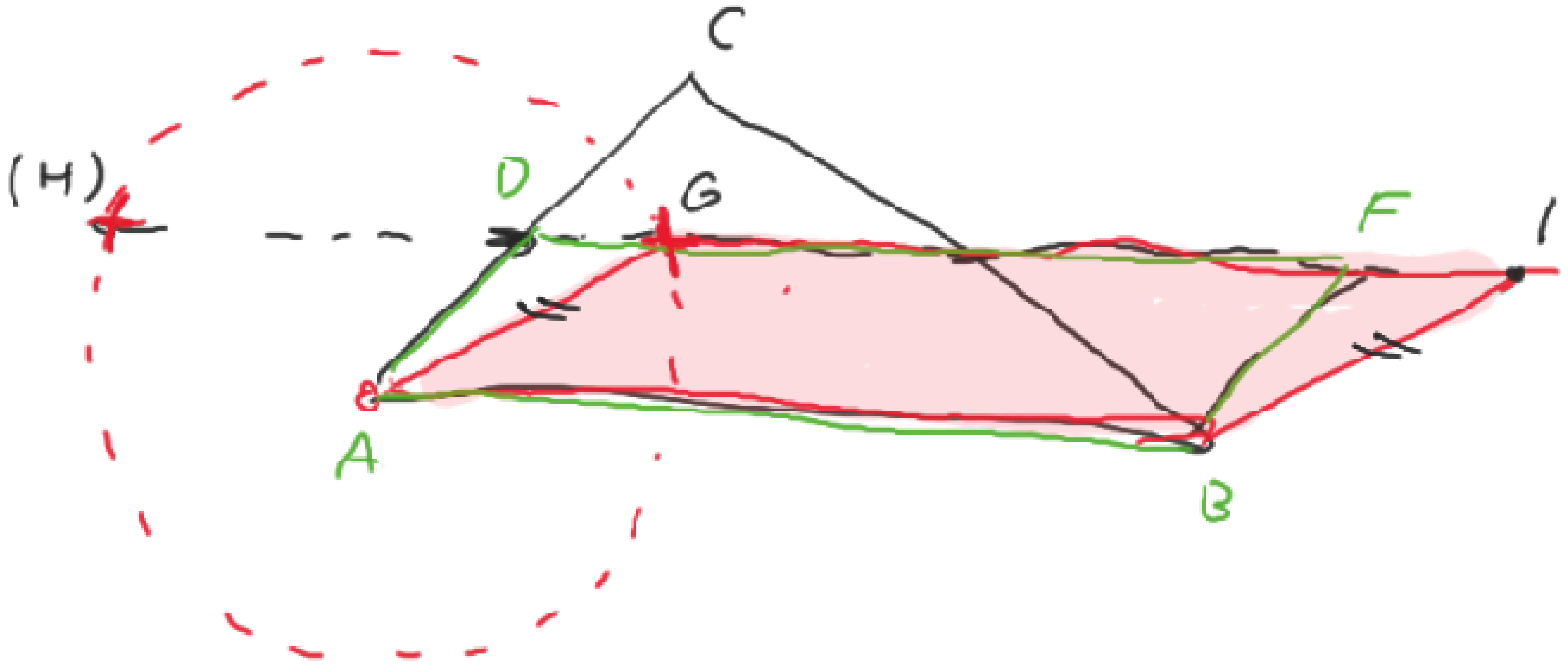


SHODNÉ Δ

[USU]

ad (B) JINÉ ŘEŠENÍ

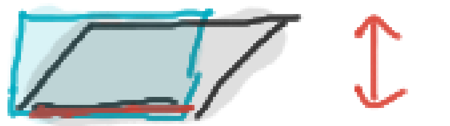
* PŘEDP. $KL \geq \frac{1}{2} AC$:



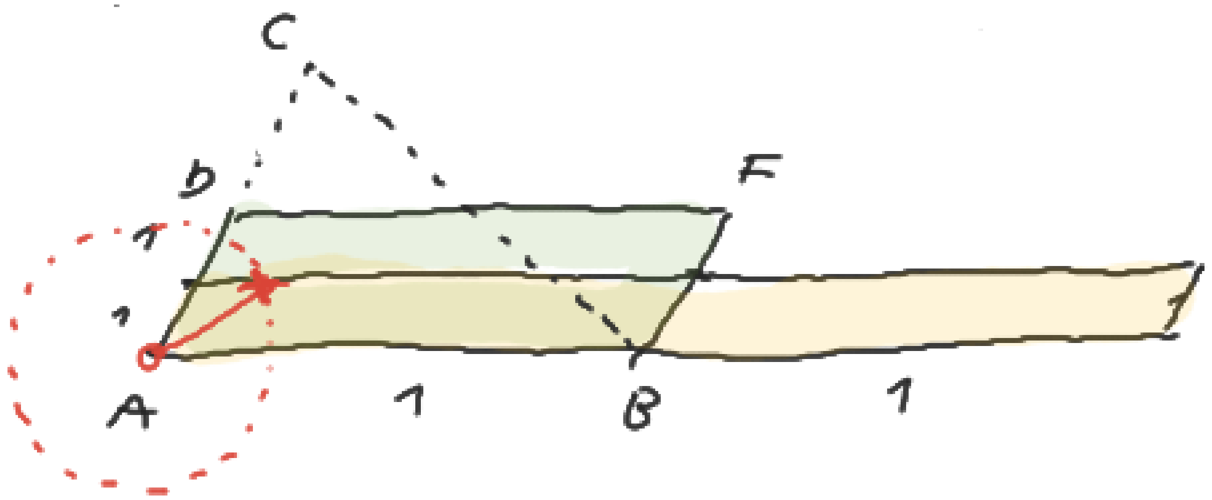
KONSTR.

1. ABFD .. podle (A)
2. kružnice střed = A
   polom. = KL ⇝ G, H
3. I .. doplň. rovnoběžník
4. obs. ABIG = obs. ABFD

DŮKAZ

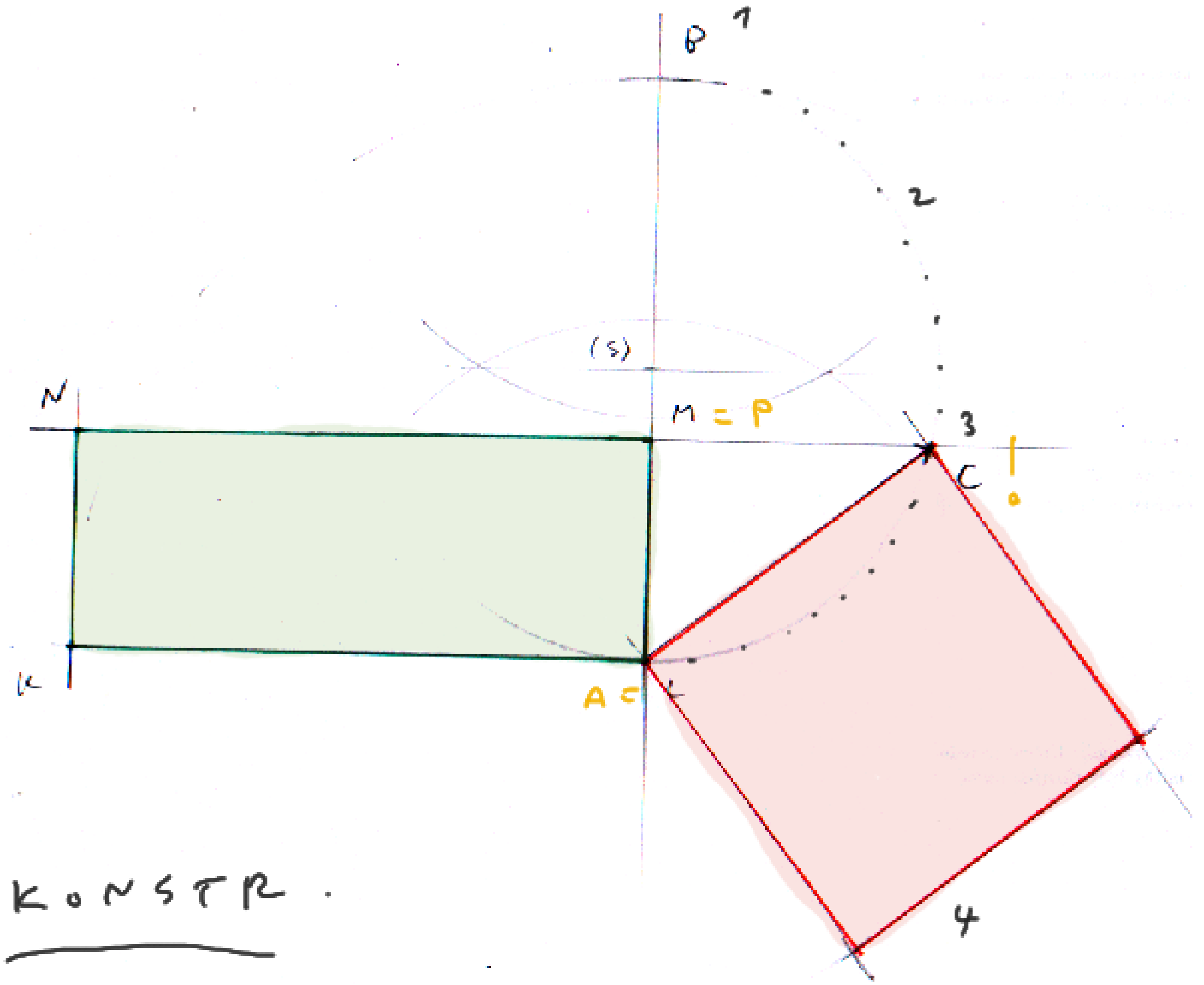


* POKUD $KL < \frac{1}{2} AC$:



... dělíme, dokud je třeba ...

(c) ČTVEREC SE STEJNÝM OBSAHEM JAKO DANÝ ROVNOBĚŽNÍK (OBDÉLNÍK) KLMN



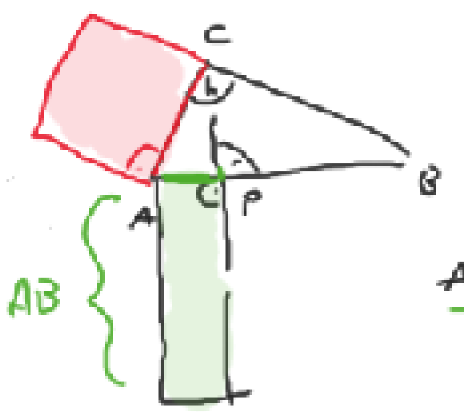
KONSTR.

1. B na přímce LM .. LB = LM
2. "Thalet. kružnice" s průměrem LB
3. C = průs. kružnice ∩ NM
4. LC = strana čtverce ..

k DŮKAZU →

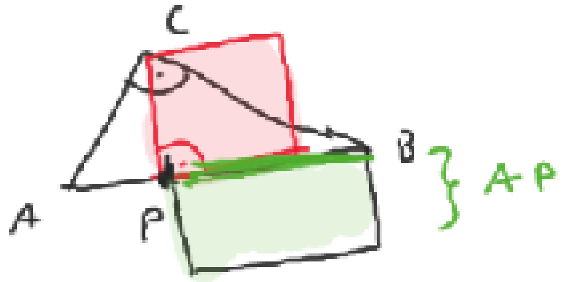
(a) Eukleidovy věty !!

- o odvěsně



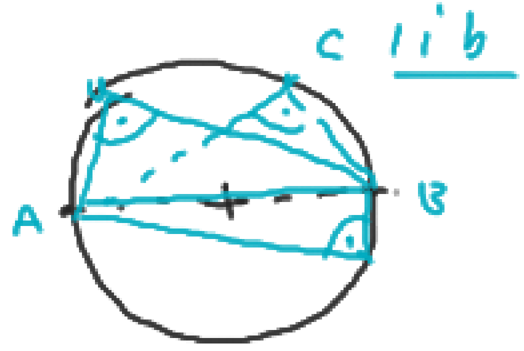
$AP \cdot AB = AC^2$

- o výšce

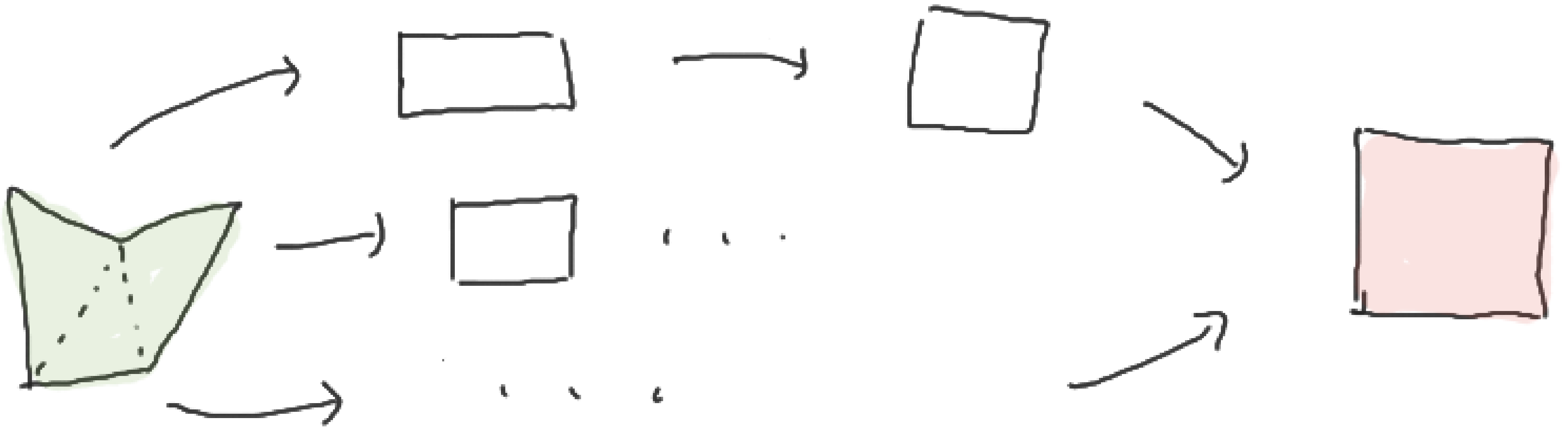


$AP \cdot PB = PC^2$

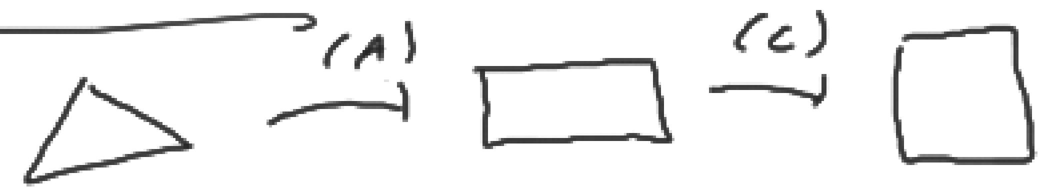
(b) Thaletova věta



(D) KVADRATURA OBECNÉHO MNOHOÚHELNÍKU



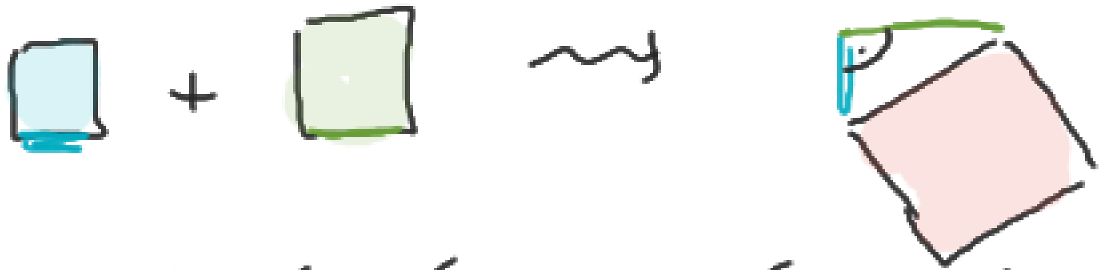
UMÍME



PROBLÉM

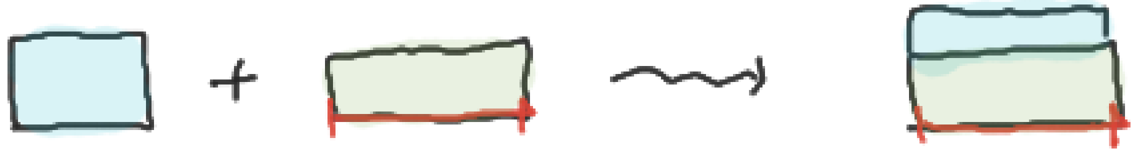
Jak sčítat dílčí kroky?

NÁPAD 1 ... sčítání čtverců



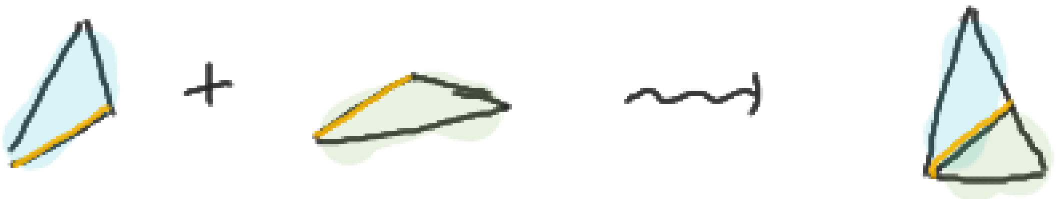
← Pythagorova věta

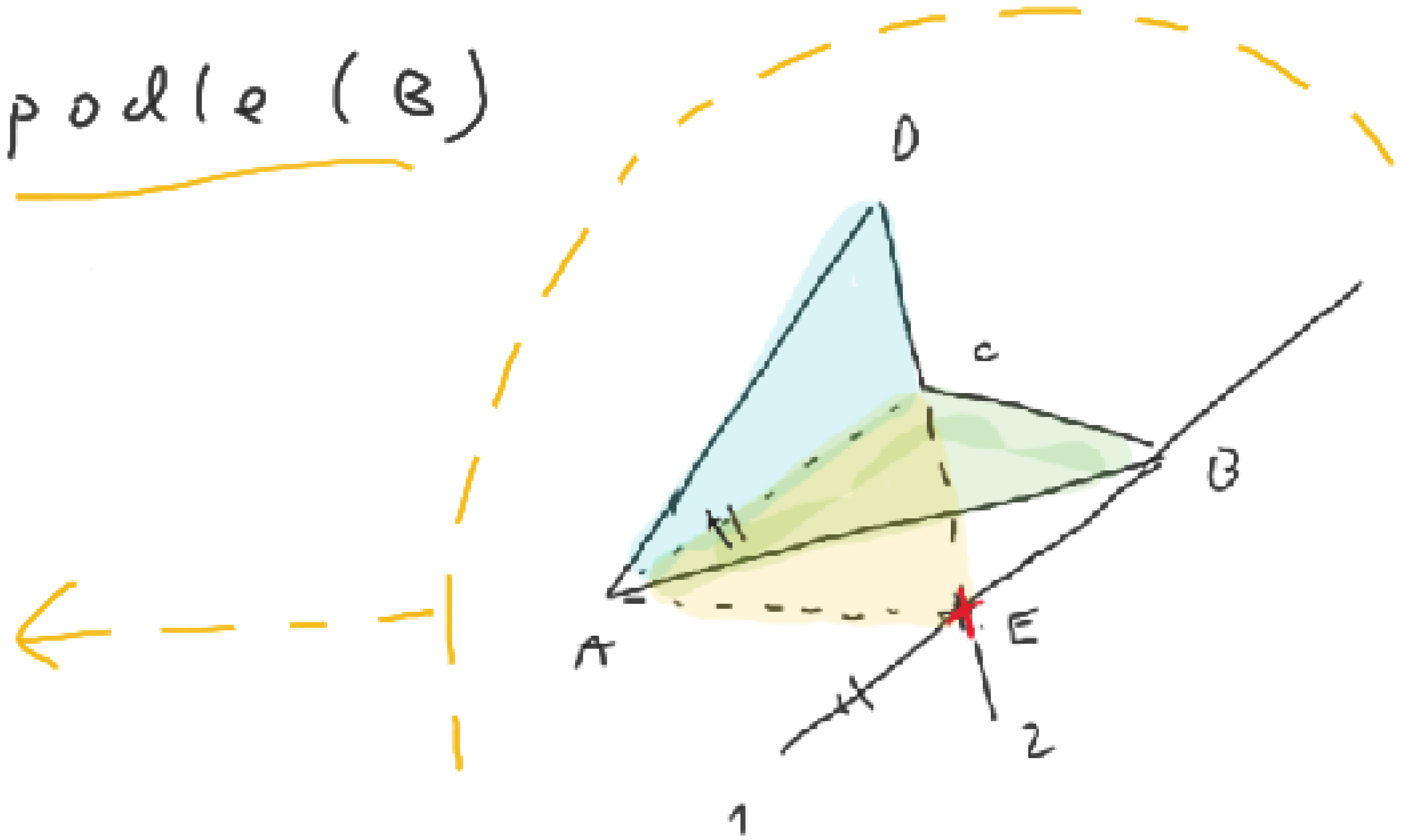
NÁPAD 2 ... sčítání obdélníků



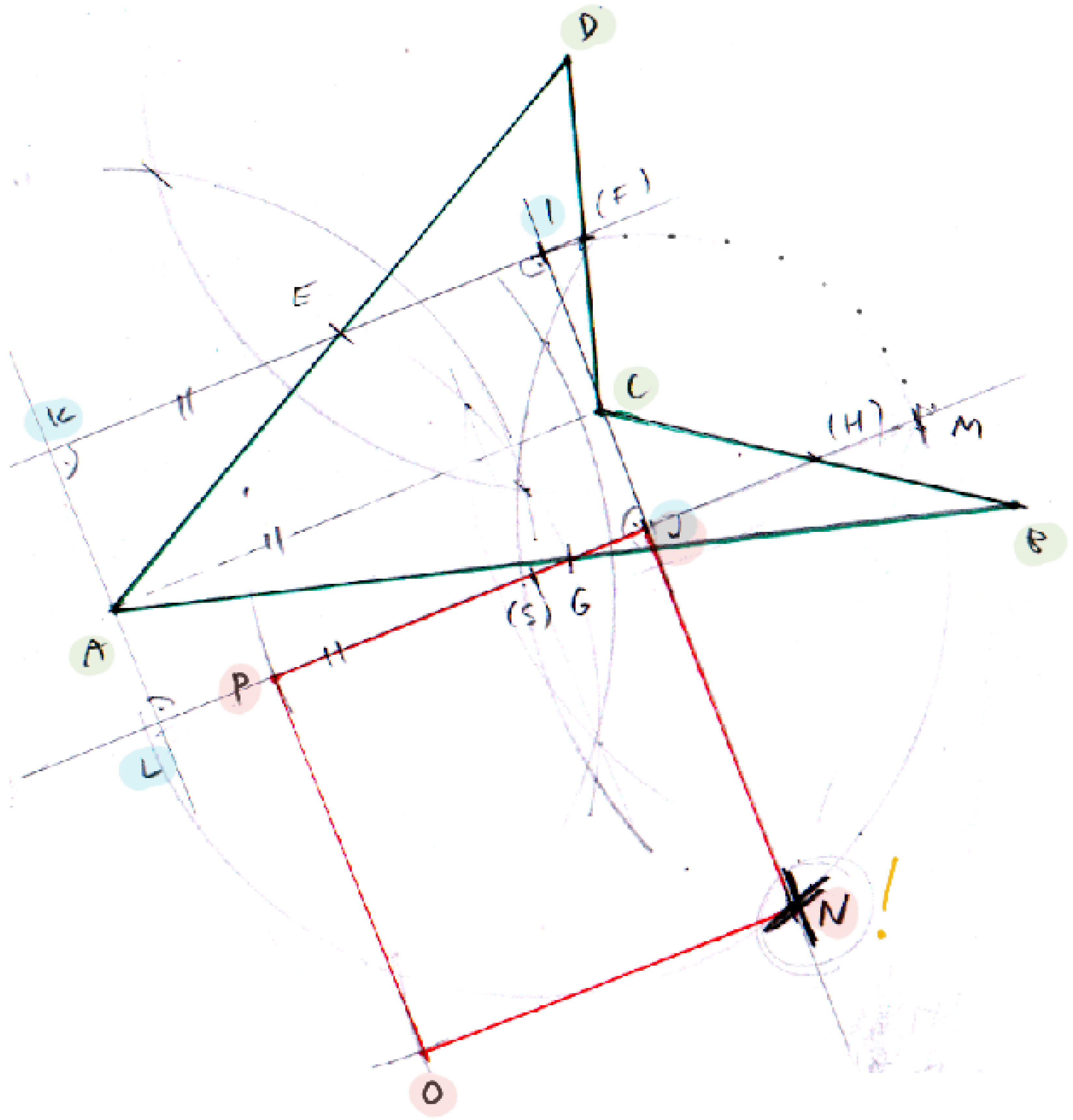
← podle (B)

NÁPAD 3 ... sčítání trojúhelníků





ad (D) .. 4-úhelník ABCD .. "první krok vzhledem ke SPOLEČNÉ straně"



① OBDÉLNÍKY vzhledem k AC ..

- E, F, G, H ... středy stran
- I, J, K, L ... paty kolmic

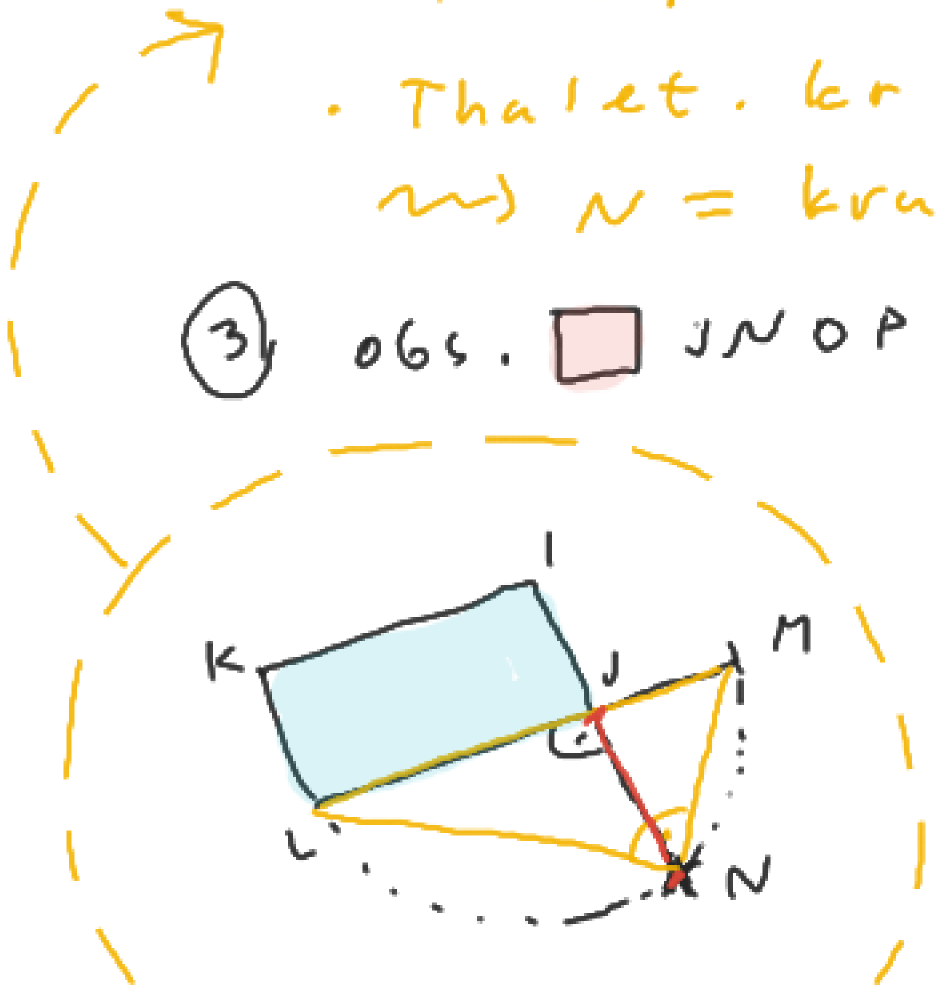
⇝ obs. ▭ IJKL = obs. ABCD

② ČTVEREC vzhledem
E.v. o výšce ..

- M na přímce LJ ... JM = JI
- Thalet. kr. s průměrem LM

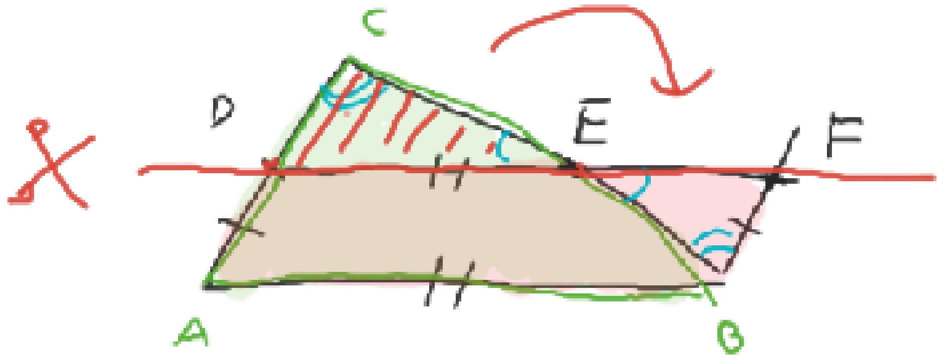
⇝ N = kružnice ∩ IJ

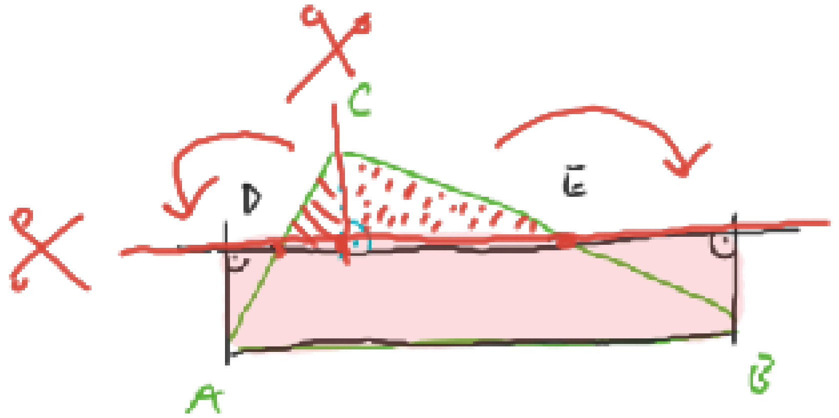
③ obs. ▭ JNOP = obs. ▭ IJKL

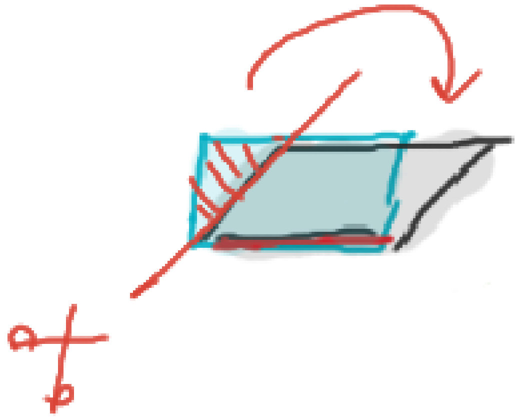


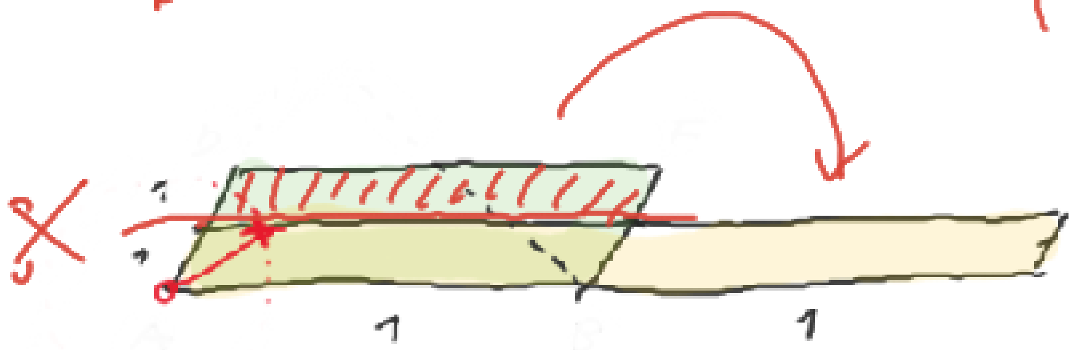
(E) DODATEČNÉ STŘÍHÁNÍ

SNADNÉ

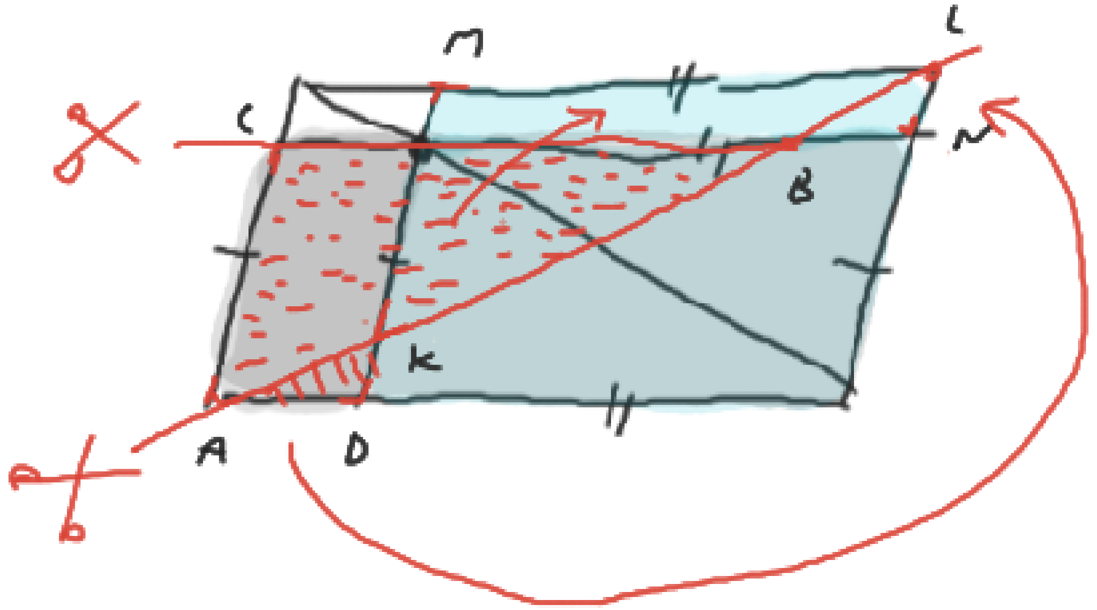






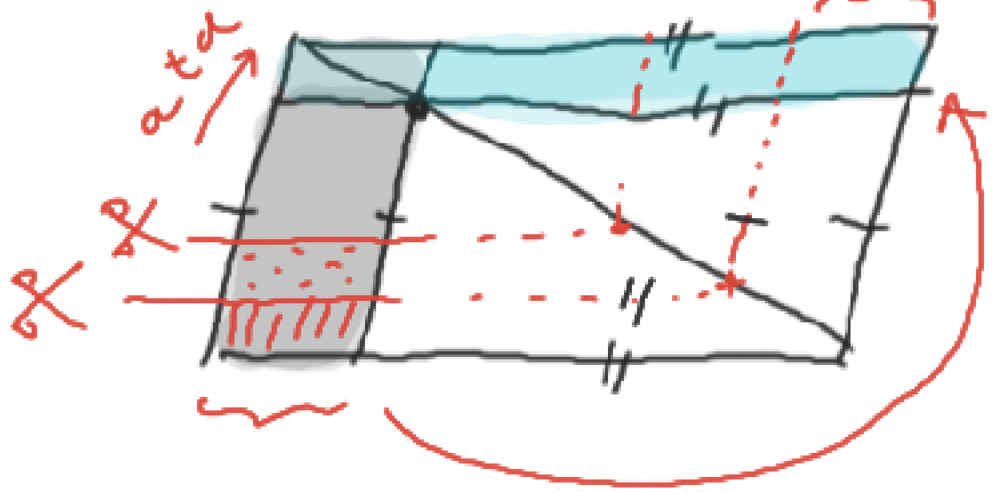


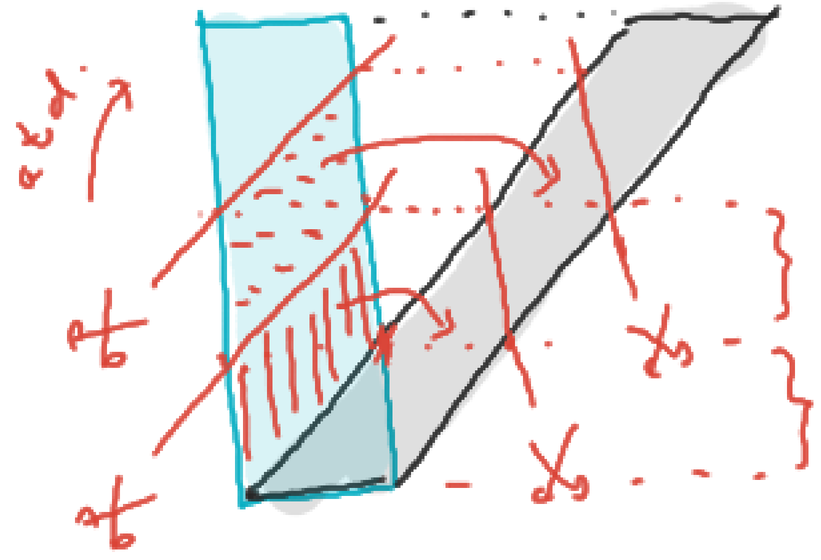
NOVÉ NÁPADY



[△ABC = △KLM
△ADK = △BNL]

ITERACE





III. ZLATÝ ŘEZ A "GEOMETRICKÁ ALGEBRA"

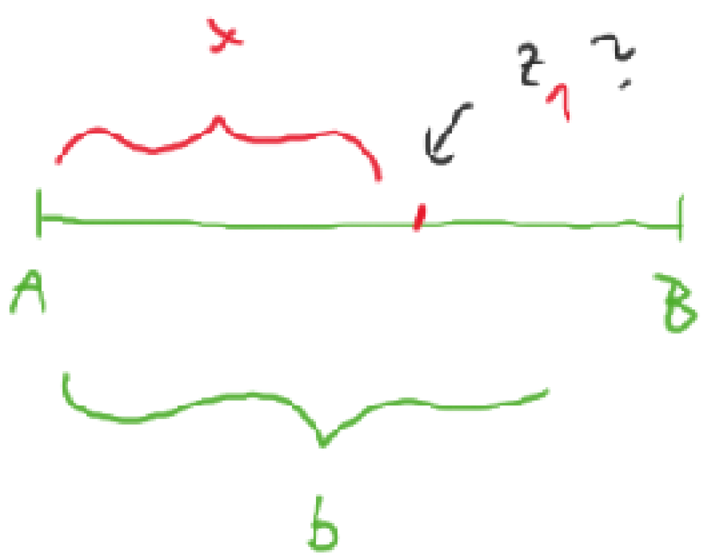
(A) ZLATÝ ŘEZ $\rightsquigarrow$ spec. kvadratická rovnice

(B) .. DRUHÝ KOŘEN ?

(C) DALŠÍ SESTROJITELNÉ VELIČINY $\leftarrow$ obecné nápady $+, -, \cdot, :, \sqrt{}$

(D) OBECNÁ KVADRATICKÁ ROVNICE $\rightsquigarrow$ DÚ

(A) ZLATÝ ŘEZ — VLASTNÍ KONSTRUKCE



<u>Def</u>. . . $AZ : ZB = AB : AZ$

$$x : (b-x) = b : x$$

⋮

KVADR. ROVNICE

$$\boxed{x^2 + bx - b^2 = 0}$$

$$D = b^2 + 4b^2 = 5b^2 > 0$$

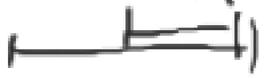
. . . dva ℝ různé

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot b$$

$$x_1 > 0 \quad , \quad x_2 < 0$$

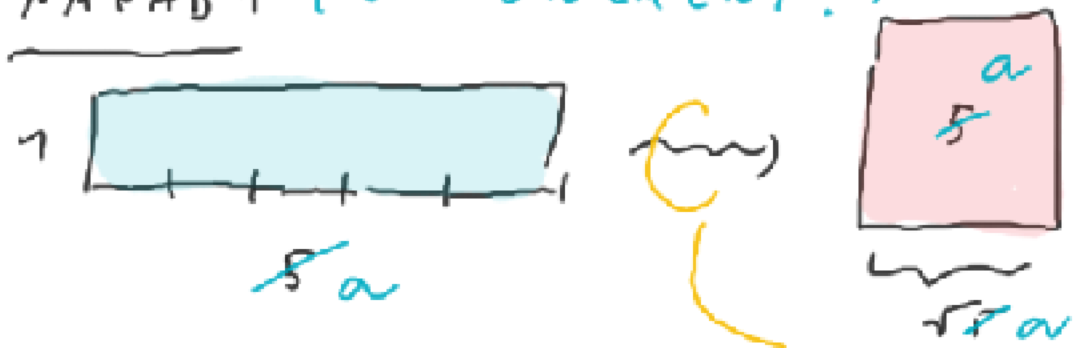
Z_1 Z_2 viz (B)

VLASTNÍ KONSTRUKCE ?

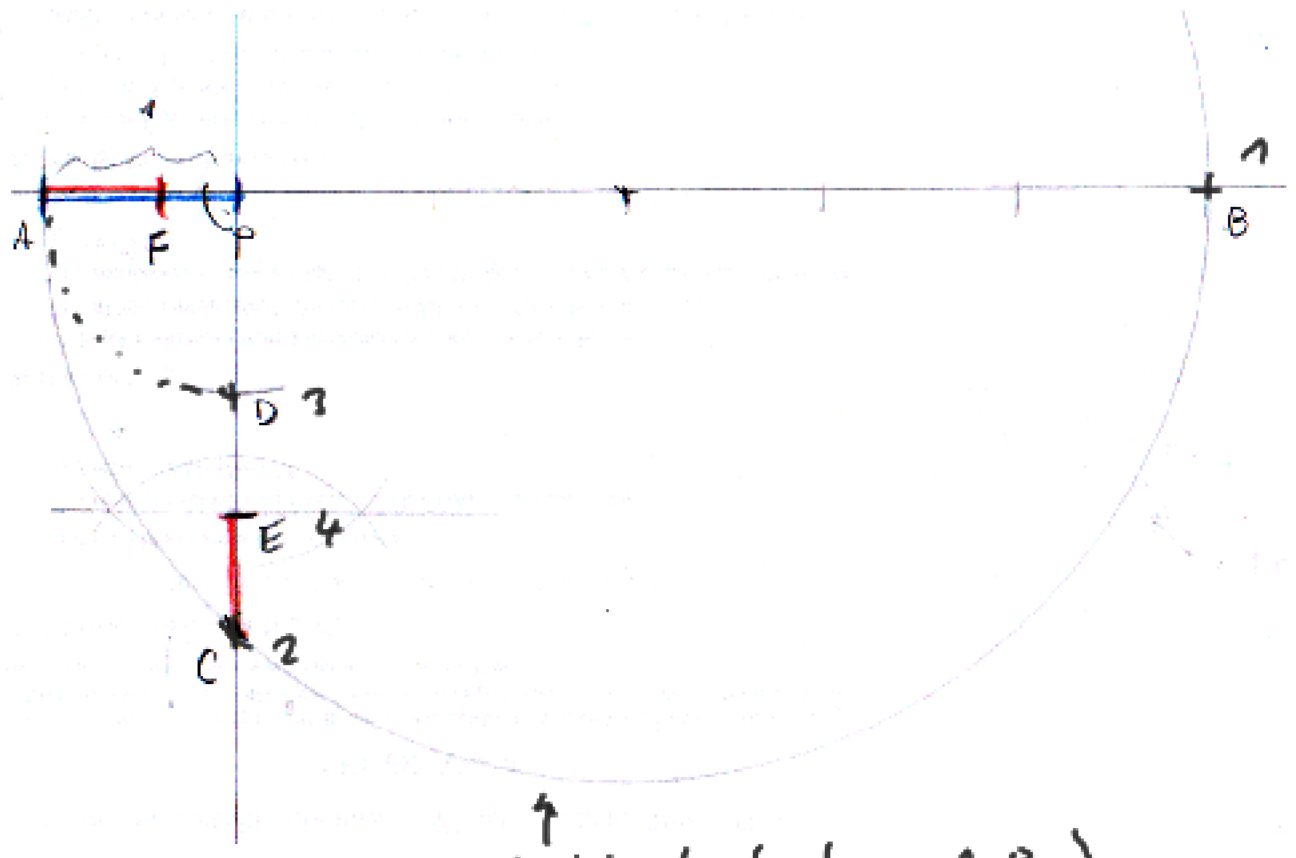
- $1 \rightsquigarrow \sqrt{5}$ . . . viz dále
- rozdíl  . . . úsečky na přímce ✓
-  . . . střed úsečky ✓

ad (A) "ODMOCNINA" ⇝ CELÁ KONSTRUKCE

NÁPAD 1 (UNIVERZÁLNÍ!)



Eukl. věty...



(Thaletova kr. AB)

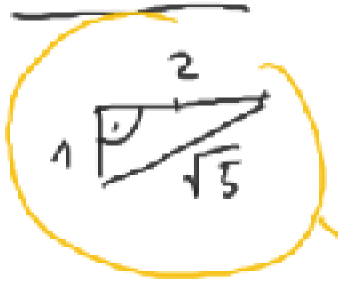
START $|AP| = 1$

1) B : $|PB| = 5$
2) C : $|PC| = \sqrt{5}$!

... o výšce

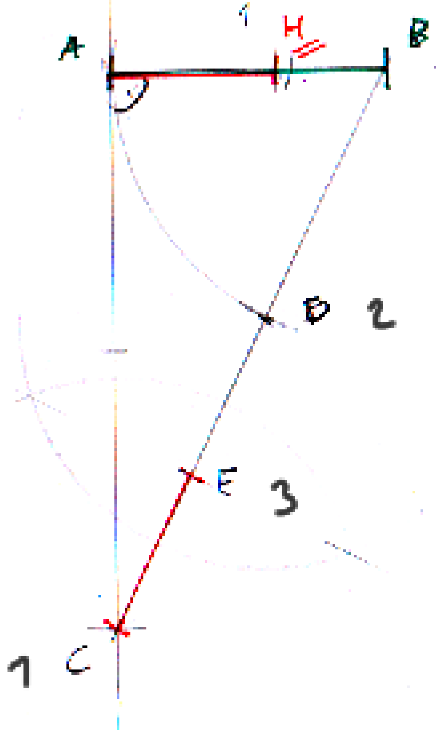
3) D : $|DC| = \sqrt{5} - 1$
4) E : $|EC| = |ED| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

NÁPAD 2 (SPEC)



$5 = 1^2 + 2^2$

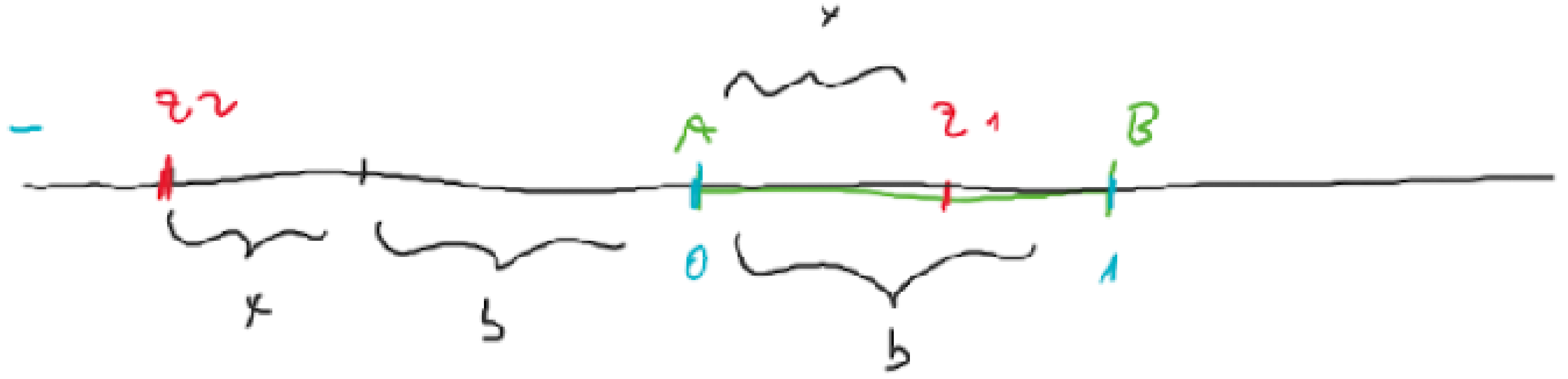
Pyth. věta



START $|AB| = 1$

1) C : $|AC| = 2$ ⇝ $|BC| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$!
2) D : $|DC| = \sqrt{5} - 1$
3) E : $|EC| = |ED| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(B) DRUHÝ KOŘEN A SOUVISLOSTI



$$x^2 + bx - b^2 = 0$$

z_1 ~ … $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

z_2 ? … $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$

body ⟵ ⟶ ℝ čísla

POZN (ZLATÝ ŘEZ)

- z_1 = zlatý řez AB $\iff$ $x : (b-x) = b : x$

$\Updownarrow$? $\qquad$ $\Updownarrow$ ~~?~~ snadné cvičení!

- A = zlatý řez z_2B $\iff$ $(x+b) : (b) = (2b+x) : (x+b)$

$\Updownarrow$

⋮

atd.

geometrie ⟵ ⟶ algebra

OBECNĚ (VIETE!)

$$x^2 + bx + c = 0$$

x_1, x_2 … kořeny

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= c \\ x_1 + x_2 &= -b \end{aligned}}\ !$$

$$\underbrace{}$$

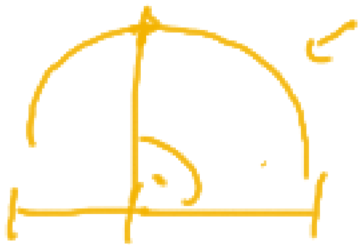
$$x_2 = -x_1 - b\ !$$

(c) SESTROJTE NAPŘ. $a\sqrt[3]{b}$, $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, $\sqrt{a-b\sqrt{c}}$, ...

... vzhledem k $\overset{a}{\vdash\!\!-\!\!\dashv}$ $\overset{b}{\vdash\!\!-\!\!-\!\!\dashv}$ $\overset{c}{\vdash\!\!\dashv}$ a $\overset{1}{\vdash\!\!-\!\!\dashv}$!

snadné

Thalet



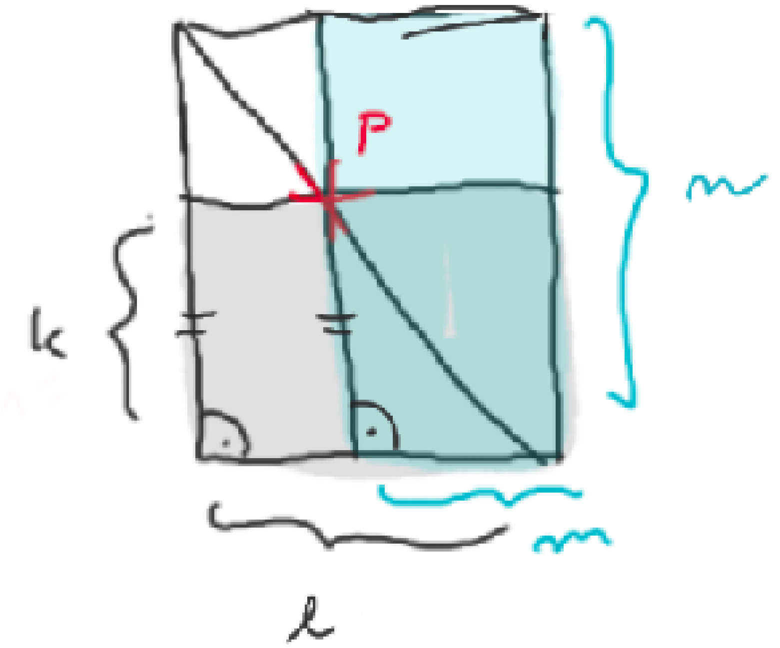
$+$, $-$ ... úsečky na přímce

$\sqrt[2]{}$ ... Eukleid. věty (spec. Pyth...)

⇝ $\sqrt[4]{} = \sqrt{\sqrt{}}$, $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ ✓, ALE: $\sqrt[6]{} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{}}$ ✗

$\cdot$, $:$ ... OBSAHY, resp. PODOBNOSTI:

jediné dovolené operace!



$\boxed{k \cdot l = m \cdot m} \iff \boxed{k : m = m : l}$

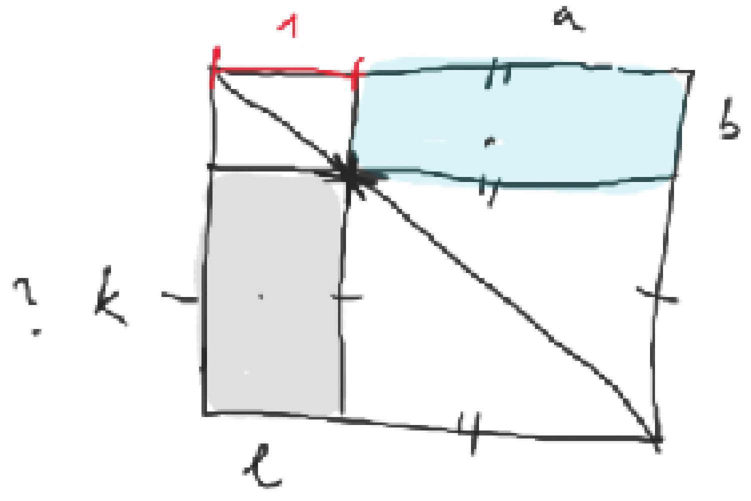
..., oboje lze realizovat MNOHA způsoby!

ad (c) "SOUČINY, PODÍLY"

NÁPAD OBSAHY

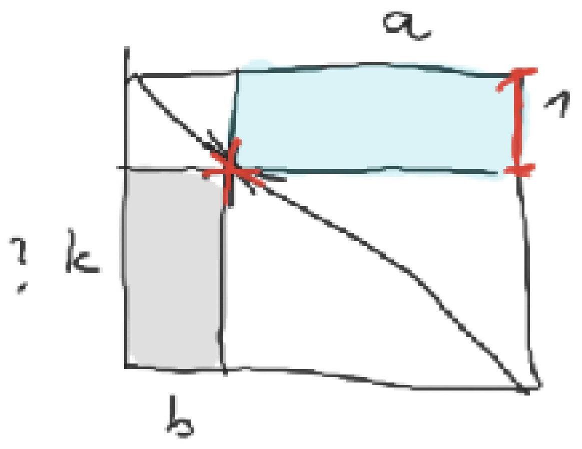
viz cvičení II.

jiná interpretace téhož tvrzení



$$a \cdot b = k \cdot l \quad (? \;\; 1)$$

$$k = a \cdot b$$



$$k \cdot b = a \cdot 1$$

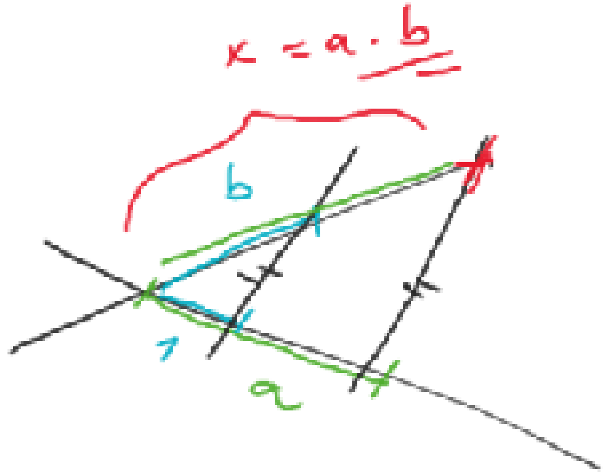
$$k = \frac{a}{b}$$

NÁPAD PODOBNOSTI

$$x : a = b : 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x = b \cdot a \quad ✓$$

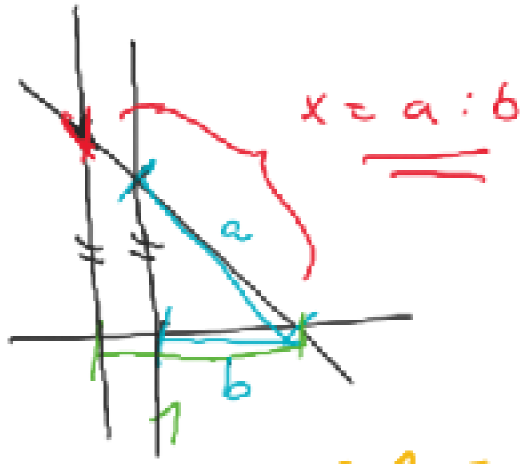


OBECNÉ SCHÉMA

1.) známé věci (1, a, b) na ramena lib. úhlu

2) spoj. SPRÁVNÉ konce

3) ROVNOBĚŽKA ⇝ X



$$x : 1 = a : b \quad ✓$$

(1) POZN. K OBECNÉ KVADRATICKÉ ROVNICI

- $\pm a x^2 \pm b x \pm c = 0 \iff \pm x^2 \pm \frac{b}{a} x \pm \frac{c}{a} = 0$
  $a \neq 0$

- $x^2 + bx + c = 0$ má $\mathbb{R}$ kořeny $\iff D = b^2 - 4c \geq 0$

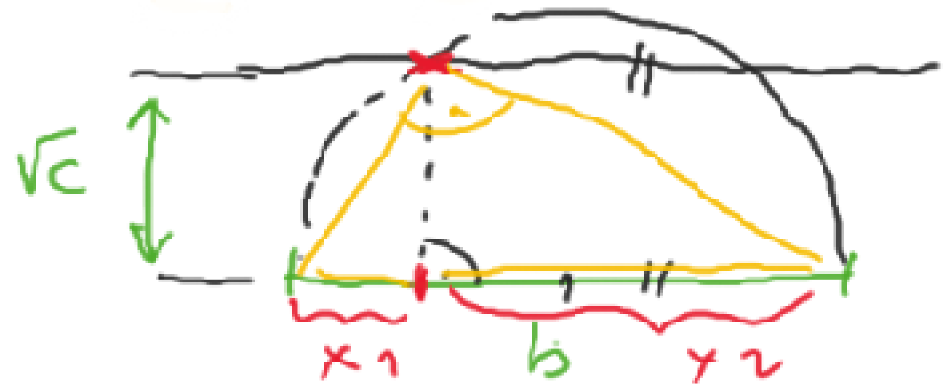
- kontrola D pomocí
  a) pomocí úseček .... $b^2 - 4c = ?$
  b) pomocí obsahů .... $b^2 - 4c = ?$

- zbytek např. $x = \frac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{D}\right)$ ....

- VIETOVY VZTAHY .... $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}}$

- př. $x^2 - bx + c = 0$, $b, c > 0$

$x_1 + x_2 = b \longrightarrow$

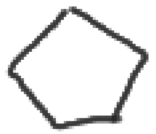


$\longleftarrow$ Eukl. v o výšce
$x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{c})^2 = c$ ✓

IV. PRAVIDELNÉ MNOHOÚHELNÍKY

(A) ÚVODNÍ POČTY

- úhly, strany, ...

(B) PRAVIDELNÝ 

- možnosti, zkratky, ...

(C) DALŠÍ ...

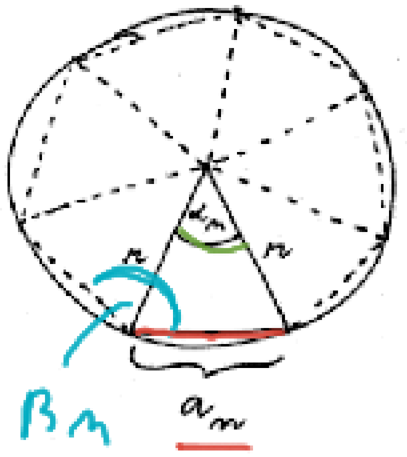
- nové kombinace předch. nápadů

(A) DOKAŽTE ...

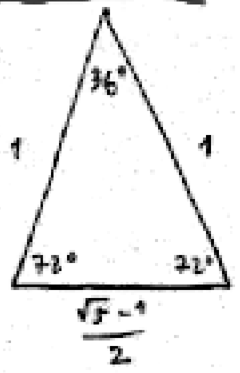
(1) Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360^\circ/n$.

(2) Velikost strany pravidelného n-úhelníku veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



! (3) spec.



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36^\circ$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72^\circ$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

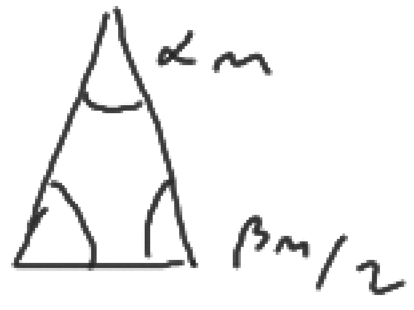
Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \cdots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

(4) Důsl.

5-, resp. 10-úhelník LZE sestrojit a umíme vymyslet JAK!!

ad (1) vrcholový úhel

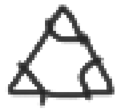


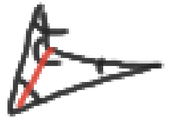
$\beta_n = ?$

$$\boxed{\alpha_n + \frac{\beta_n}{2} + \frac{\beta_n}{2} = 180^\circ}$$

$\beta_n/2$

$$\begin{aligned}\beta_n &= 180^\circ - \alpha_n \\ &= 180^\circ - 360^\circ/n \\ &= 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &= 180^\circ\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}(n-2)\,180^\circ\end{aligned}$$


180°

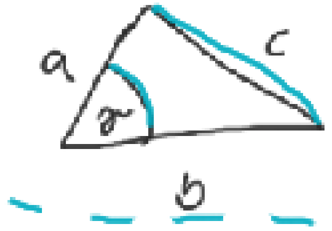

360°


540°

⋮

součet úhlů ob. n-úhelníku

(A) … POKRAČOVÁNÍ



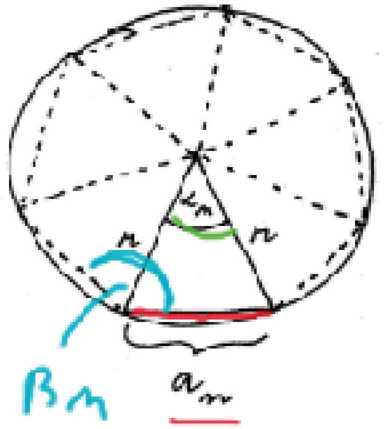
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

KOS. VĚTA

(1) Středový úhel v pravidelném n-úhelníku je $\alpha_n = 360°/n$.

(2) Velikost strany pravidelného n-úhelníku veps. do kružnice s poloměrem r je (podle kosinové věty)

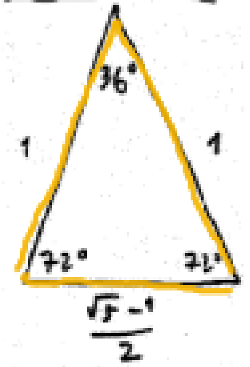
$$a_n = r\sqrt{2 - 2\cos\alpha_n}.$$



$a_n^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\alpha_n$

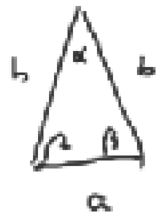
$a_n^2 = r^2(2 - 2\cos\alpha_n)$ ✓

(3) spec.



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36°$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72°$.

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!



$\beta = 2\alpha \iff a : b =$ zlatý

def — věta

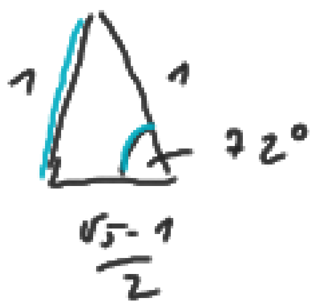
Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty) $\cos 72° = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. !

$\cancel{1^2} = \cancel{1^2} + \left(\frac{\sqrt5 - 1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)\cos 72°$

$\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^{\cancel{2}} = 2\left(\cancel{\frac{\sqrt5-1}{2}}\right)\cos 72° \implies \cos 72° = \frac{\sqrt5 - 1}{4}$ ✓



Po dosazení dostáváme

$$a_5 = r\sqrt{2 - \frac{\sqrt5 - 1}{2}} = \dots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt5}.$$ ✓

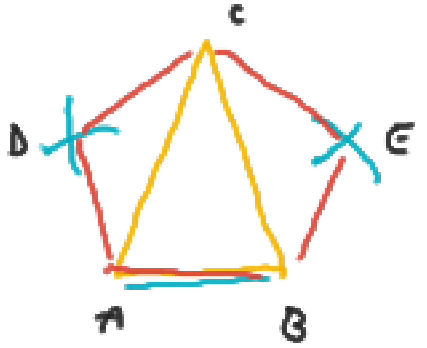
$2 \cdot \cos 72°$!

$r\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{2}}$

(B) SESTROJTE pravid. 5-úhelník

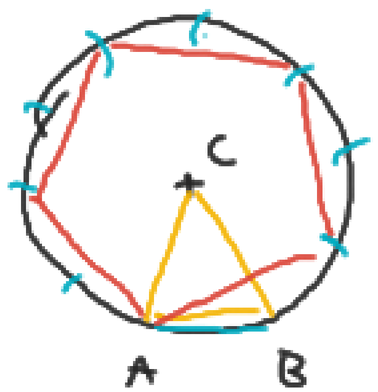
NÁPAD 1 .. pomocí předch. alg. vyjádření $a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

NÁPAD 2 ..



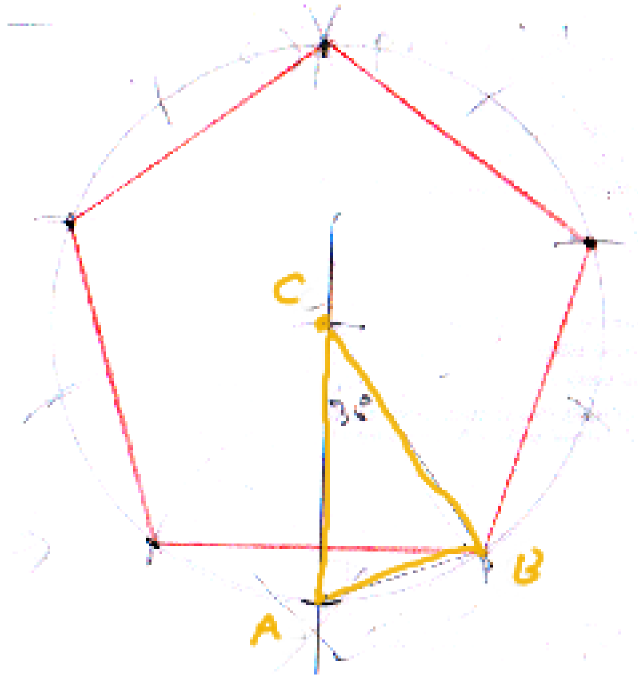
1) zlatý $\triangle ABC$
2) ⇝ strany $AD = DC = CE = EB = AB$
(⇝ úhlopříčky $AE = ED = DB = BC = CA$)

NÁPAD 3 ..

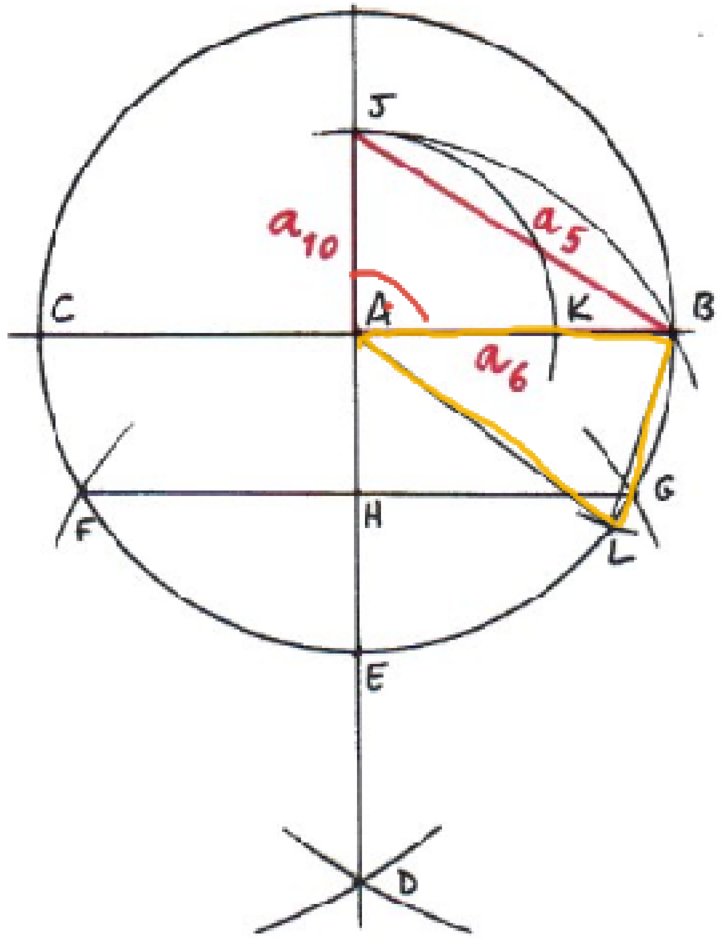


1) zlatý $\triangle ABC$
2) ops. kružnice ($r = CA = CB$)
3) ⇝ 10-úhelník
⇝ 5-úhelník (vynech liché vrcholy)

AB : AC =
zlatý poměr



(B) ZKRATKA ... navazující na předch. NÁPAD 3:



1) konstr. AB ⇝ E ⇝ H ⇝ J

... klas. konstrukce ZLATÉHO ŘEZU

2) zlatý $\triangle ABL$ (... $AJ = a_{10}$)

⋮

ZKRATKA

$$\boxed{BJ = a_5 = \text{strana prav. 5-úh. vepsaného do kružnice } r = AB}$$

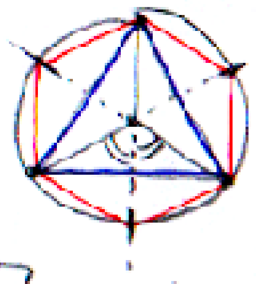
DŮKAZ ... Pyth. věta $\triangle BAJ$:

$$\begin{aligned} a_5^2 &= a_6^2 + a_{10}^2 \\ &= r^2\left(1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right) \\ &= r^2\left(1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\right) \\ &= r^2\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) \quad ✓ \end{aligned}$$

(c) DALŠÍ ...

* umíme $\boxed{k}$-úhelník $\Longrightarrow$ umíme $\boxed{2k}$-úhelník

$k = 3 \ldots$

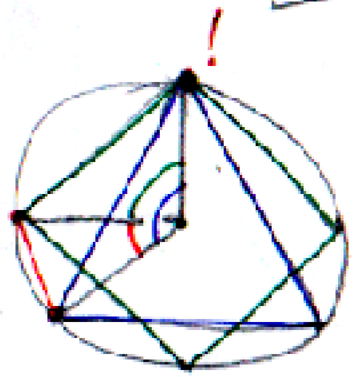


← půlením středového úhlu

* umíme $\boxed{k}$-úh. a $\boxed{l}$-úh., kde k, l .. NESOUDĚLNÉ

$\Longrightarrow$ umíme $\boxed{k \cdot l}$-úhelník!

$k = 3$
$l = 4$



← úprava zlomků:

$$\angle = \frac{360^\circ}{k}, \quad \angle = \frac{360^\circ}{l}$$

$$\angle = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right) \cdot 360^\circ = \boxed{\frac{l-k}{k \cdot l}} \cdot 360^\circ$$

* některé ÚHLY NEJDOU $\Longrightarrow$ některé $\boxed{n}$-úh. NEJDOU!

... viz Gauss-Wantzelova věta

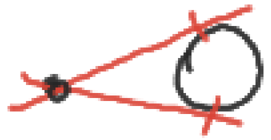
					2·3		2·4		2·5		2·6=3·4							
lze	podstatné	3	4	5											17			
	odvozené				6		8		10		12		15	16				
nelze						7		9		11	13	14				18	19	...

V. DOTYKOVÉ ÚLOHY

(A) ÚVODNÍ VĚCI

dotyk

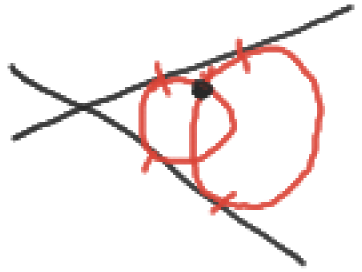
(B) TEČNA

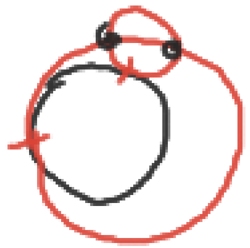


základní ú.

(C) SPOLEČNÉ TEČNY

(D) DALŠÍ ÚLOHY



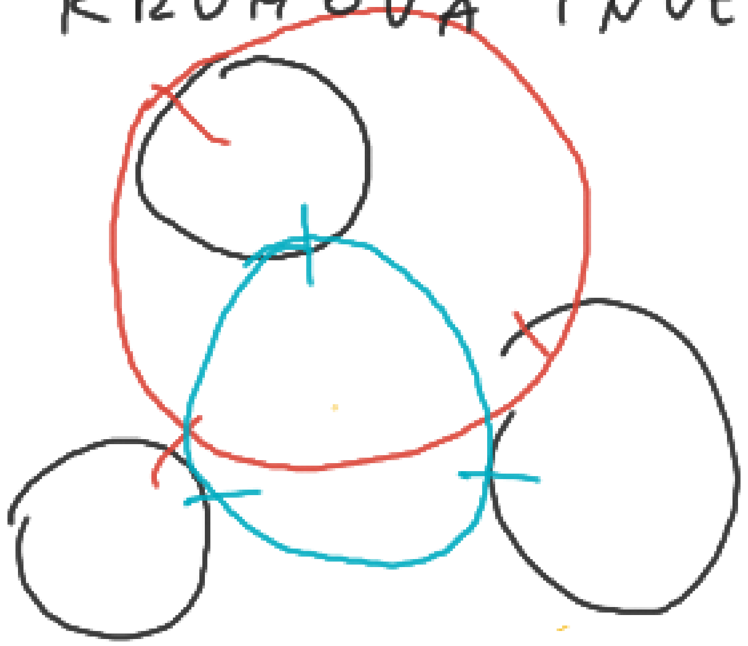


obecná úloha

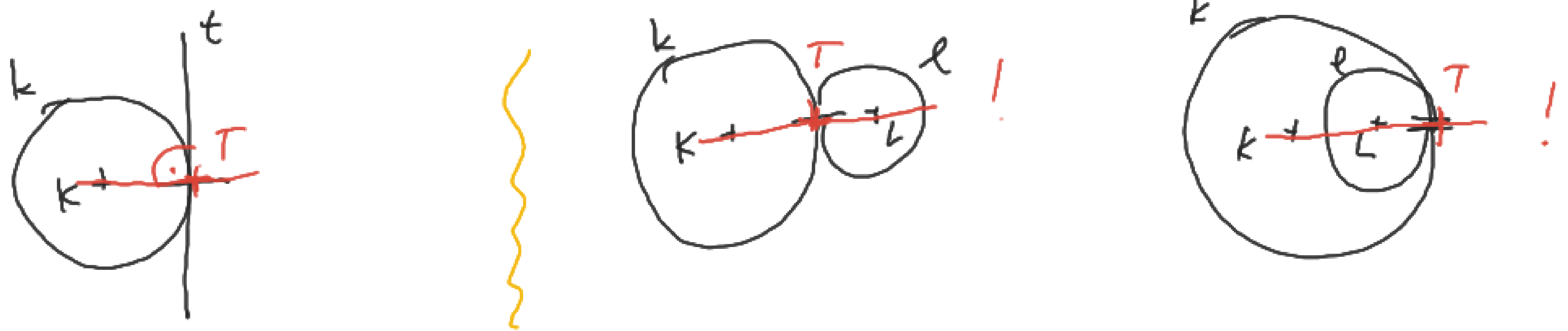
Apolloniova

NÁPADY

- "STATICKÉ"
  - Thalet. kružnice
  - mocnost
  - apod.
- "TRANFORMAČNÍ"
  - STEJNOLEHLOST
  - DILATACE
  - KRUHOVÁ INVERZE !



(A) úvodní věci ... kružnice & přímky



Def ... "DOTYK = JEDEN SPOL. BOD"

---

věta ... T = bod dotyku ...

$(\Rightarrow)$ $KT \perp t$

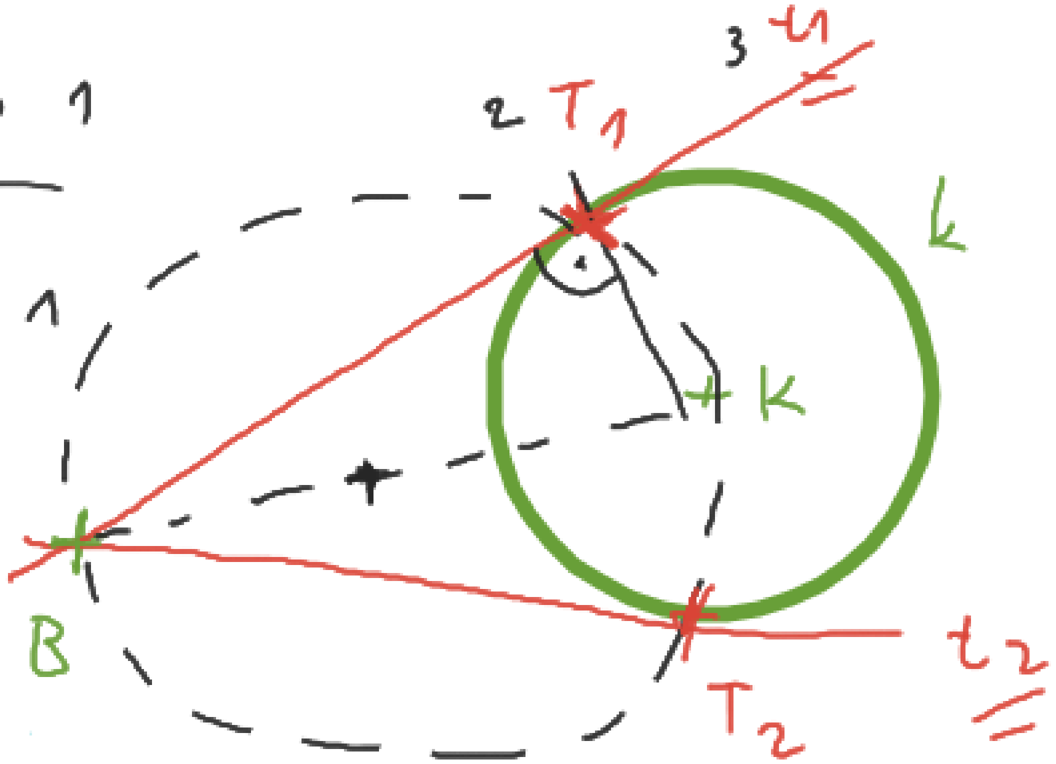
... tečna kolmá k průměru kr.

$(\Rightarrow)$ $T \in$ na přímce KL

... bod dotyku na spojnici středů

(B) TEČNA Z BODU B KE KRUŽNICI k

NÁPAD 1



konstr.

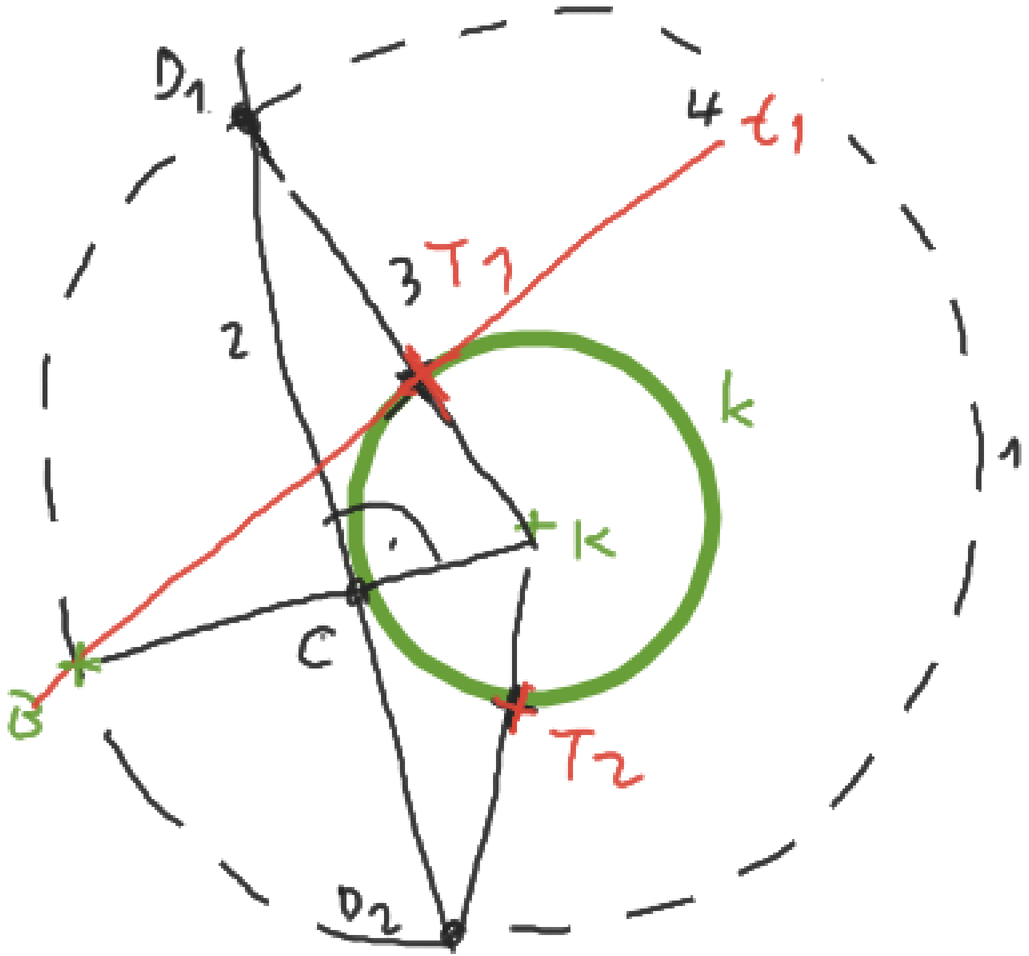
1) thalet. kružnice nad BK
2) ⇝ T_i = průsečíky s k = body dotyku
3) ⇝ $t_i = BT_i$ = tečny

→ $\sphericalangle BTK = 90°$

SHODNÉ $\triangle BTK \overset{!}{=} \triangle DCK$ [sus]

$\Rightarrow \sphericalangle BTK = \sphericalangle DCK = 90°$ ✓

NÁPAD 2



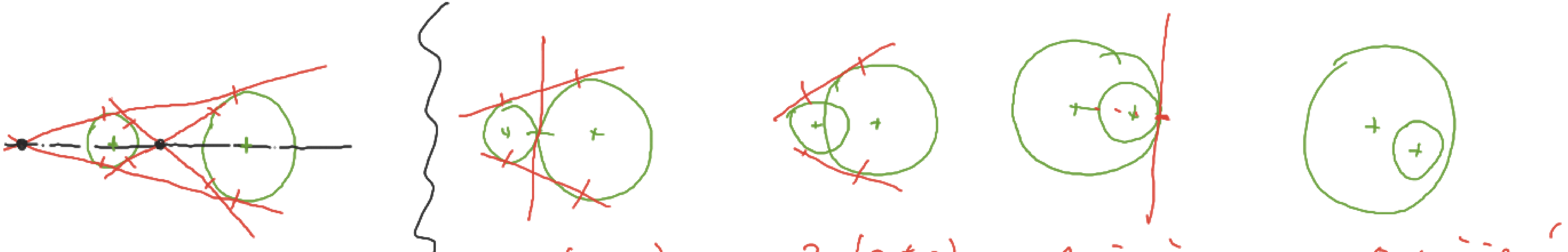
konstr.

1) kružnice ... r = KB
2) kolmice ke KB bodem C ...

⇝ D_1, D_2

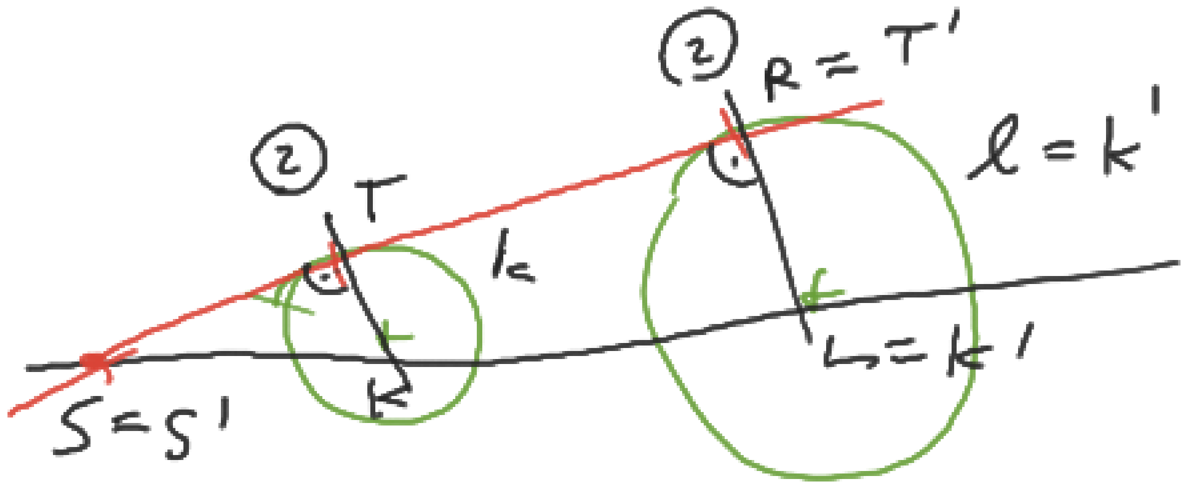
3) $T_i = k \cap KD_i$ = body dotyku
4) $t_i = BT_i$ = tečny

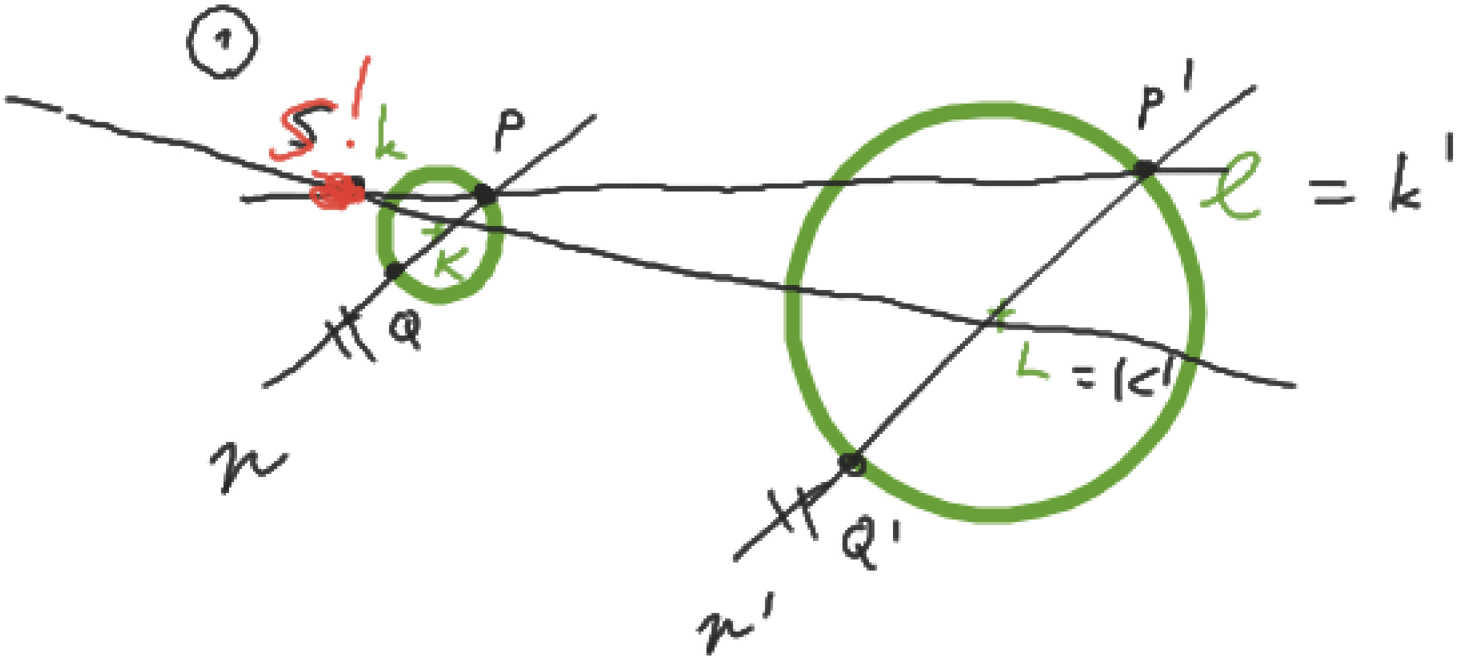
(c) SPOL. TEČNY DVOU KRUŽNIC k, l



4 (2+2) 3 (2+1) 2 (2+0) 1 řeš. 0 řešení

NÁPADY ... STEJNOLEHLOST





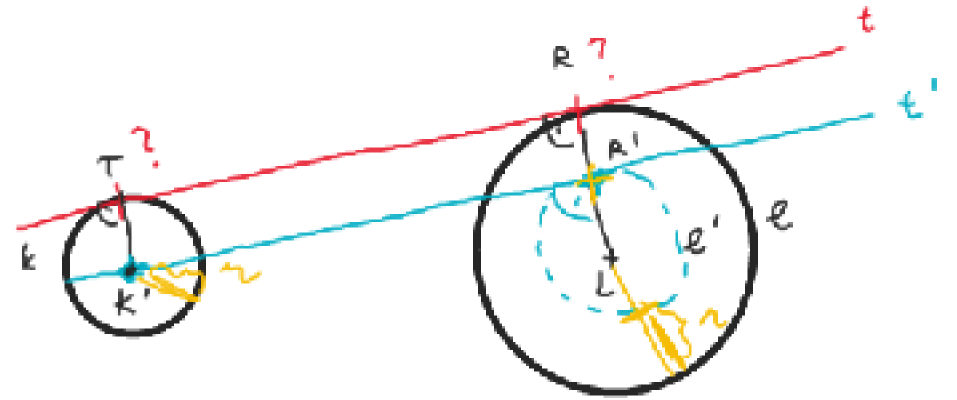
konstr.

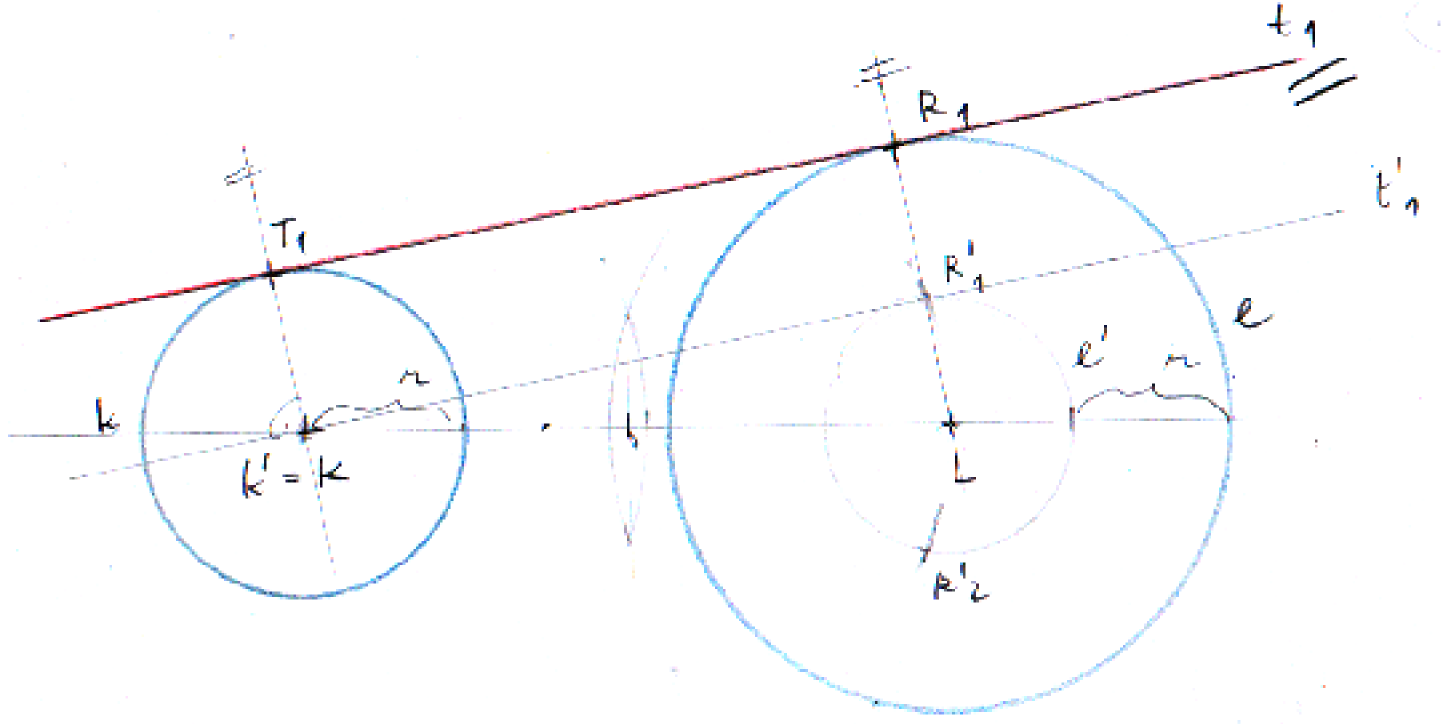
1) S ... střed pom. stejnolehlosti
[pomocí rovnob. $p \parallel p'$]

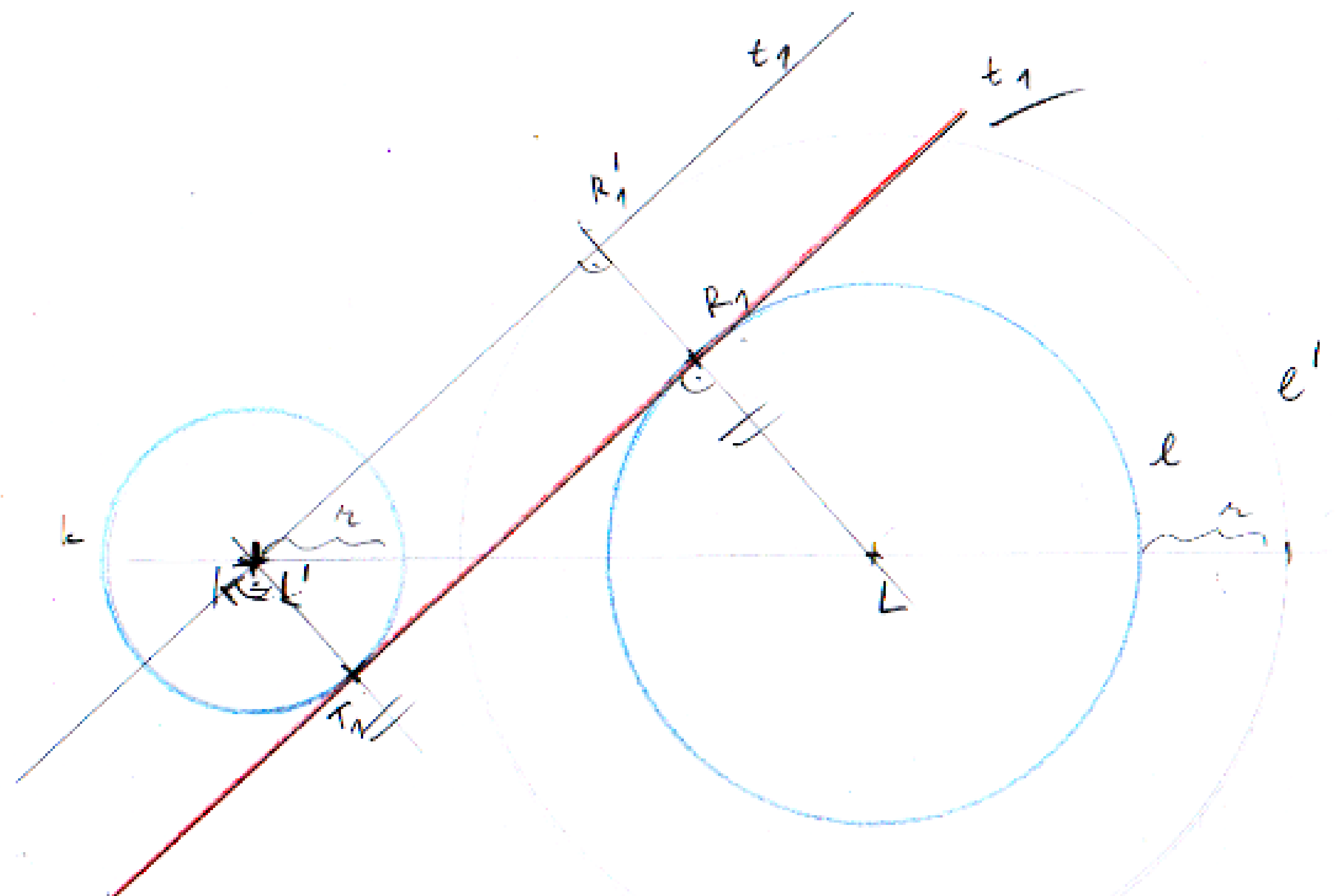
2) T, resp. R ... body dotyku
[předchozí úloha]

NÁPAD 2 ... pomocí DILATACE !!

určeno ℝ-číslem →







KONSTR

1) TRANSF. TAM:
   - l' = "vyfouknutá l"
     .... poloměr l' = pol. l − pol k
   - k' = k = bod !

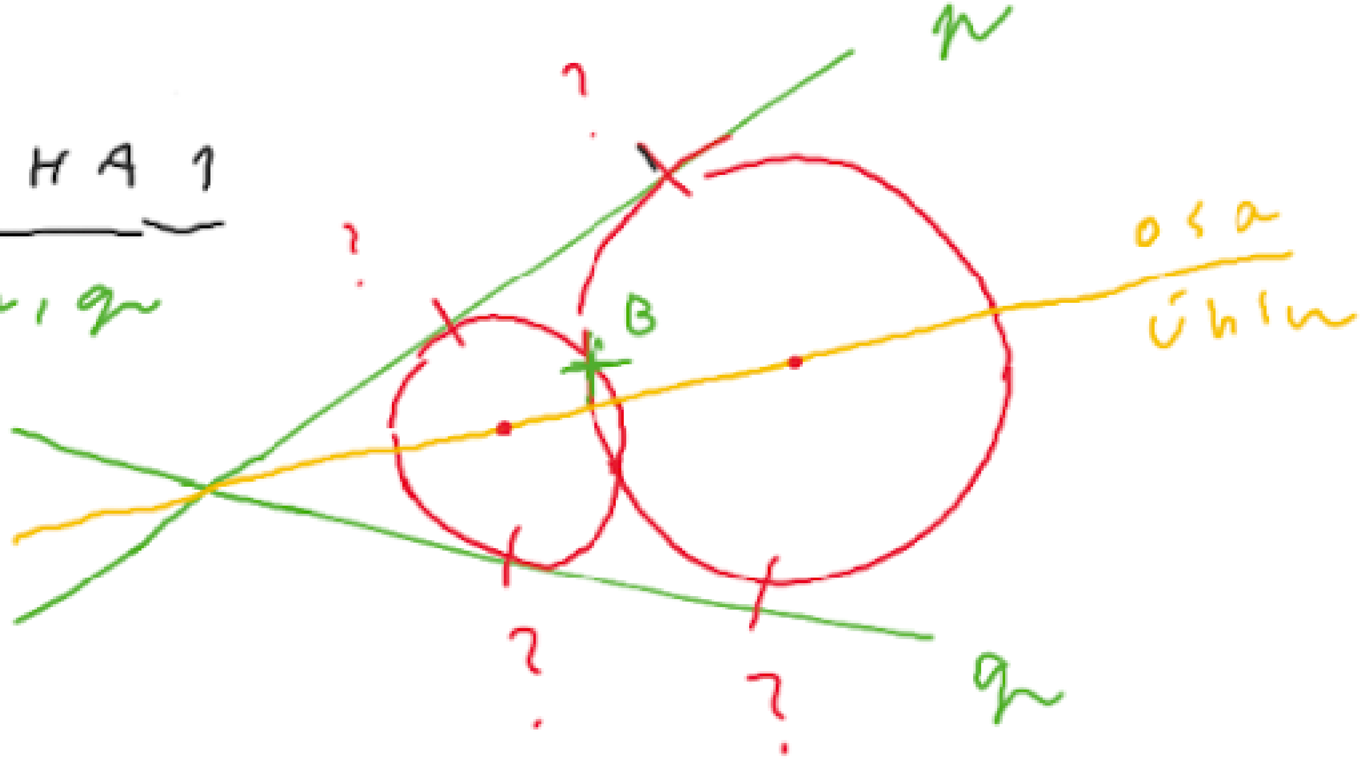
2) t' = tečna z bodu K ke kruž. l' ✓

3) TRANSF. ZPĚT
   .... body T, R
   ⟶ tečna

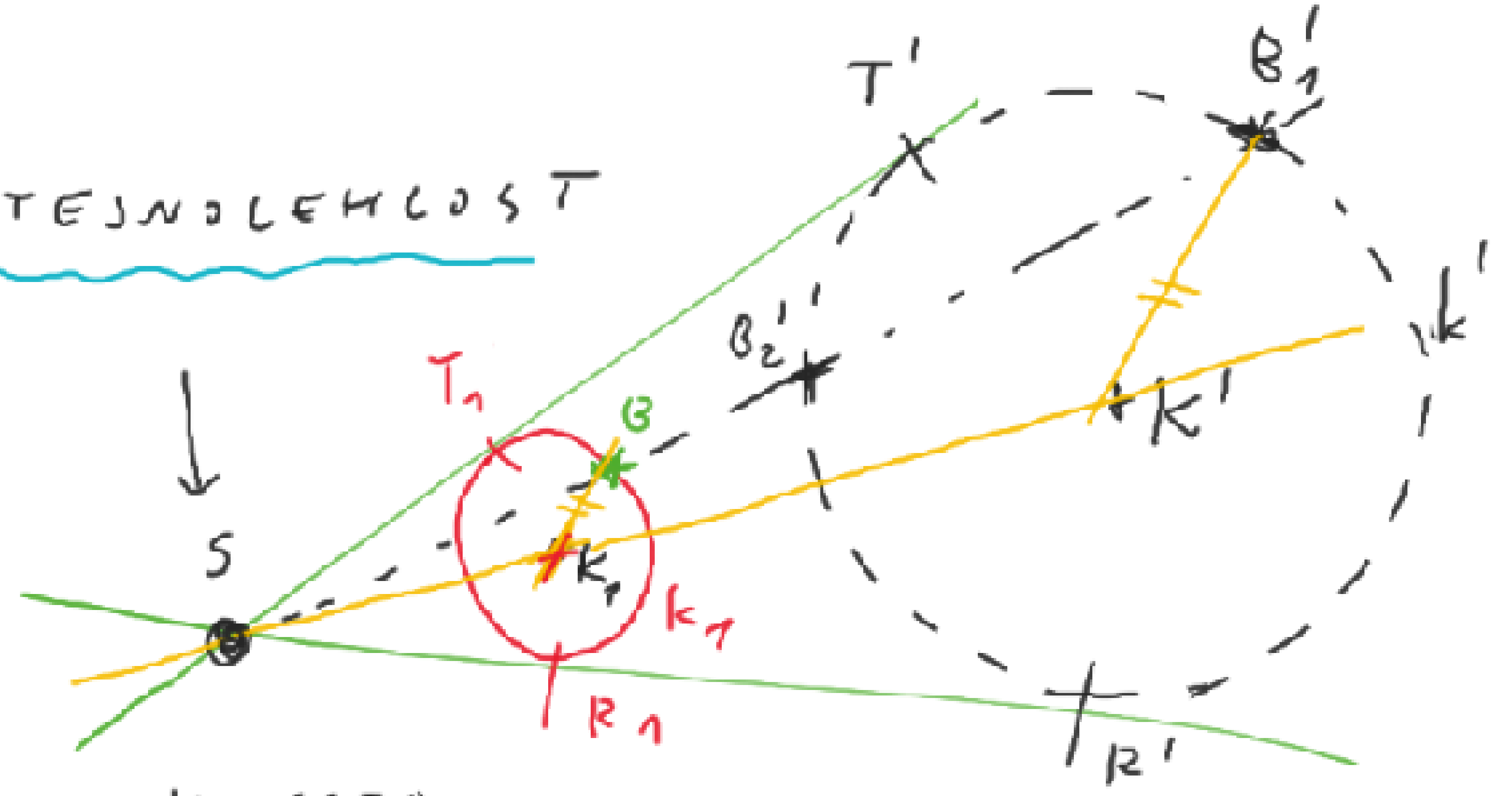
(D) DALŠÍ ÚLOHY

ÚLOHA 1

B, p, q



STEJNOLEHLOST

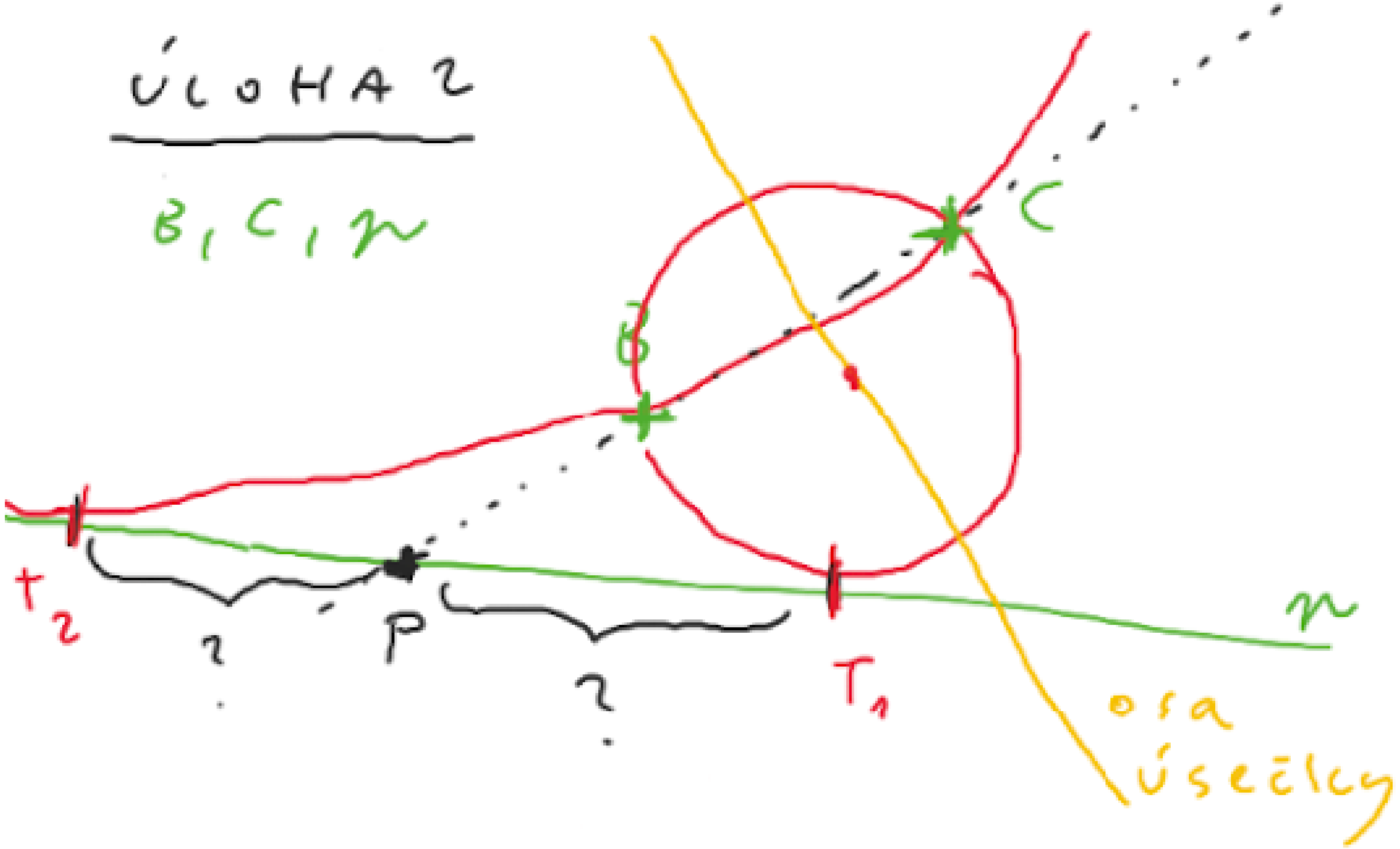


KONSTR.

1) k' ... lib. veps. kružnice
2) přímka SB ⇝ B_1', B_2'
3) rovnoběžky ⇝ střed k_i, resp. dotyk. body T_i, R_i

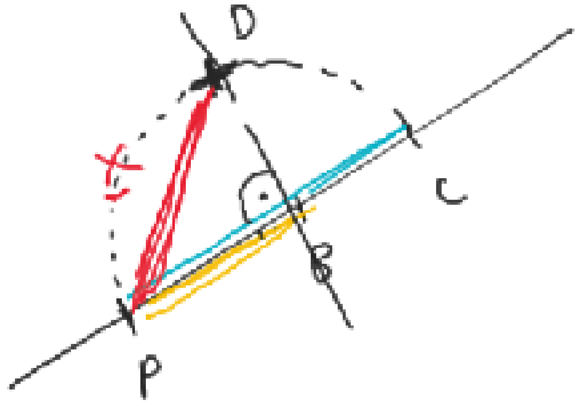
ÚLOHA 2

B, C, p



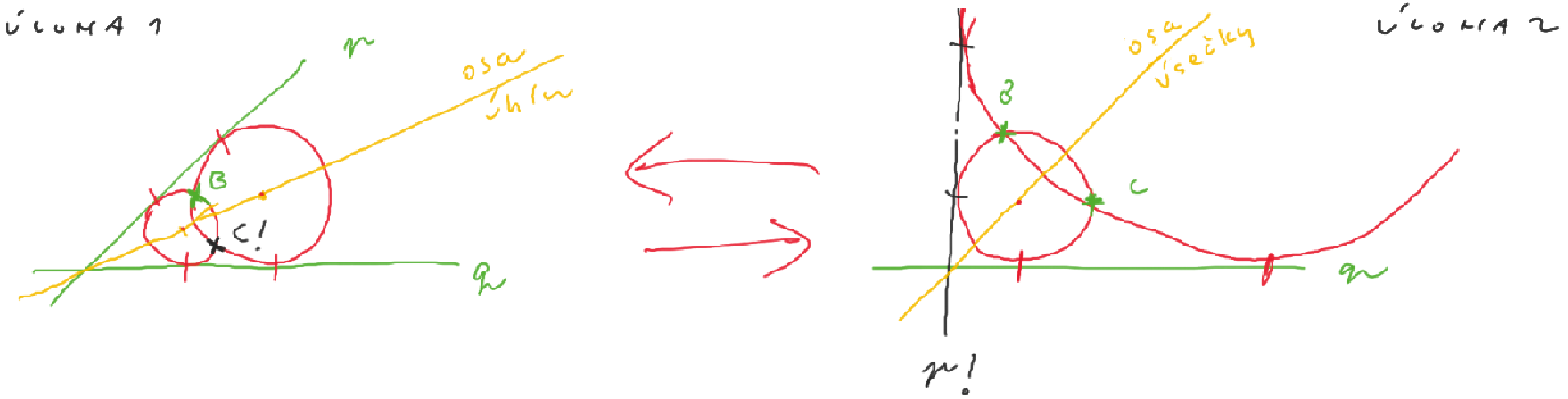
MOCNOST

1) $P = BC \cap p$
2) $PT^2 = PB \cdot PC$
3) dotyk. body T_i



[Euklidova věta o odvěsně]

(D) POZN.



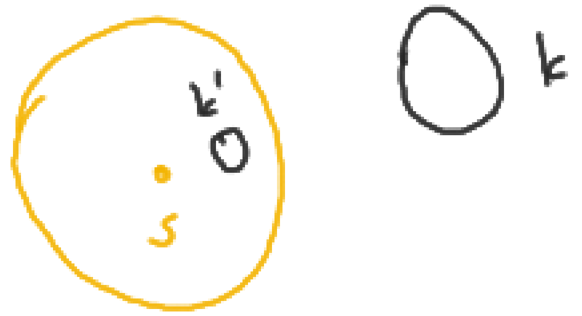
POMOCÍ OSOVÉ SOUMĚRNOSTI ...

... umíme převézt JEDNU úlohu na DRUHOU!

VI. KRUHOVÁ INVERZE

(A) DEFINICE

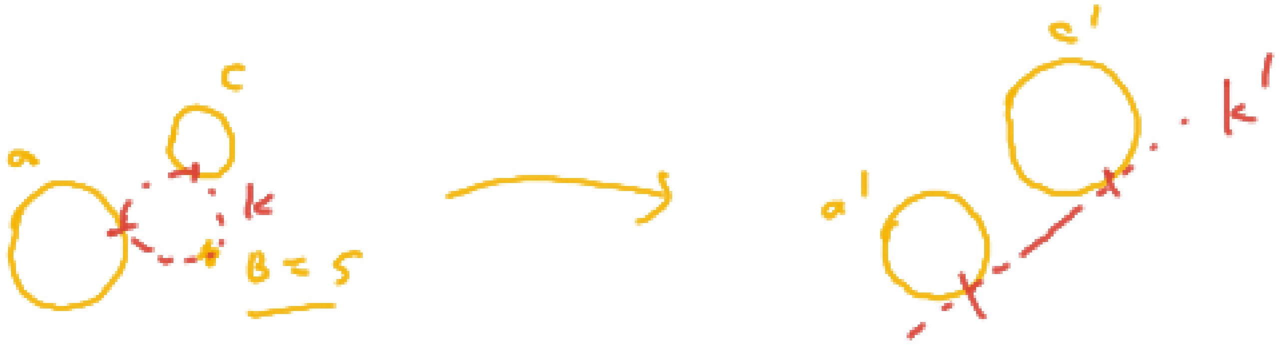
(B) VLASTNOSTI



apod.

(C) UŽITEK

↳ hlavně dotykové úlohy:



(A) DEFINICE

... transf. v rovině (bez jednoho bodu)

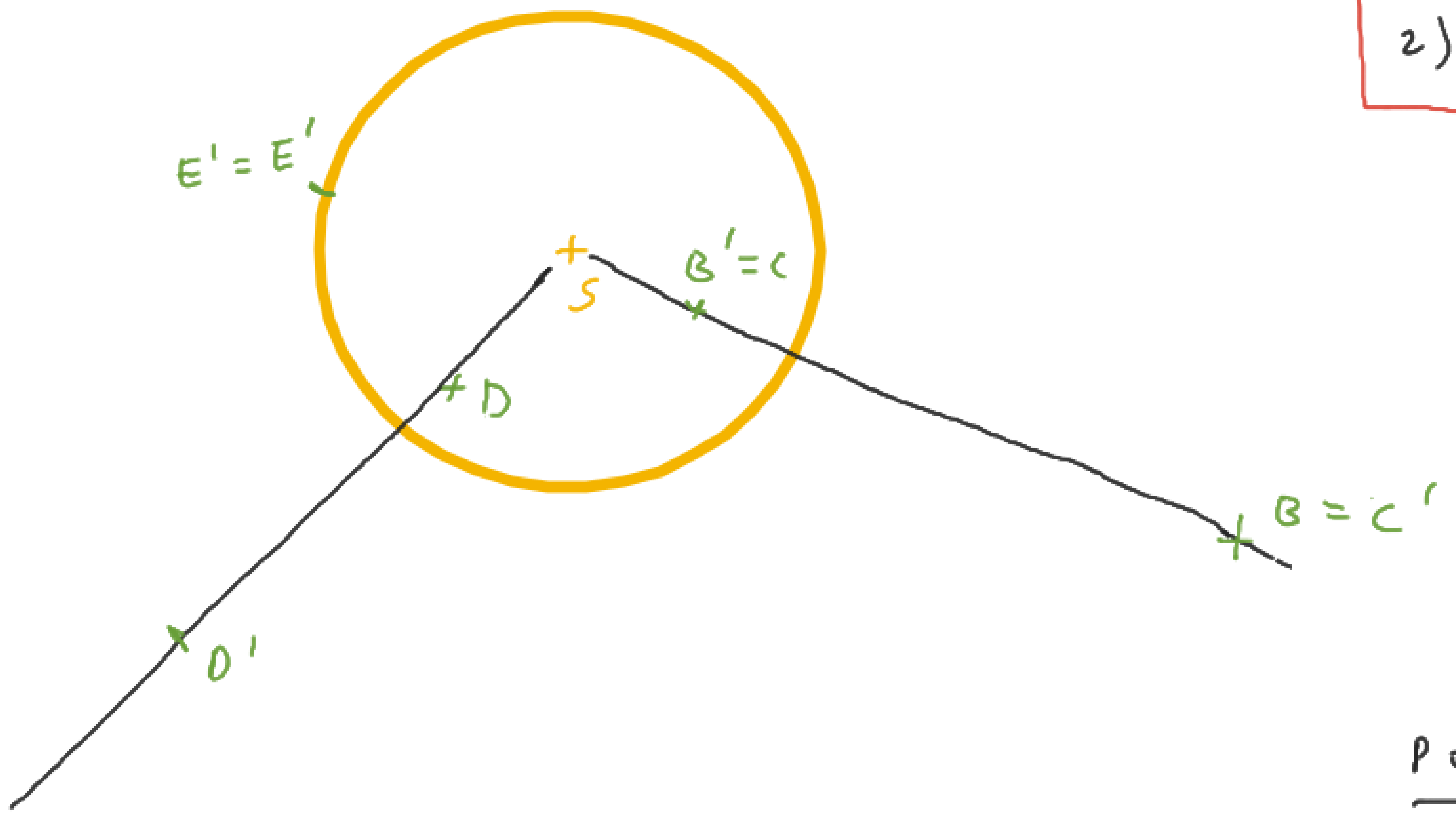
... určeno kružnicí ... střed S

poloměr r

.... tak, že:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ B' \in \text{polopř. } SB \\ 2)\ SB' \cdot SB = r^2 \end{array}}$$

pro lib. $B \neq S$



POZN.

"obraz S ... všude v ∞"

(A) ... KONSTR. OBRAZU BODU:

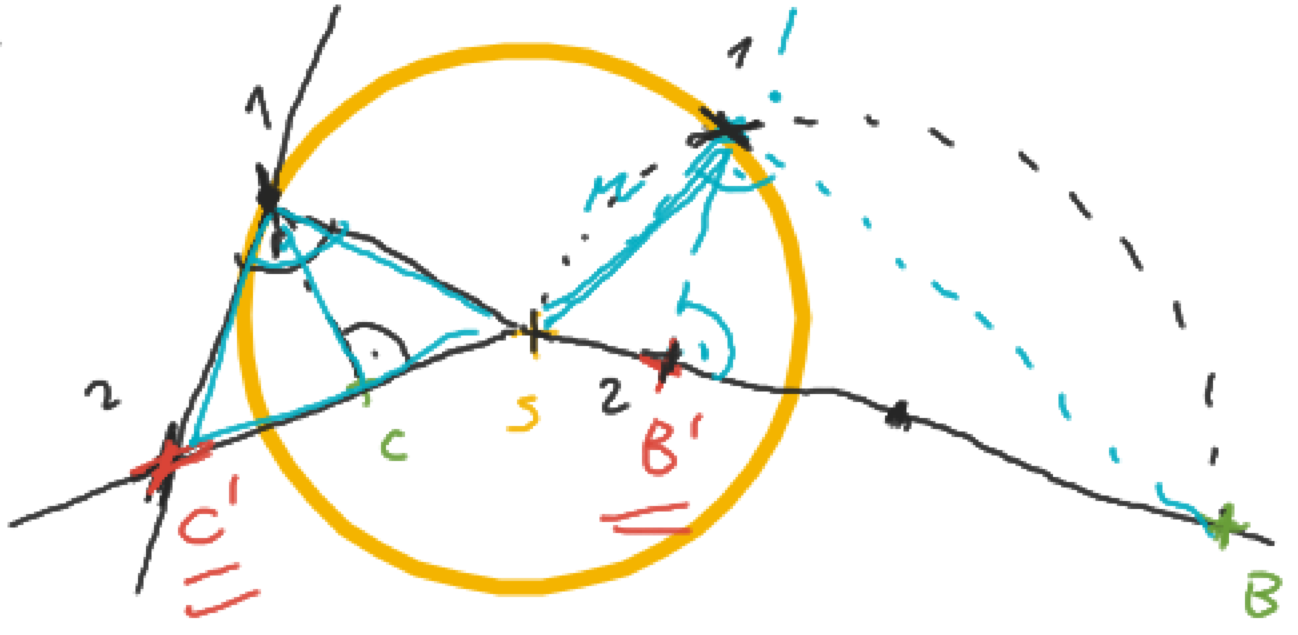
1) $B' \in$ polopř. SB

2) $SB' \cdot SB = r^2$

(b r ⟶ x?

... viz cvič. III.)

Např.

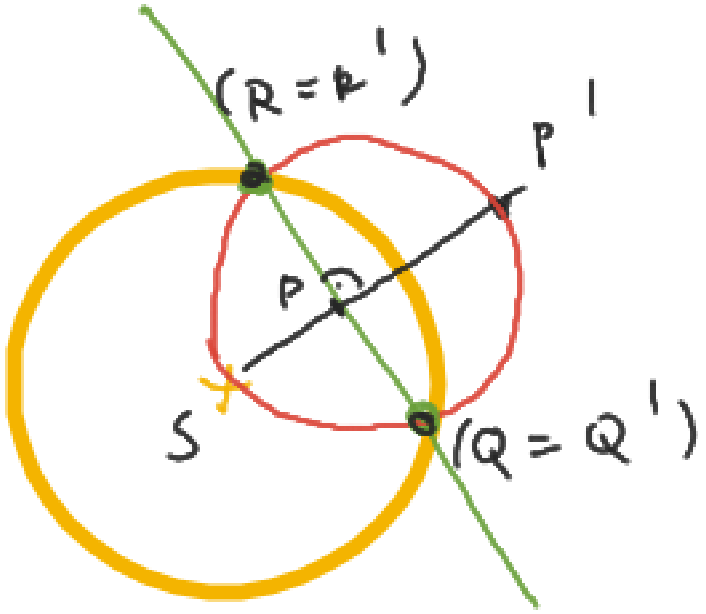


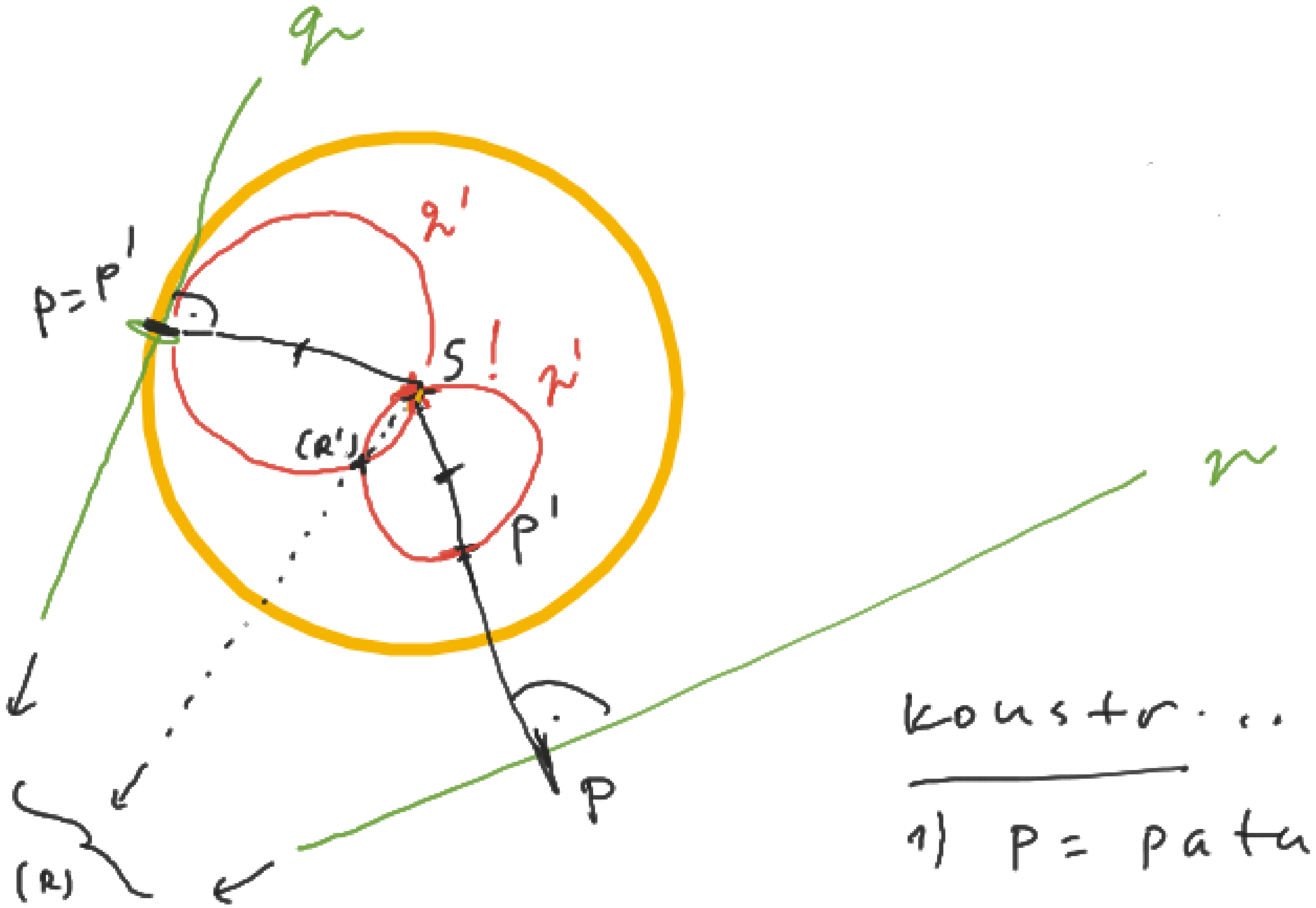
[Eukl. věta o odvěsně]

(B) VLASTNOSTI ... obrazy přímek

⇝ kružnice proch. S

(spec. přímka ... S r=r')





konstr... JEDEN bod stačí:

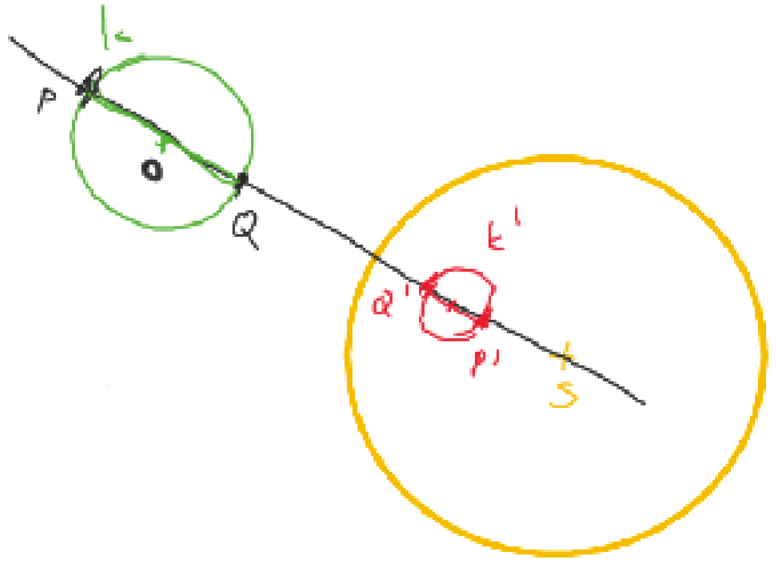
1) P = pata kolmice [nejblíž S]

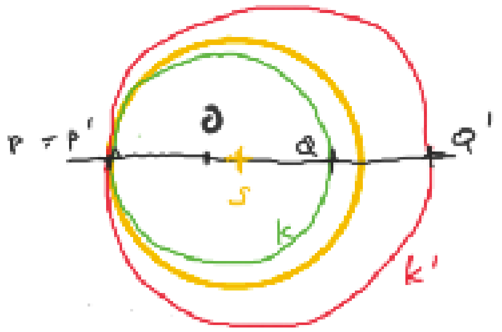
2) P' = inverzní bod [nejdále od S]

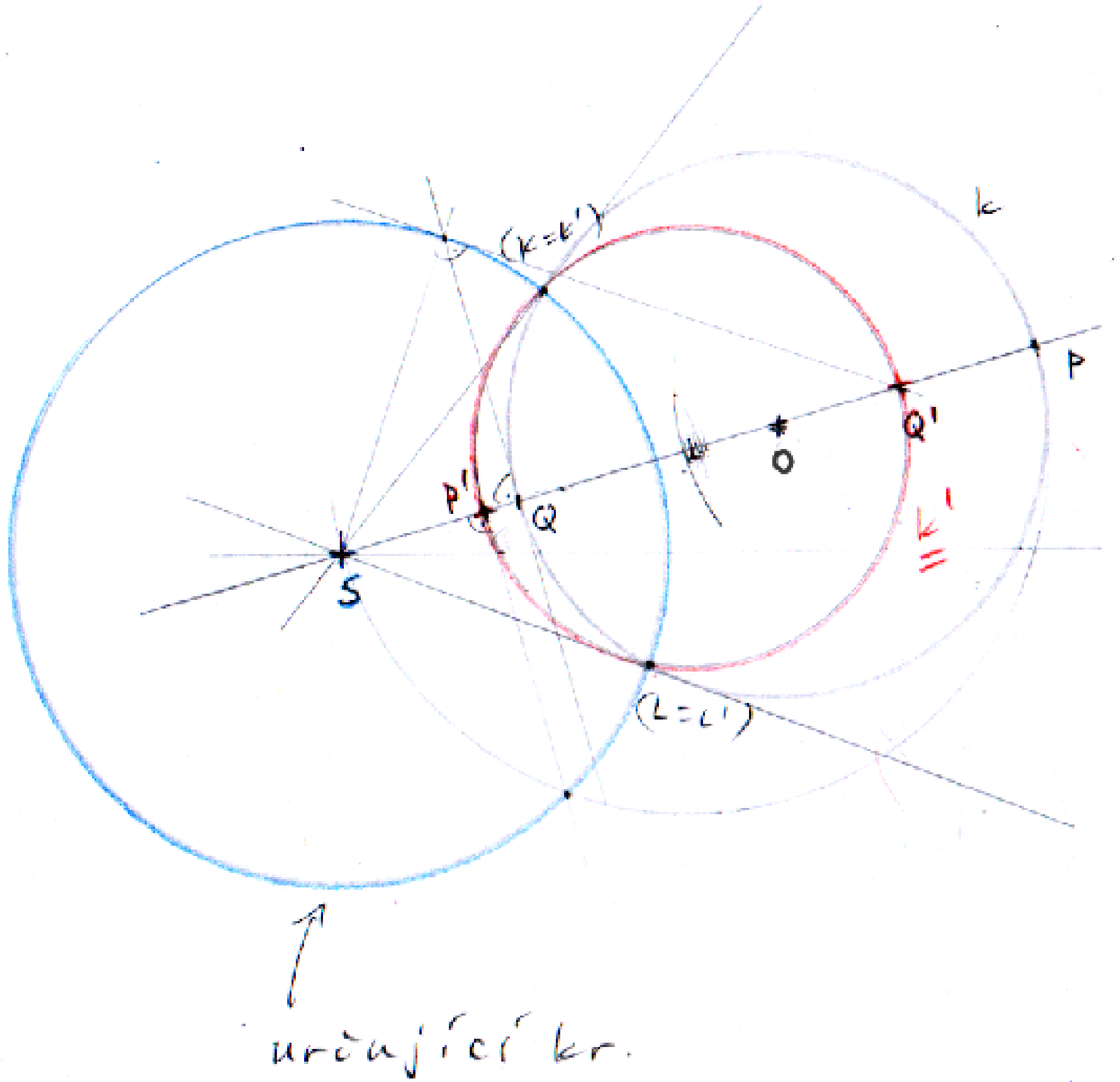
3) kružnice s $\emptyset$ SP'

(B) .... obraz <u>kružnice</u>

⇝ <u>kružnice</u> (spec. přímka .. $S \in k$ k')







<u>konstr</u> ... DVA body stačí:

1) P, Q = průsečíky s př. SO
[max, min od S]

2) P', Q' = inverzní body
[min, max od S]

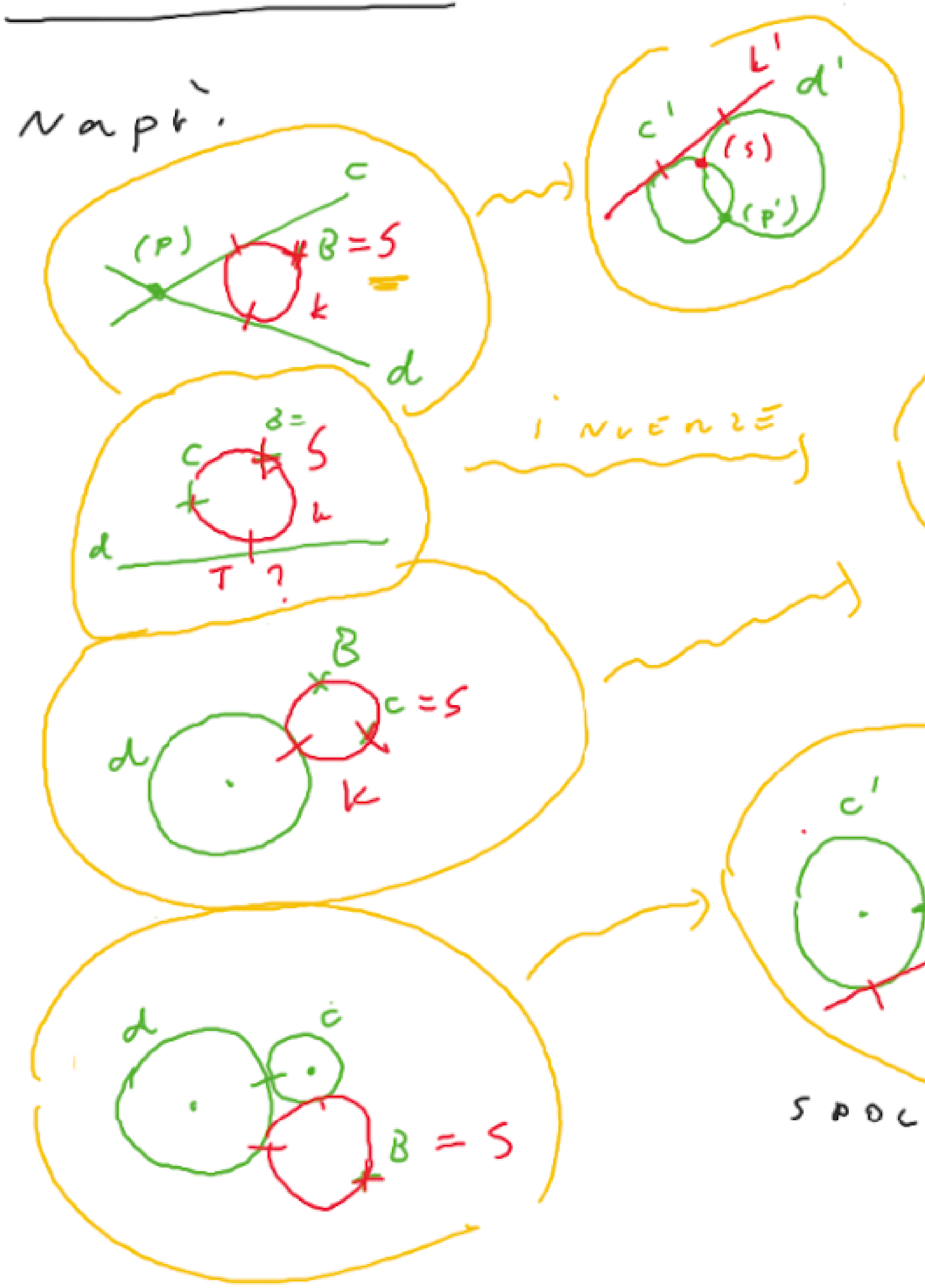
3) kružnice s ⌀ P'Q'

<u>POZOR</u>

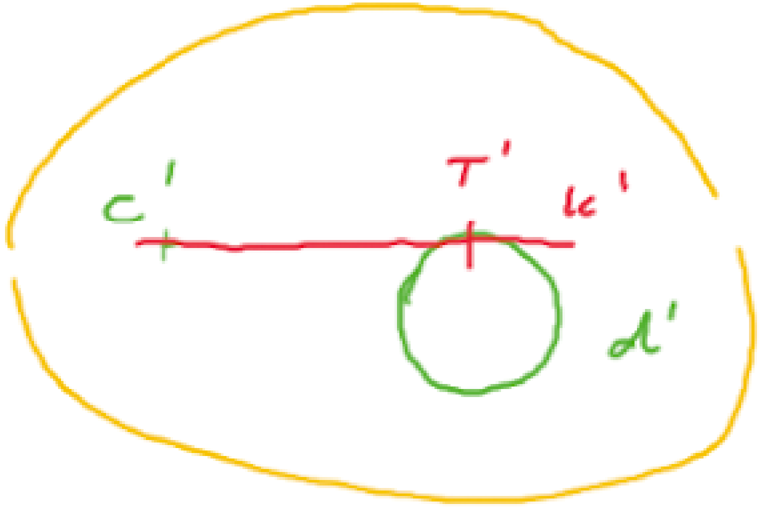
OBRAZ STŘEDU ÚSEČKY
NENÍ STŘED OBRAZU!!

(c) UŽITEK ..... VHODNĚ UMÍSTIT STŘED INVERZE ...

Např.:

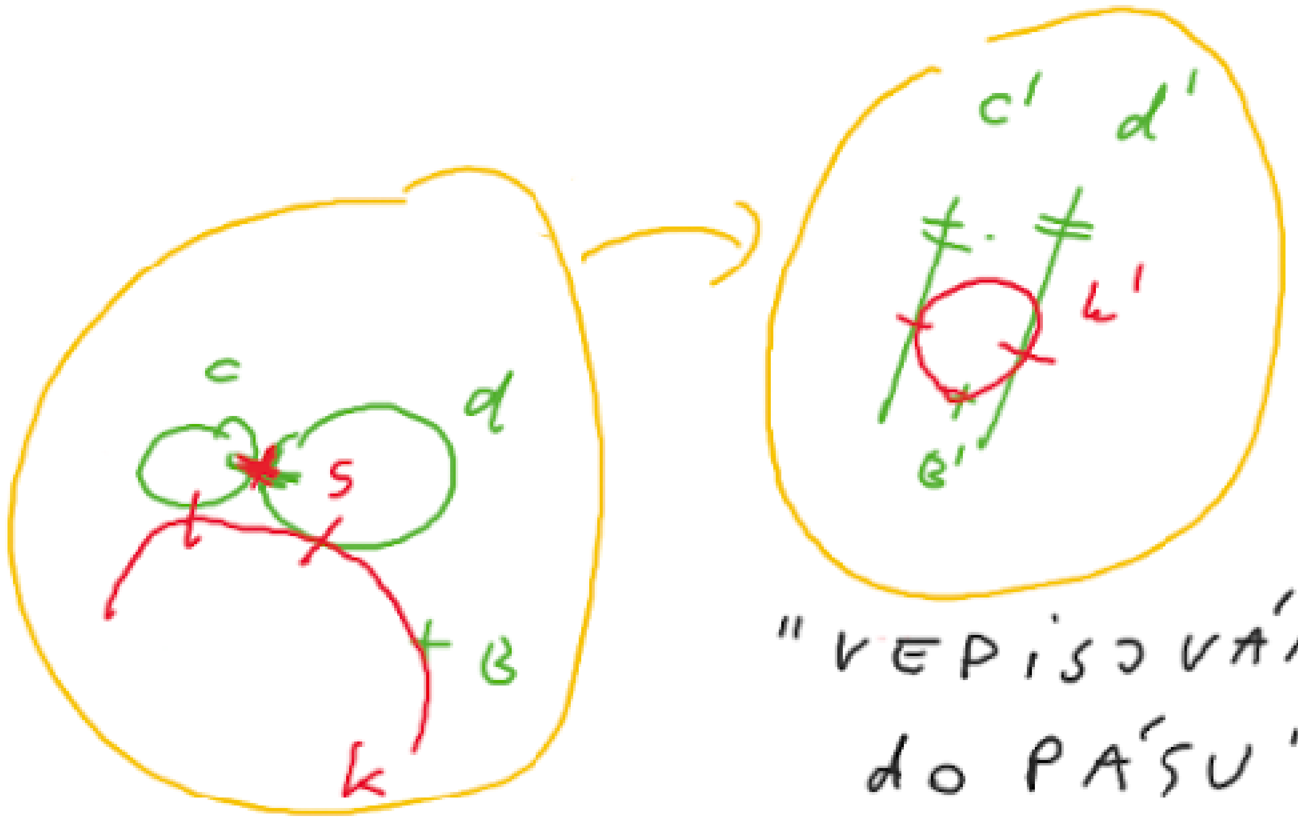


⇝ SPOL. TEČNY ✓



⇝ TEČNA Z BODU KE KRUŽ. ✓

SPOL. TEČNY ✓



„VEPISOVÁNÍ do PÁSU“

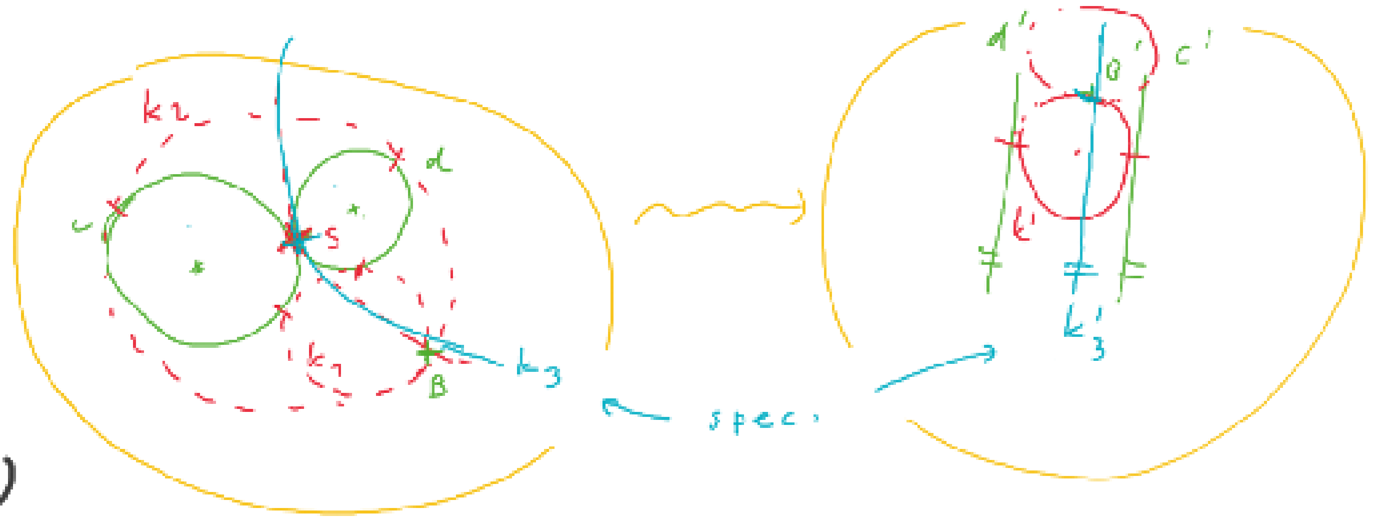
... známe ∅ k'!

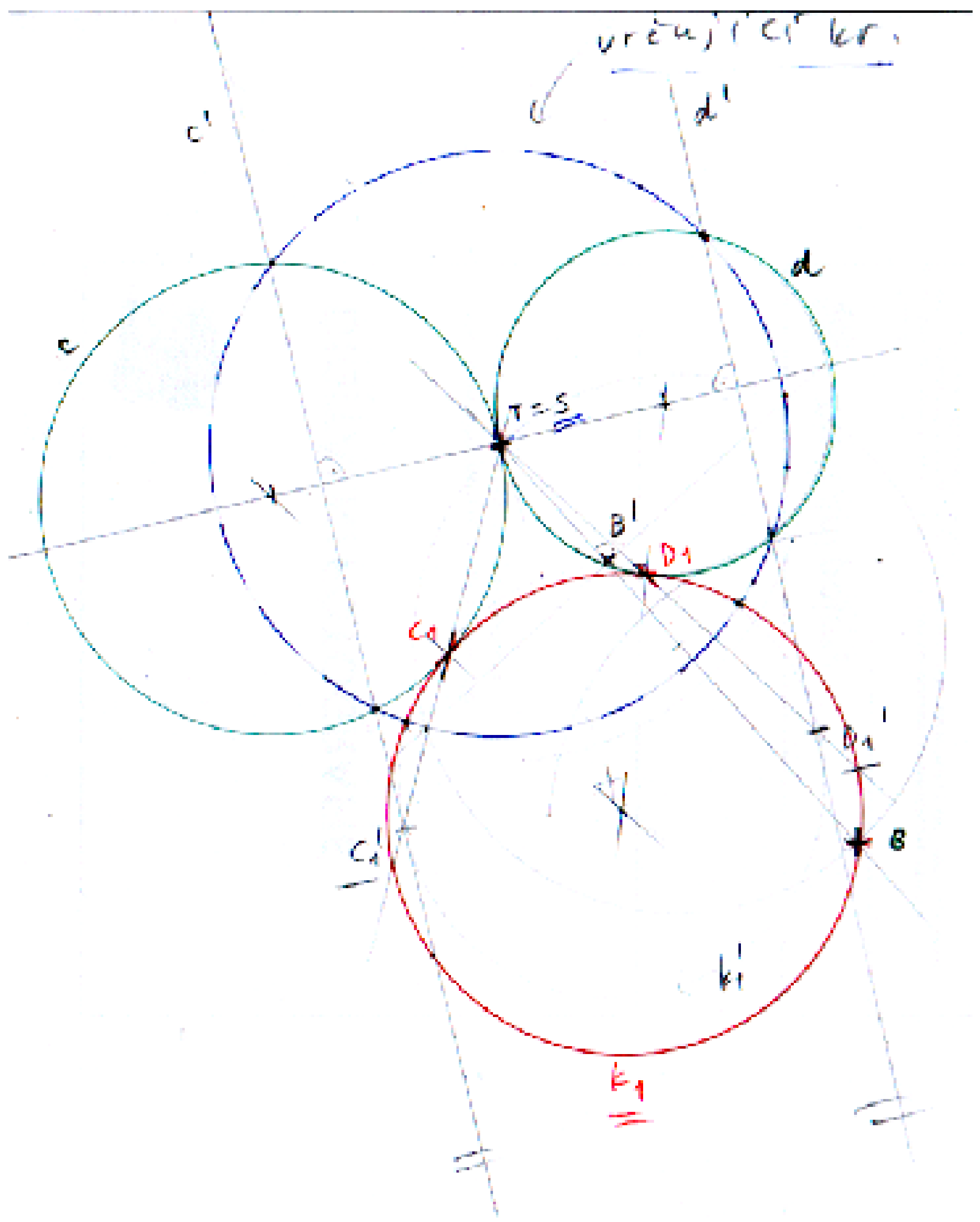
(c) ... ad vepisování do pásu

Dáno c, d, B,

S = bod dotyku c, d

... 3 řešení →





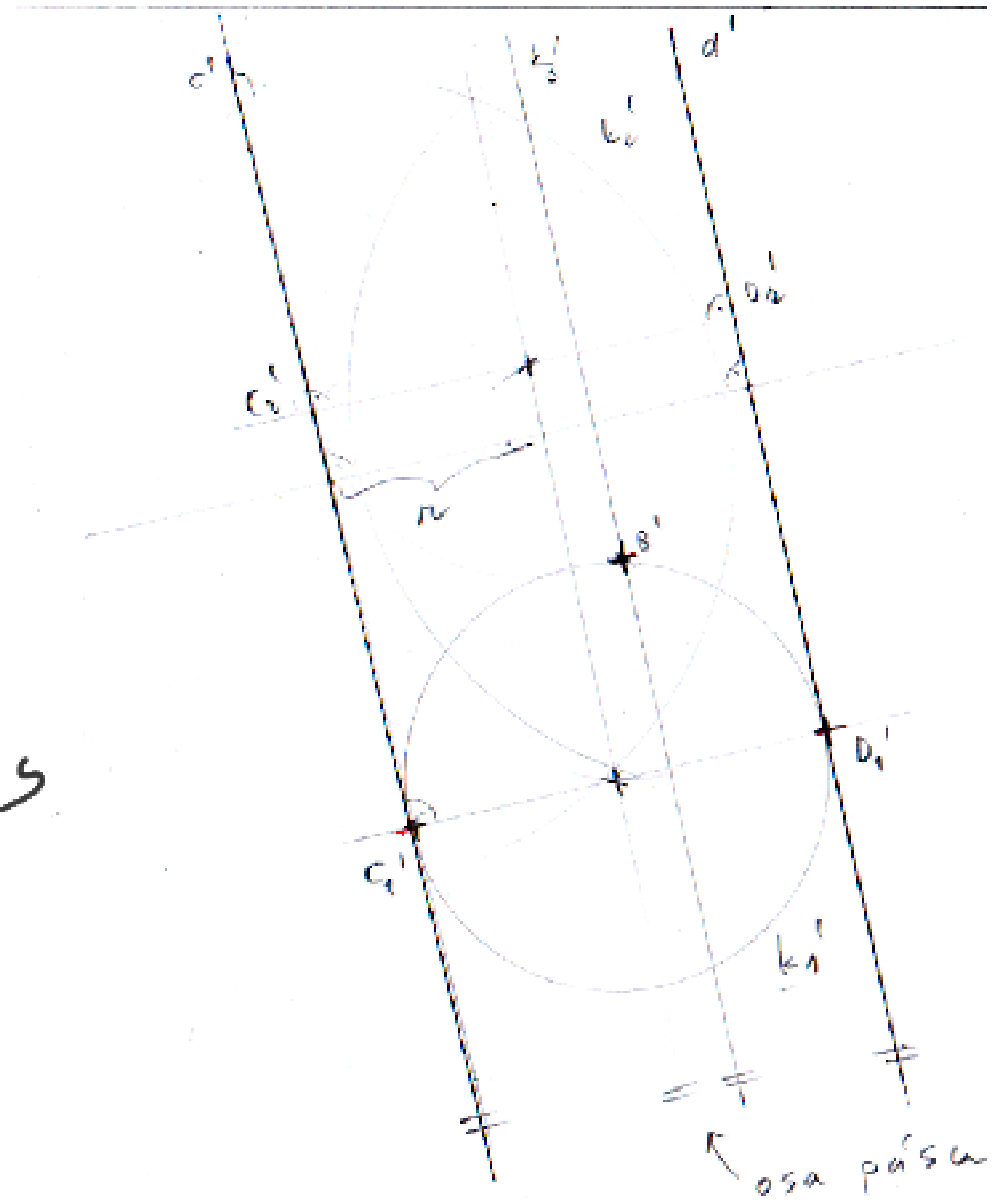
konstr.

① TAM:
- obrazy B', $c' \parallel d'$

② ŘEŠENÍ →
- osa pásu
- střed k'
- C', D' ... dotyk. body

③ ZPĚT:
- obrazy C, D
- kružnice k

←



DALŠÍ ZOBRAZENÍ – přehled

vše primárně v ROVINĚ..

TYPY

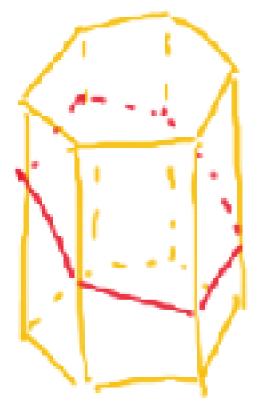
- SHODNÁ
- PODOBNÁ
- AFINNÍ
- PROJEKTIVNÍ

vše zach. kolin.

SCHÉMA

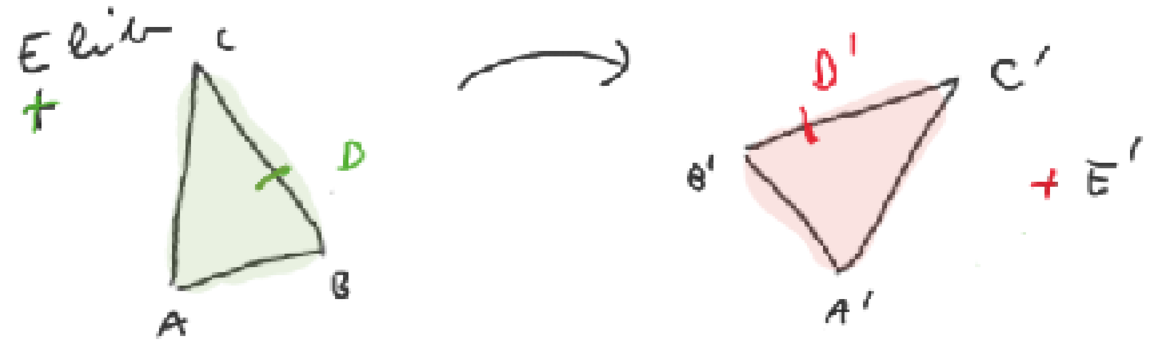
- VLASTNOSTI
- ZÁKLADNÍ
- OBECNÁ
- POZNÁMKY & UŽITÍ

např.



VII. SHODNÁ ZOBR.

• od shodných Δ ke shodným zobr...

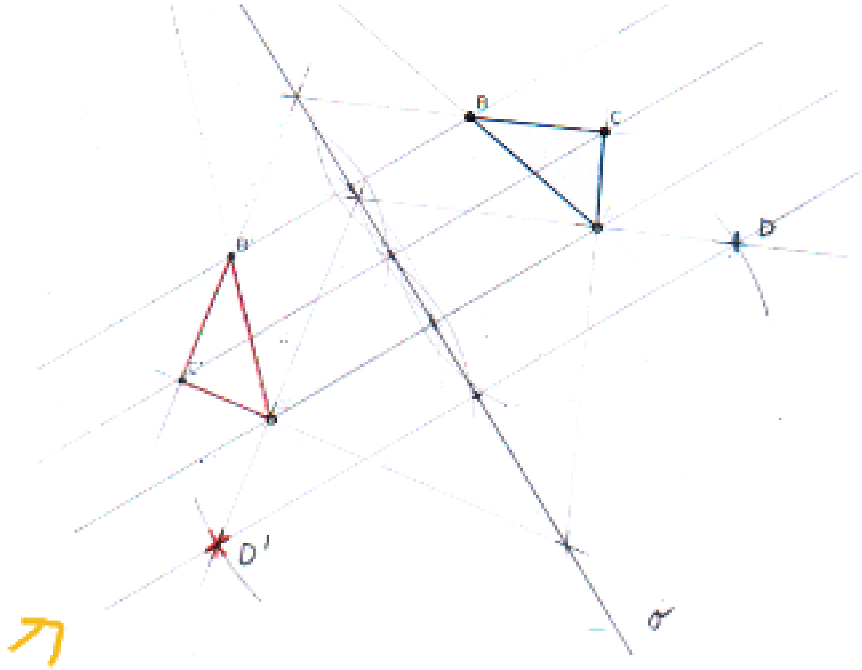


(A) VLASTNOSTI

- vzdálenosti
- odchylky
- kolineárnost
- atd.

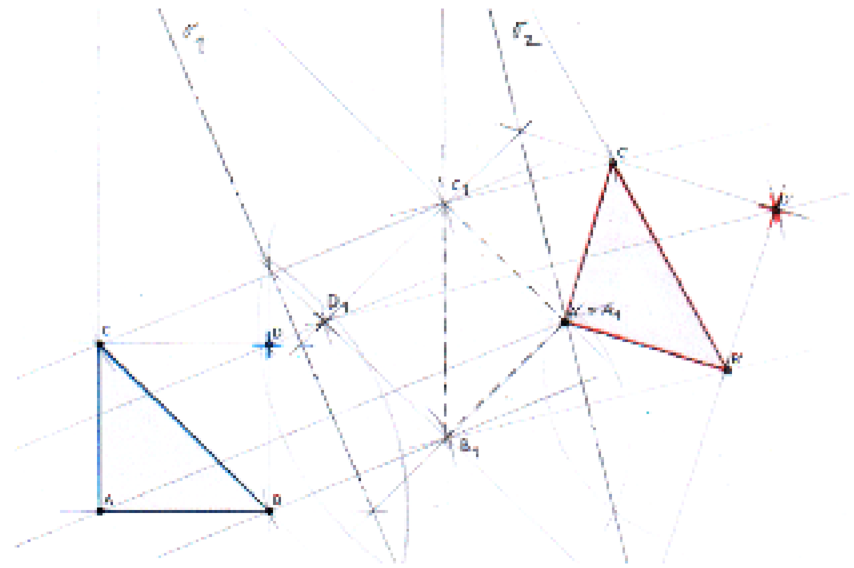
(B) ZÁKLADNÍ

- osová souměrnost



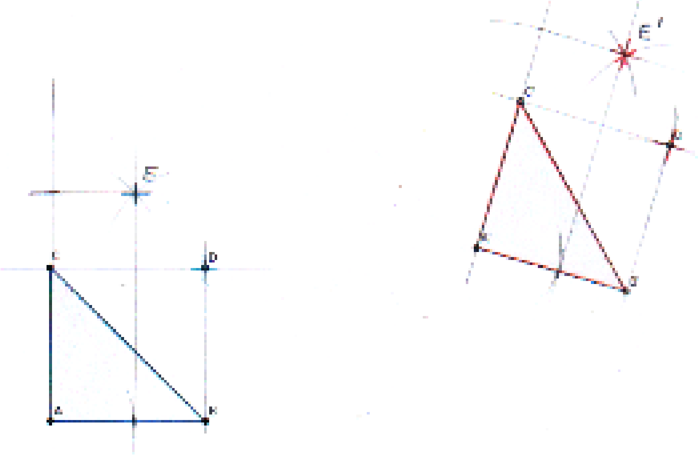
(C) SKLÁDÁNÍ

- pomocí základních

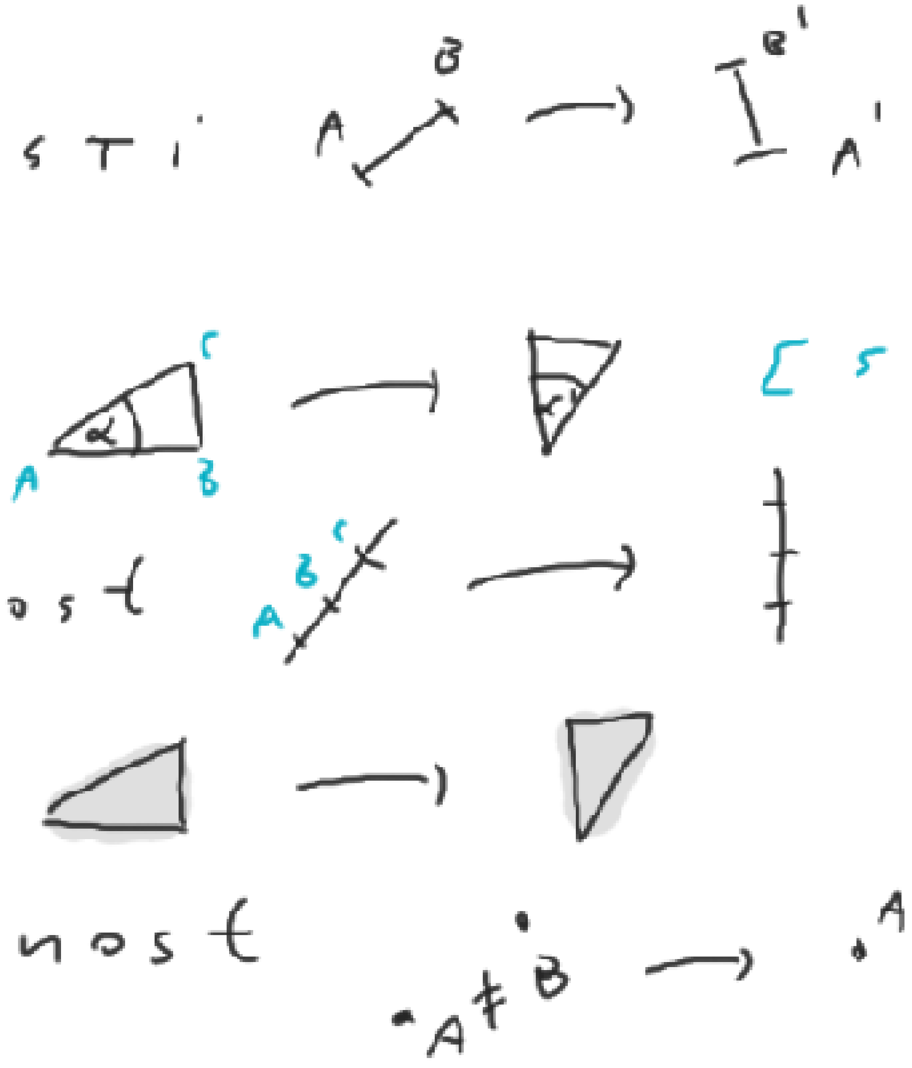


(D) OBECNĚ

- pomocí vlastností



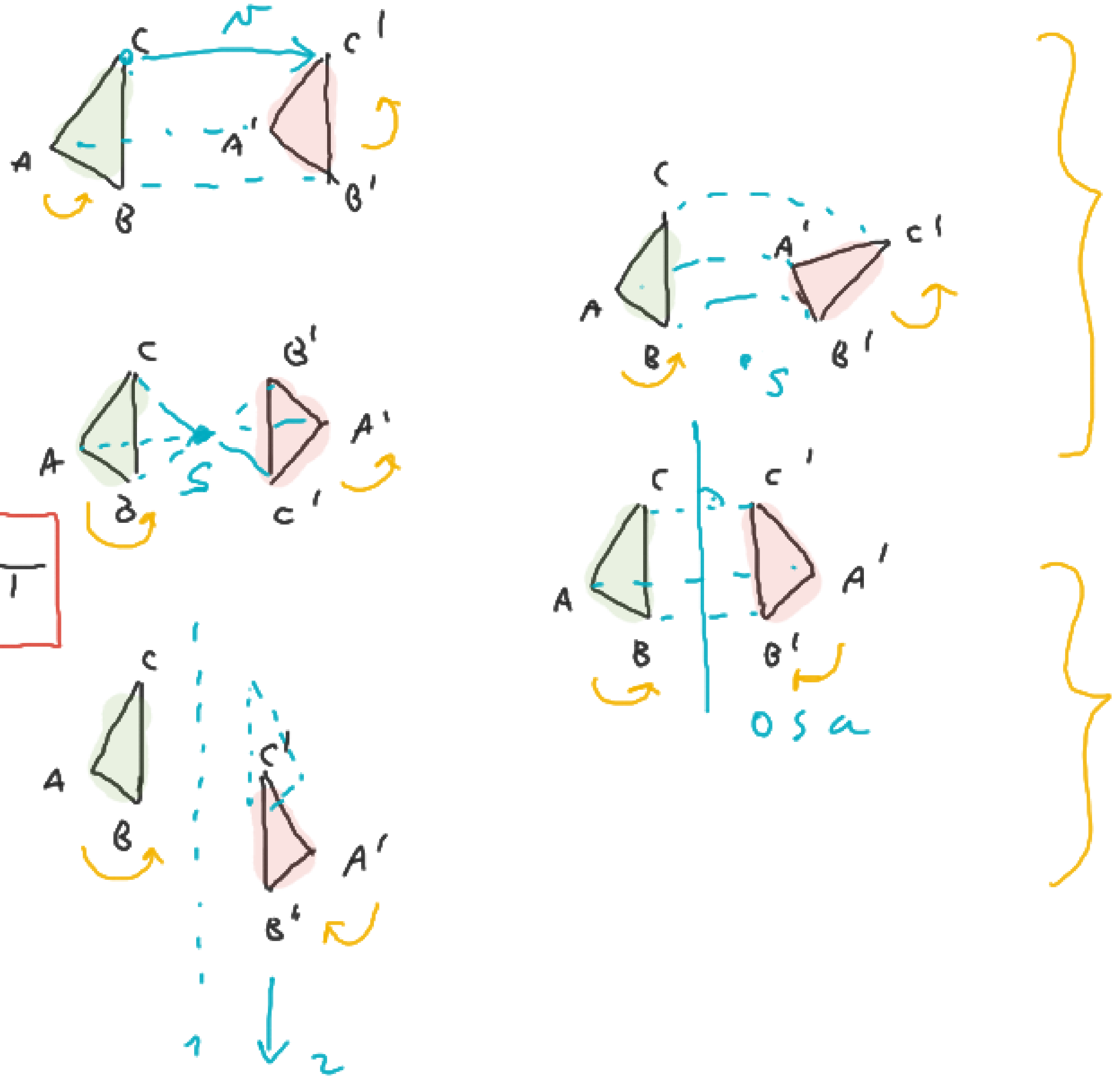
(A) VLASTNOSTI (invarianty)



- vzdálenosti
- odchylky [sss]
- kolineárnost [$AB + BC = AC \iff B$ mezi A a C]
- obsahy ✓
- injektivnost ✓

(B) ZÁKLADNÍ SHODNOST v rovině

- IDENTITA
- POSUNUTÍ
- OTÁČENÍ
- STŘEDOVÁ SOUM.
- OSOVÁ SOUMĚRNOST
- POSUNUTÁ —II—

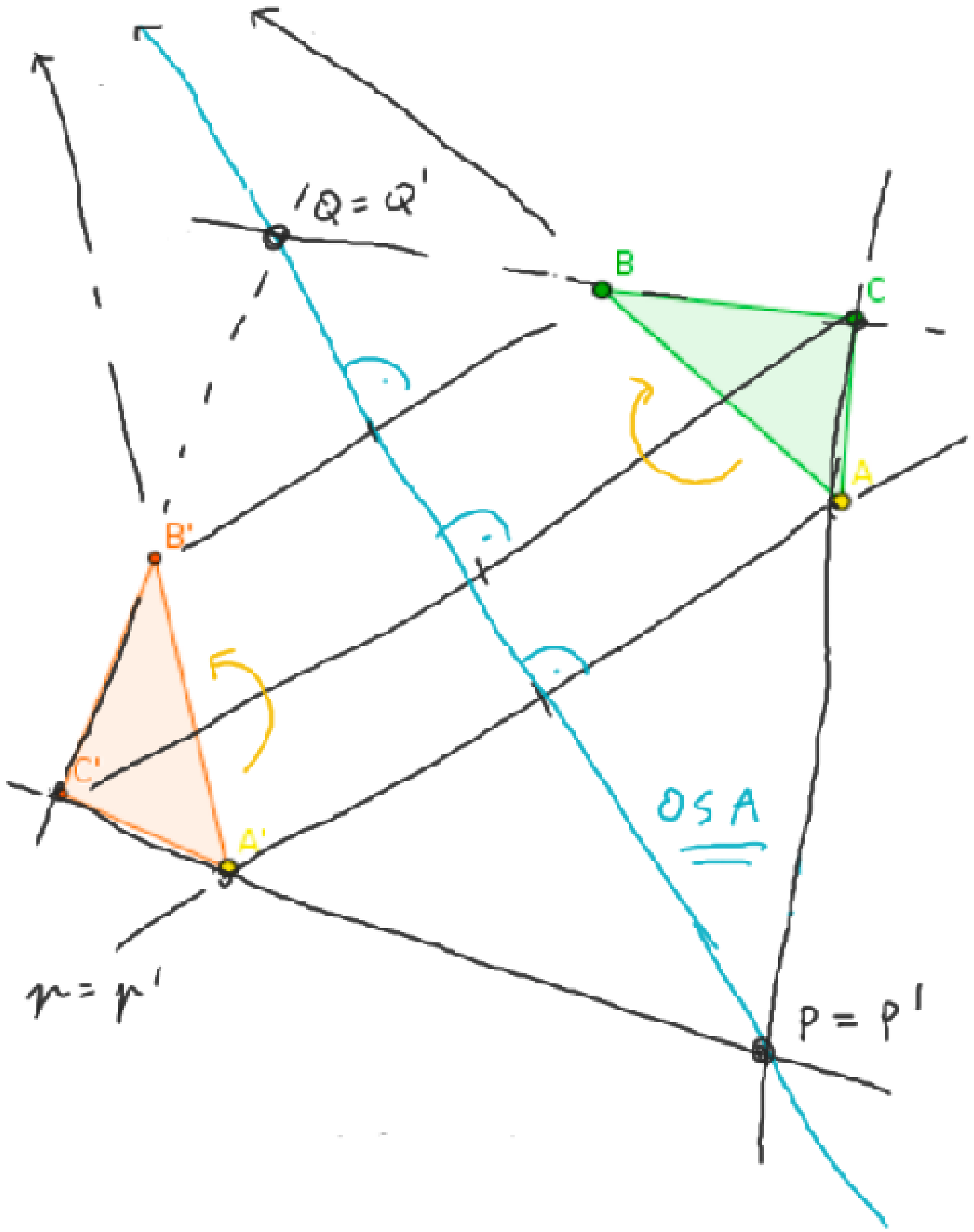


přímé

nepřímé

Lib. shodnost = složení (max. 3) osových soum!

(B) ZÁKLADNÍ ... charakterizace



OSOVÁ SOUM.

$\Updownarrow$

osa AA' = osa BB' = osa CC'

= osa souměrnosti

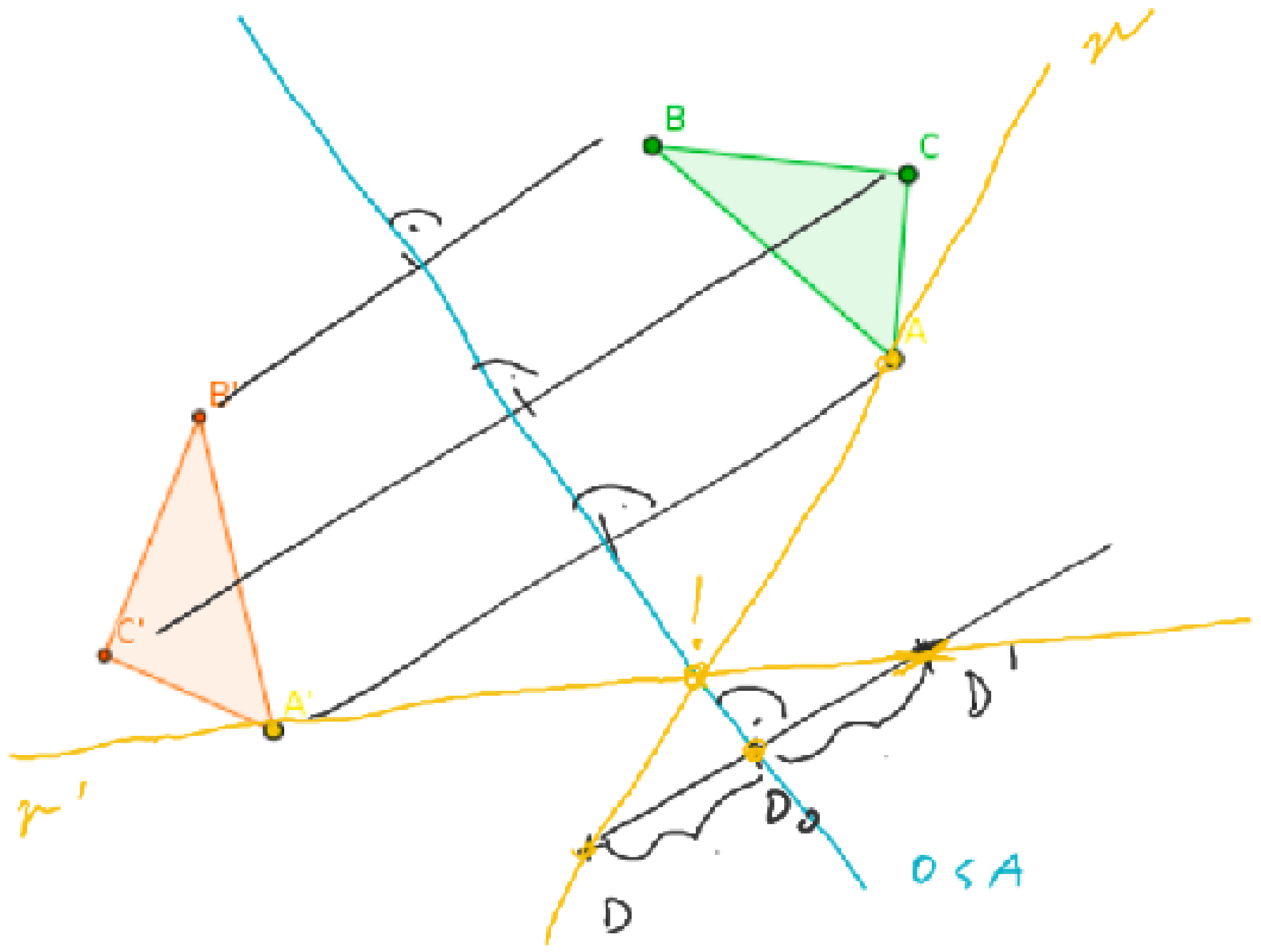
DŮSL:

- $AA' \parallel BB' \parallel CC'$
- průsečíky $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$ ... na přímce

POZN:

- nepřímé
- involutivní
- $p = p' \iff$ p = osa nebo $p \perp$ ose

(B) ZÁKLADNÍ ... konstr. ob. bodu



a) podle definice [$\overrightarrow{D_0D'} = -\overrightarrow{D_0D}$]

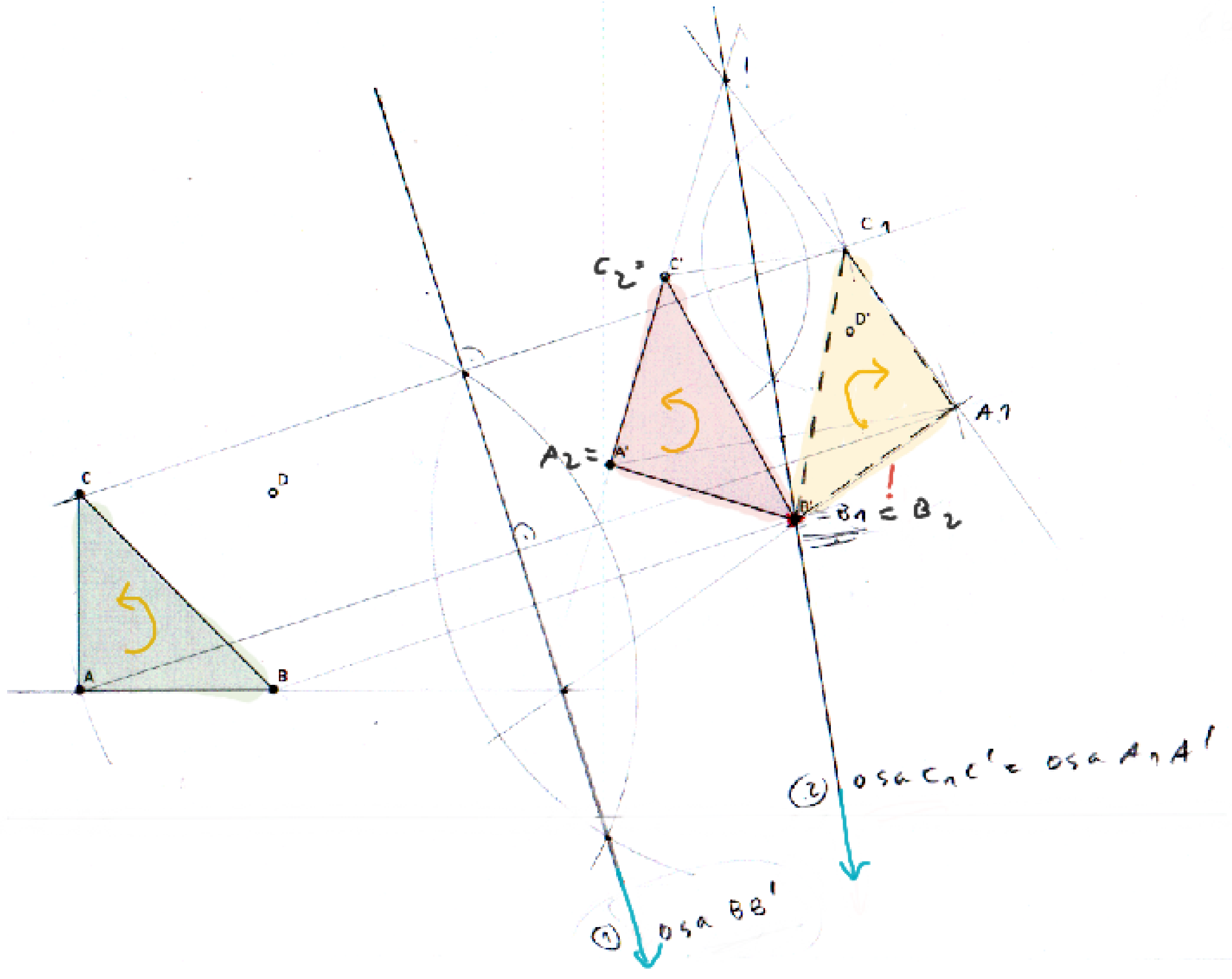
b) podle dalších vlastností

[$AD \cap A'D' \in$ ose]

(c) SKLÁDÁNÍ

... vyjádřete danou shodnost jako složení základních

(otáčení)



(střed otáčení)

KONSTR.

1) o_1 = osa BB'

⇝ $A_1B_1C_1$ = souměrný △

⇝ $B_1 = B'$

2) o_2 = osa C_1C'

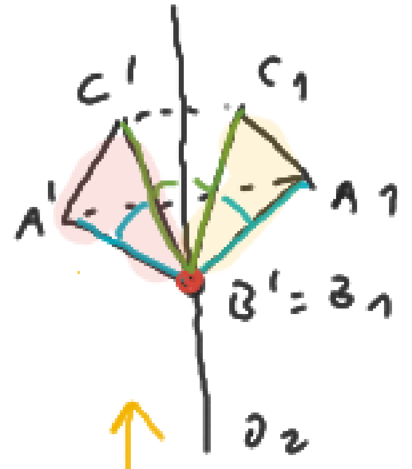
⇝ $A_2B_2C_2$ = souměrný △

⇝ $C_2 = C'$

$B_2 = B_1 = B'$

$A_2 = A'$

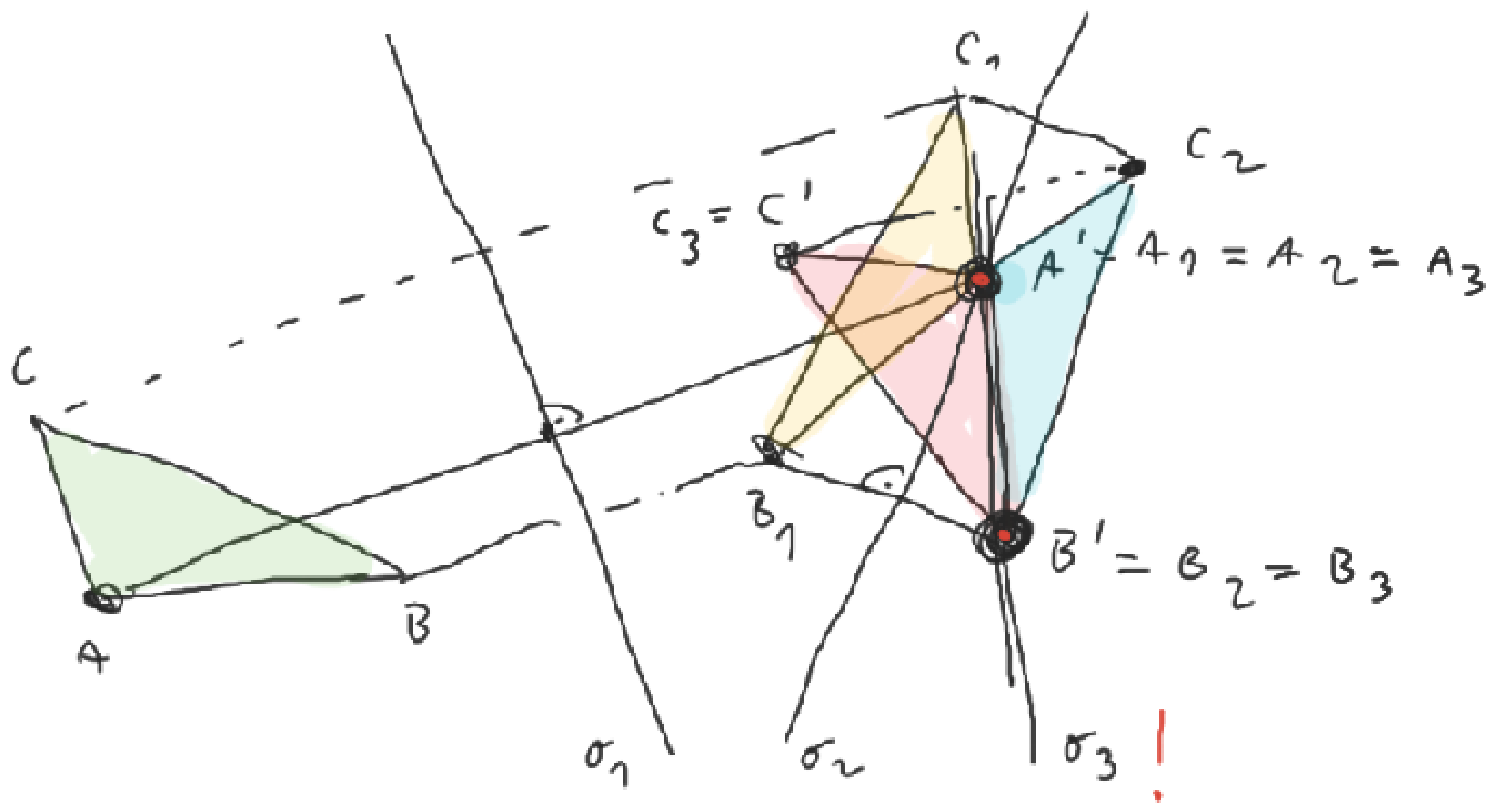
HOTOVO.



SHODNÉ △

(c) SKLÁDÁNÍ ... obecná nepřímá shodnost

(posunutá soum)



KONSTR. ... obdobná,

jen třeba další krok:

1) σ_1 = osa AA'

$\rightsquigarrow$ $A_1B_1C_1$ = obraz ABC

$\rightsquigarrow$ $A_1 = A'$

2) σ_2 = osa B_1B'

$\rightsquigarrow$ $A_2B_2C_2$ = obraz $A_1B_1C_1$

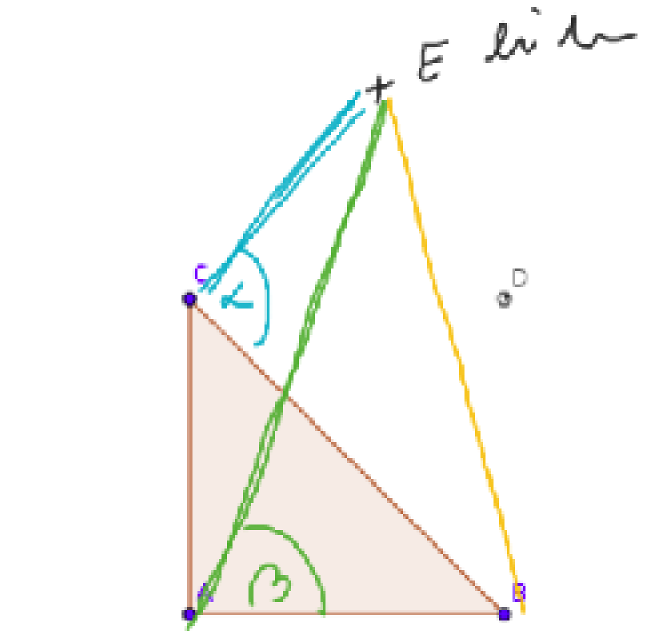
$\rightsquigarrow$ $B_2 = B'$

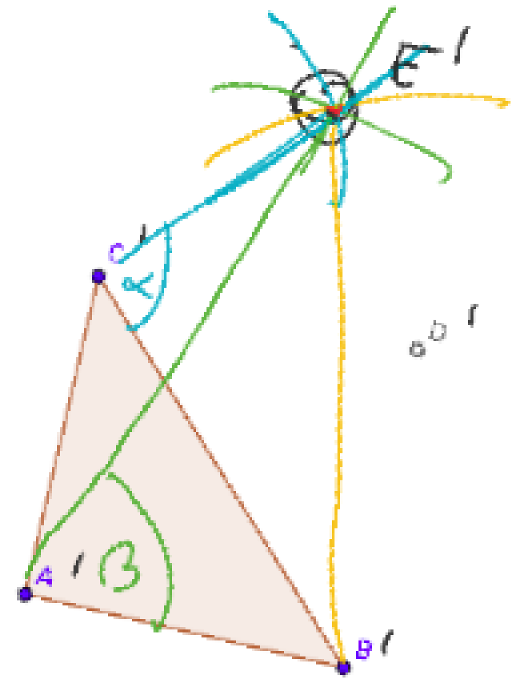
$A_2 = A_1 = A'$

3) σ_3 = přímka $A'B'$!

$\rightsquigarrow$ $C_3 = C'$ ...

(D) OBECNĚ ... obraz ob. bodu pomocí vlastností

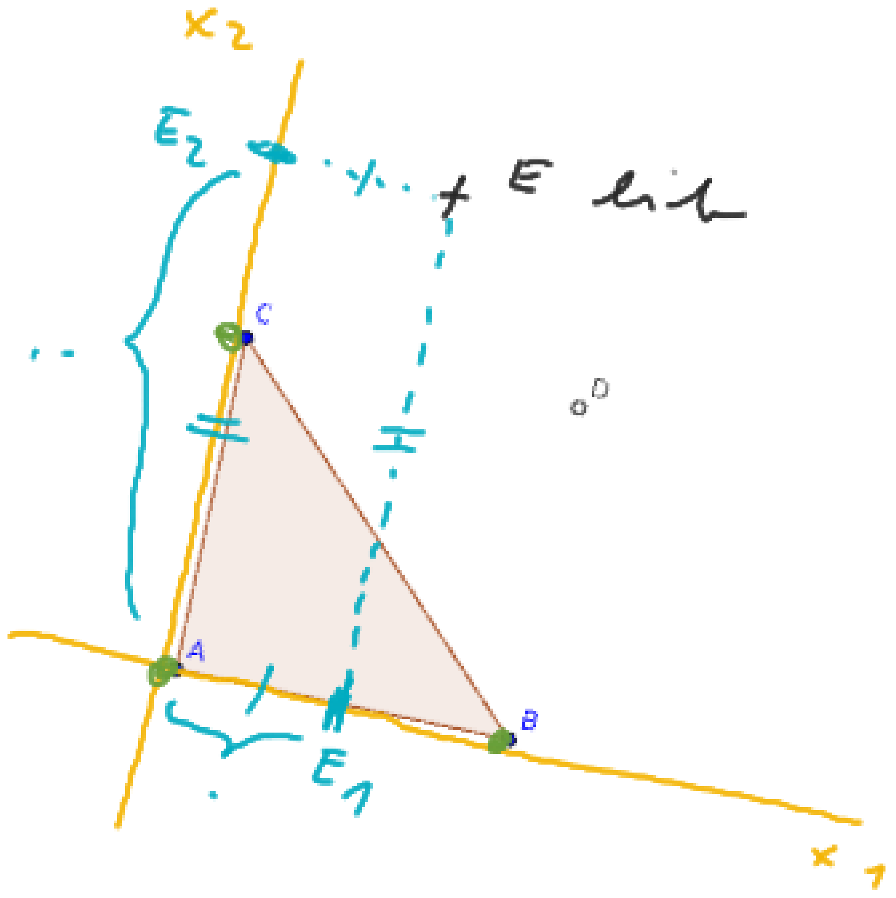


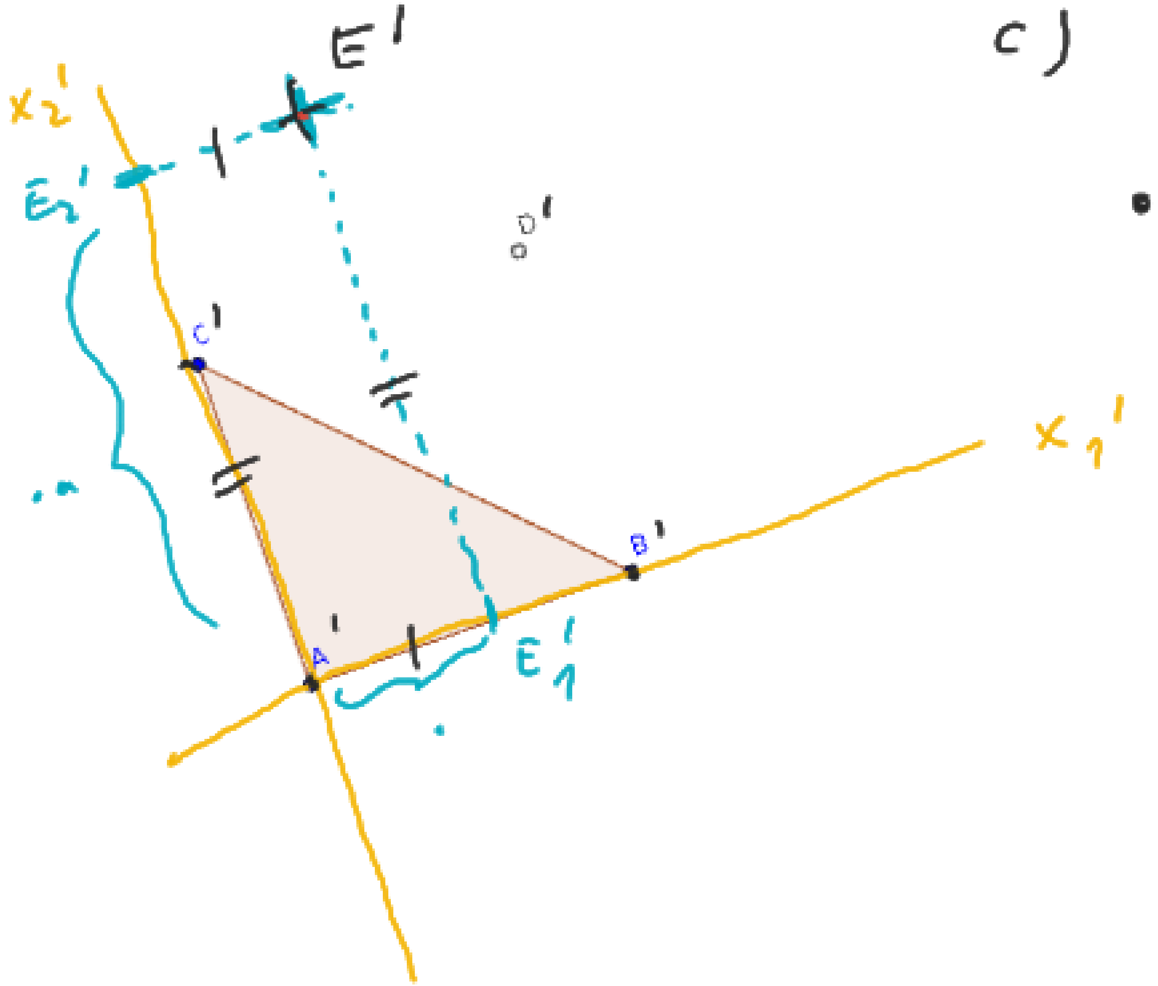


NÁPADY

a) přenášení vzdáleností

b) —//— úhlů

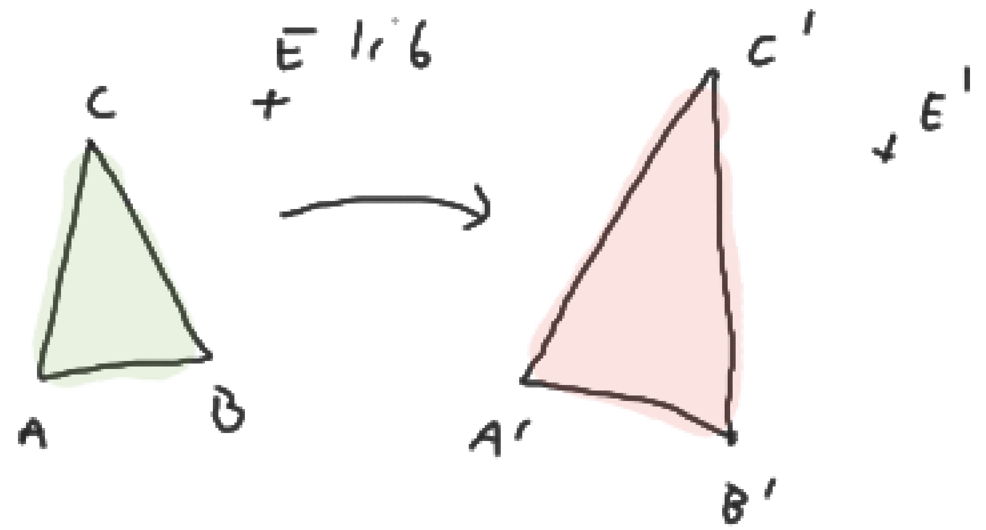




c) přenášení "souřadnic"

- E_1, E_2 = souř. bodu E [pomocí ∥]
- E_1', E_2' = obrazy .. [vzdálenosti]
- E' = složení obrazu [pomocí ∥]

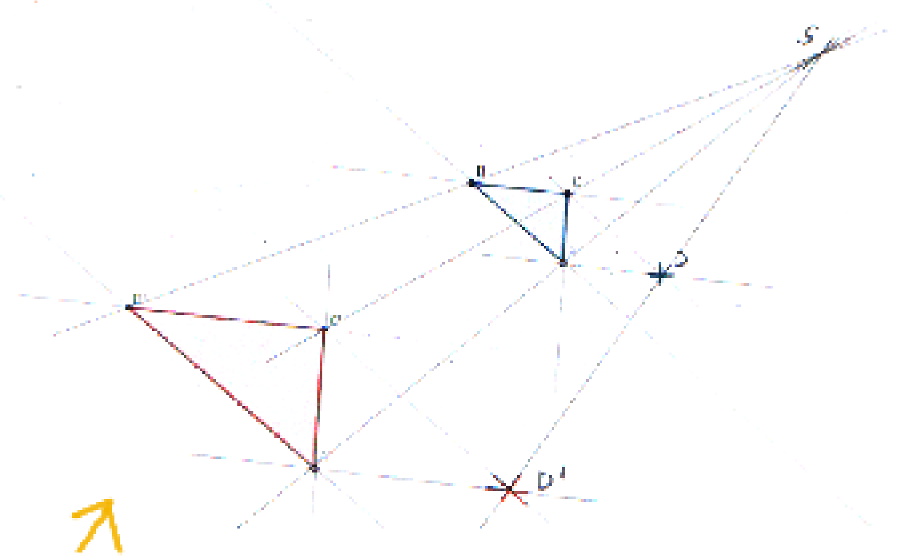
VIII. PODOBNÁ ZOBR.



- od podobných △ k podobným zobr...

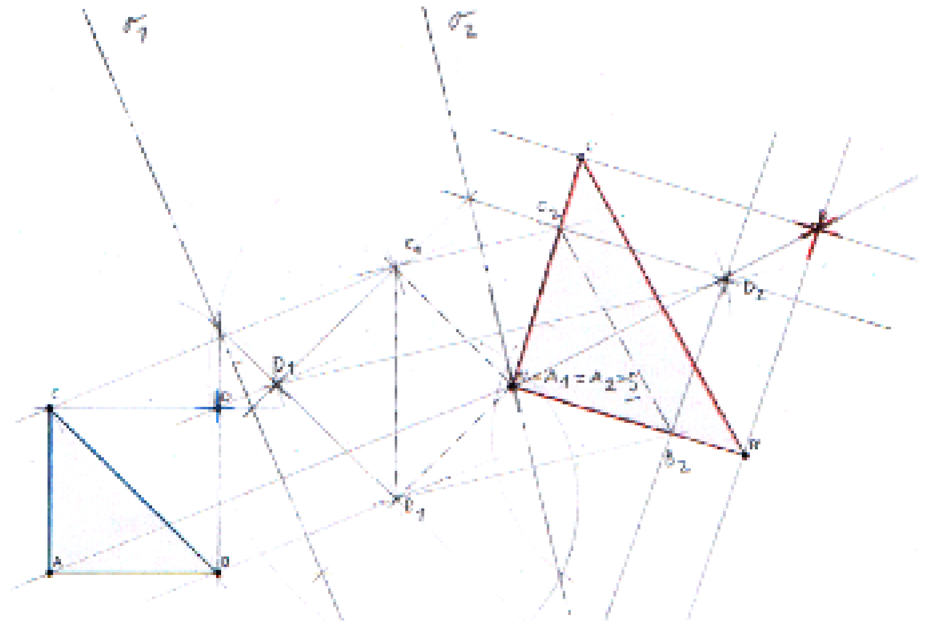
(A) VLASTNOSTI

- POMĚRY vzdáleností
- ODCHYLKY
- kolineárnost



(B) ZÁKLADNÍ

- STEJNOLEHLOST

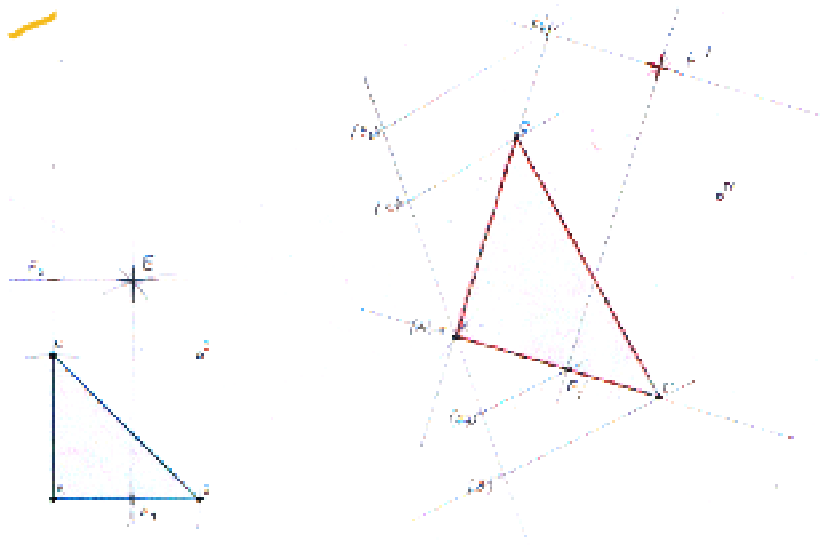


(C) SKLÁDÁNÍ

- pomocí ZÁKLADNÍCH

(D) OBECNĚ

- pomocí VLASTNOSTI



(A) VLASTNOSTI (invarianty)

- POMĚRY vzdáleností $\quad |A'B'| = k \cdot |AB|$

  k … koef. podobnosti (>0)

  … NEZÁV. na A, B

  … $k = 1 \iff$ SHODNOST

- ODCHYLKY $\quad \measuredangle A'B'C' = \measuredangle ABC$
- kolineárnost

- injektivnost $\quad A \neq B \longrightarrow A' \neq B'$

POZN.

- $\text{obsah}' = k^2 \cdot \text{obsah}$

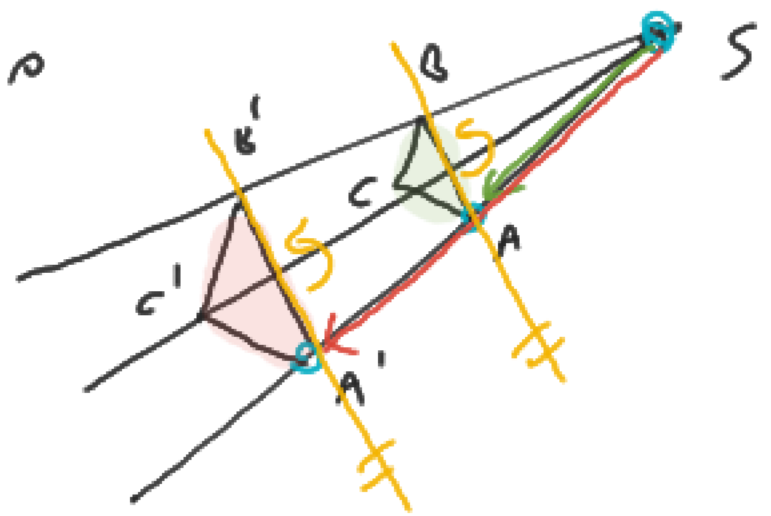
(B) ZÁKLADNÍ PODOBNOST = STEJNOLEHLOST = škálování

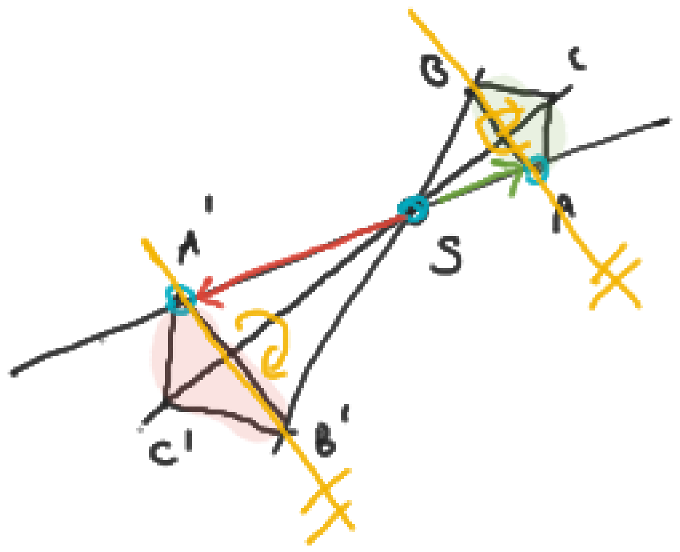
... určena STŘEDEM S a KOEF. $k \in \mathbb{R}$

... tak, že

$$\boxed{\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}} \quad \text{pro lib. } A$$

$k > 0$



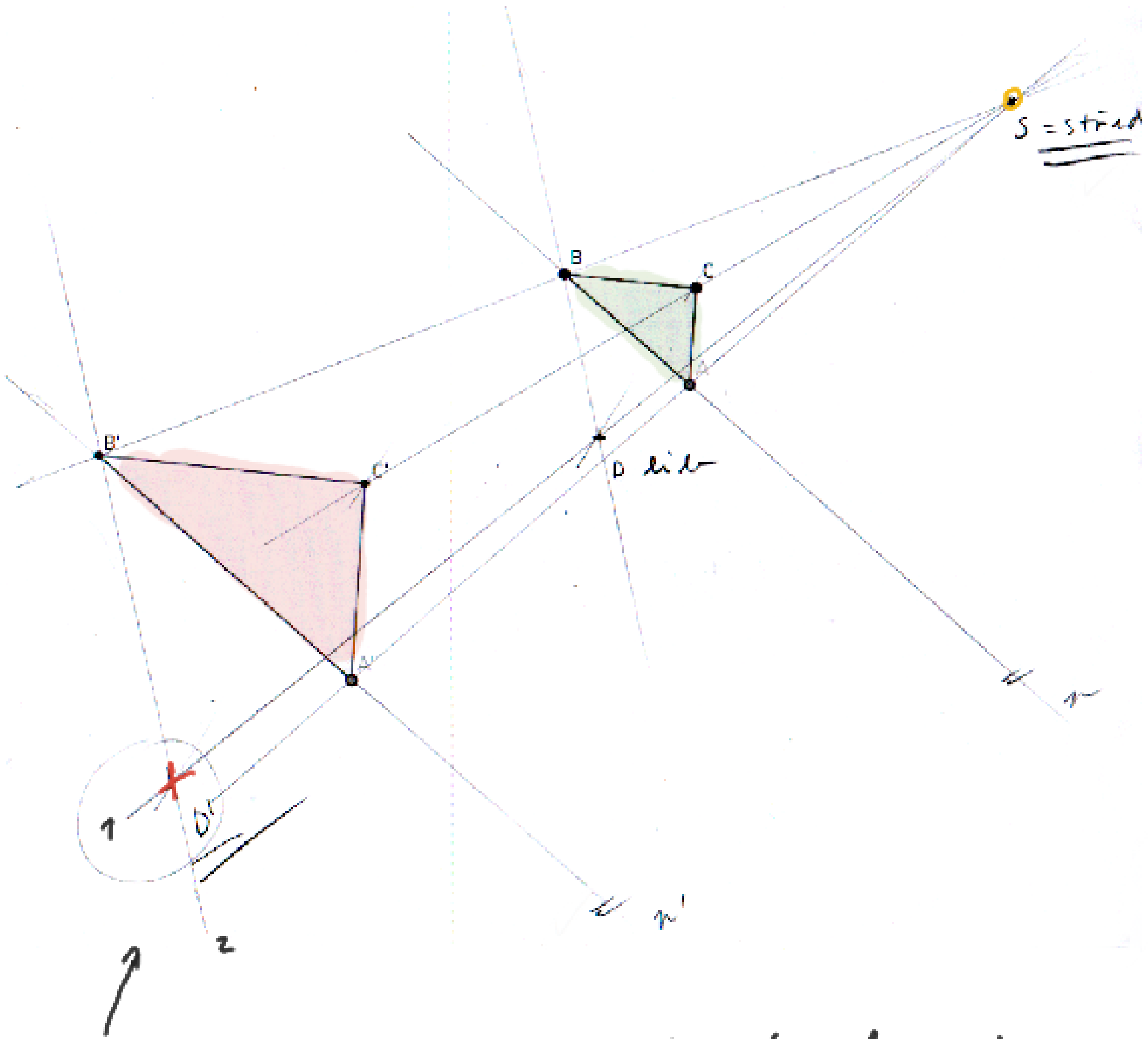


$k < 0$

POZN.

- $(k =) \dfrac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \dfrac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}} \iff A'B' \parallel AB$ ↯
- střed = PEVNÝ bod

(B) ZÁKLADNÍ ... charakterizace



konstr. obrazu ob. bodu:

1) $D' \in SD$, 2) $B'D' \parallel BD$

STEJNOLEHLOST

$\Updownarrow$

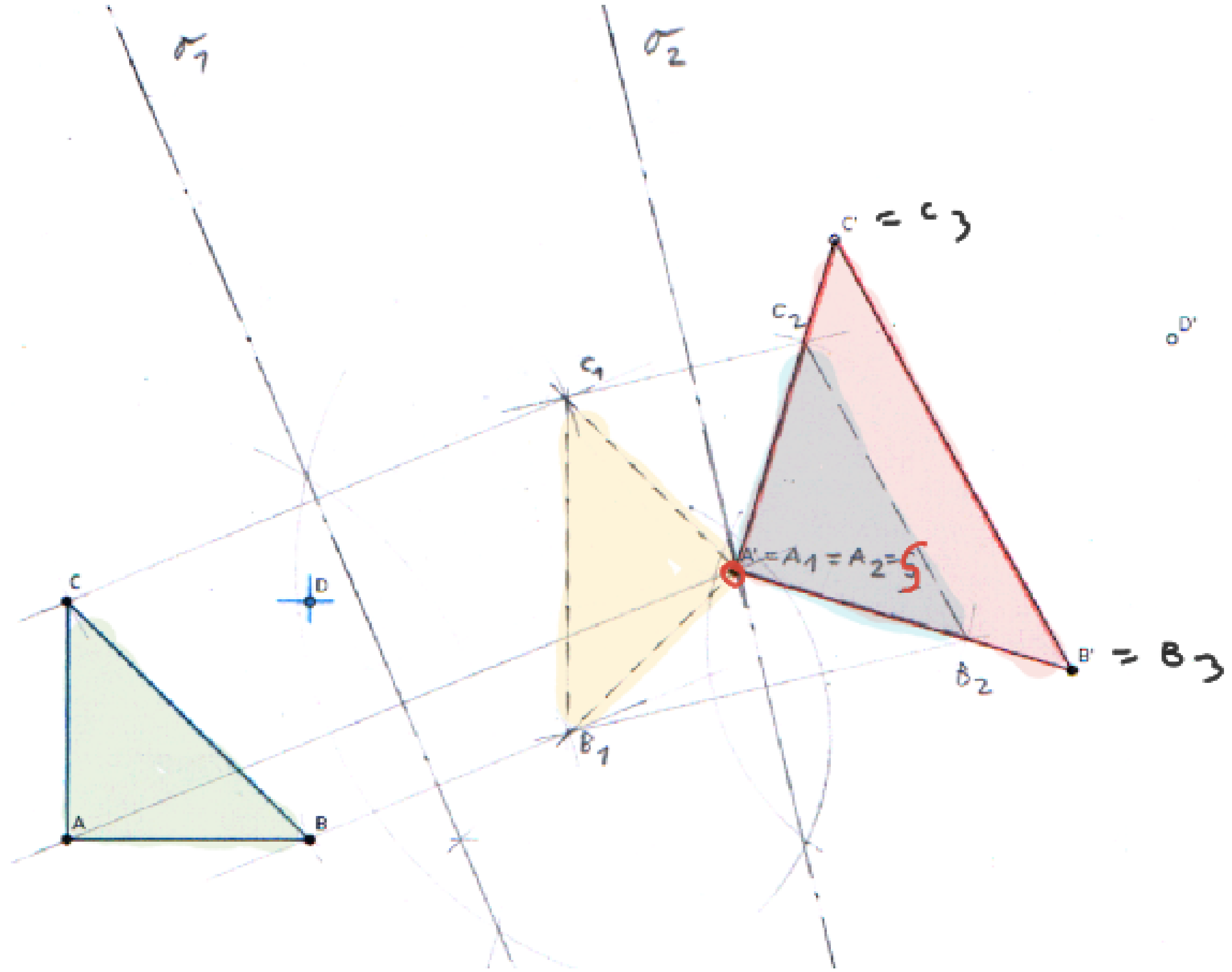
1) AA', BB', CC' prochází jedním bodem .. STŘED

2) $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, ... KOEF.

POZN.

- přímé (v rovině pro lib. k)
- involutivní
  $\Leftrightarrow$ $k = 1$ (id.) nebo $k = -1$ (středová soum.)
- $n = n' \Leftrightarrow n \ni$ střed

(c) SKLÁDÁNÍ ... vyjádřete danou podobnost jako složení osových soum. a STEJNOLEH...



KONSTR. (např.)

1) osové soum. ...

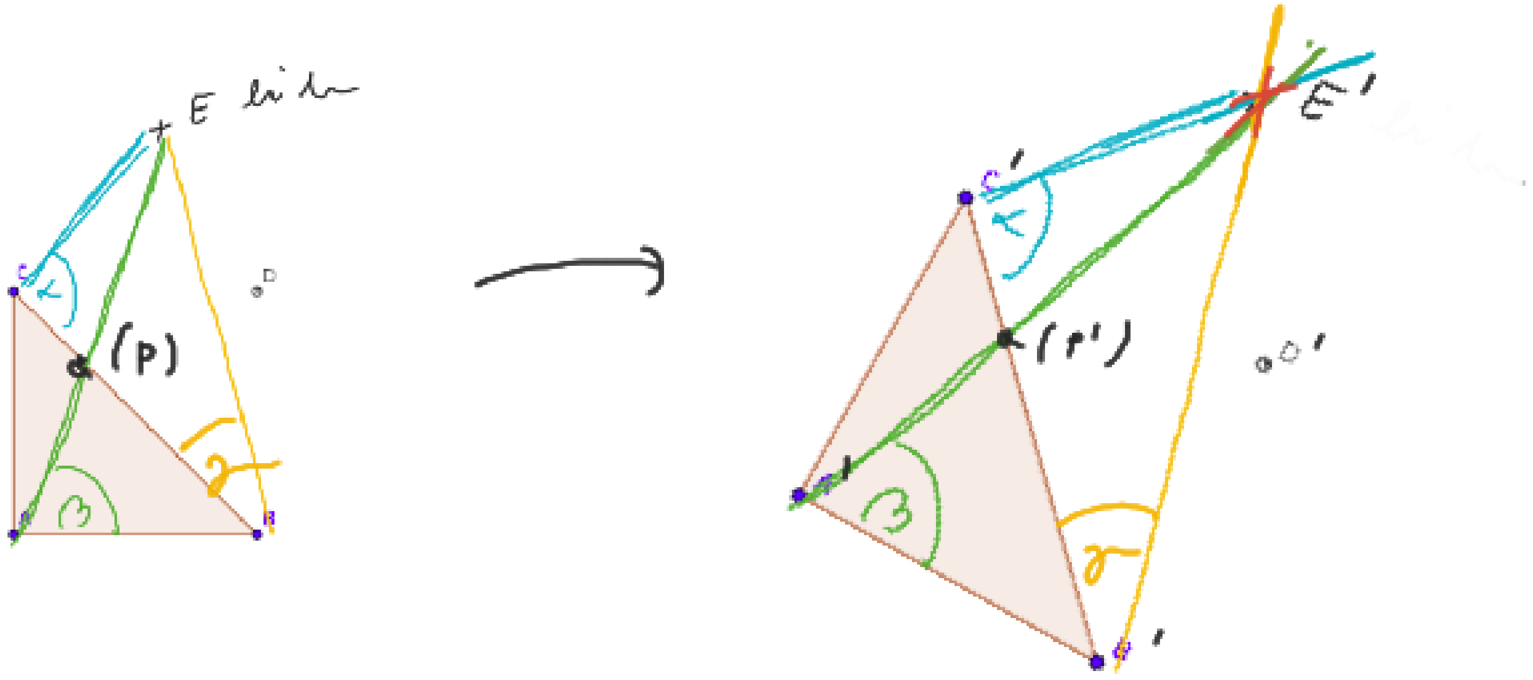
$\sigma_1, \sigma_2 \rightsquigarrow \triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$

... minulé cvičení

2) STEJNOLEHLOST

$S = A', \; k = \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB_2}} = \frac{\overrightarrow{SC'}}{\overrightarrow{SC_2}}$

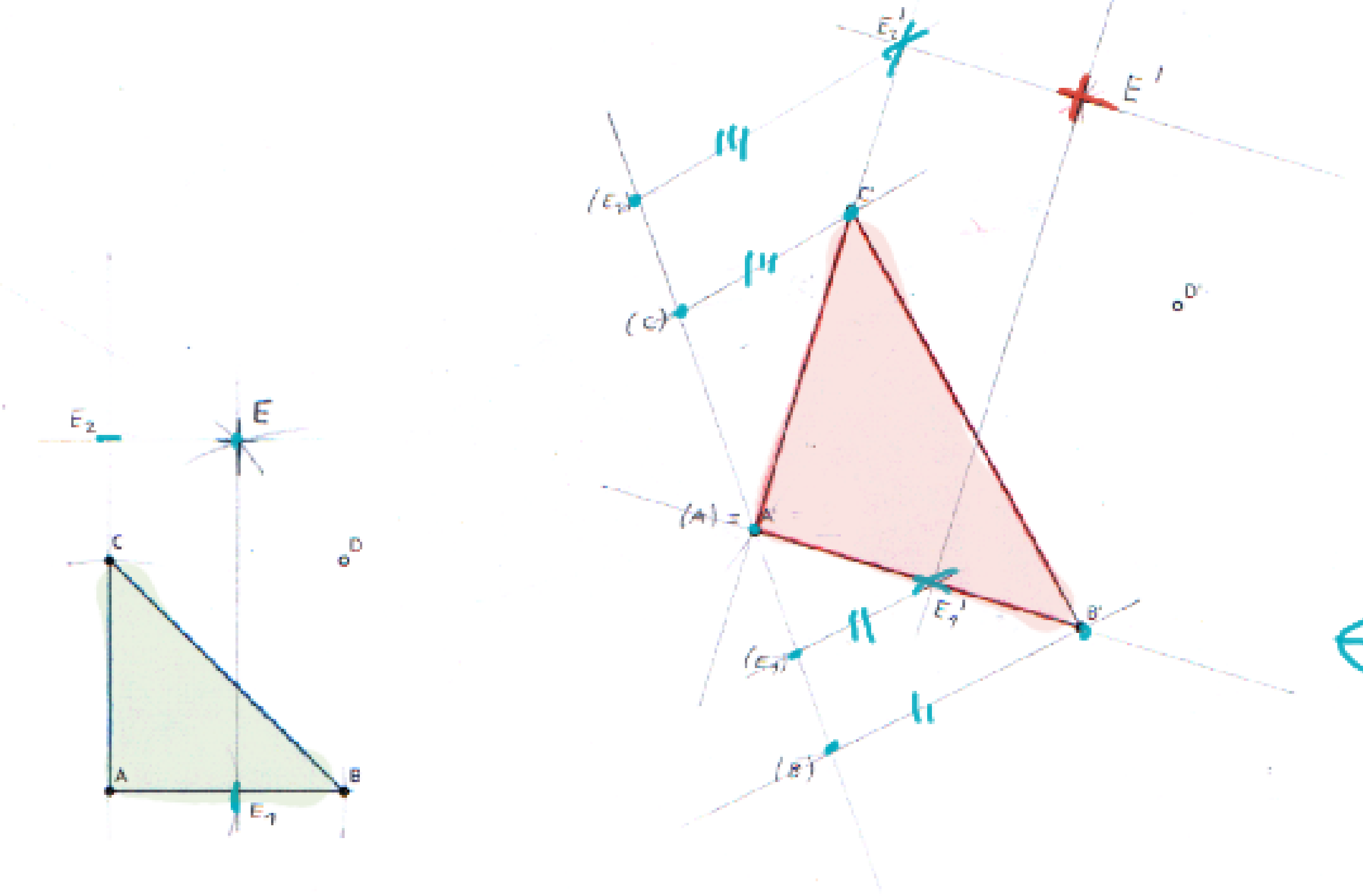
(D) OBECNĚ ... obraz. ob. bodu pomocí VLASTNOSTÍ



NÁPADY

a) přenášení POMĚRŮ
[2x např. pomocí bodu P]

b) —— // —— ÚHLŮ

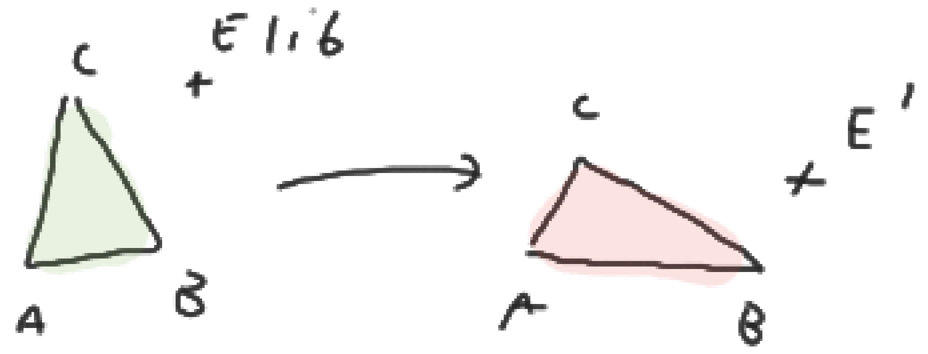


c) přenášení "SOUŘADNIC"

- E_1, E_2 = souř. bodu E
  [pomocí //]
- E_1', E_2' = obrazy E_1, E_2
  [POMĚRY 2x]
- E' = složení obrazu E
  [pomocí //]

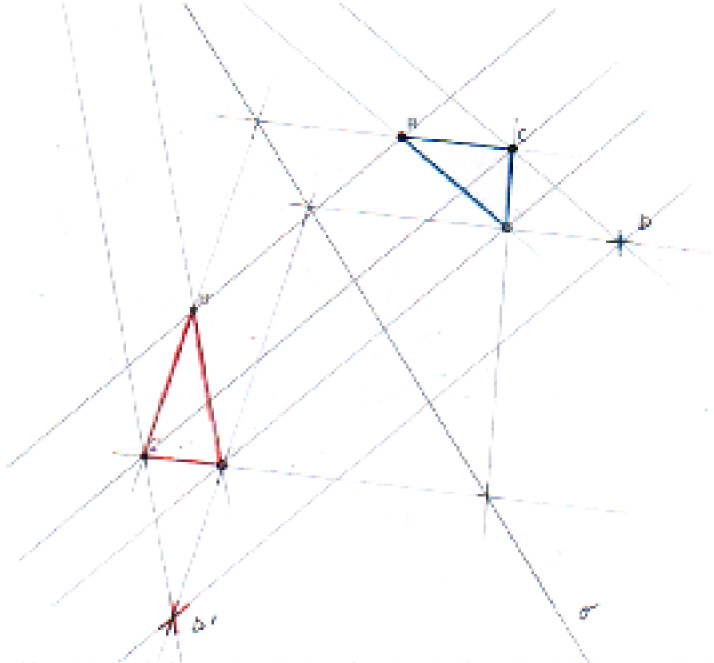
IX. AFINNÍ ZOBR.

• každé dva △ jsou afinně ekvivalentní...



(B) VLASTNOSTI

- KOLINEÁRNOST
- POMĚRY trojic kolin. bodů
- ROVNOBĚŽNOST

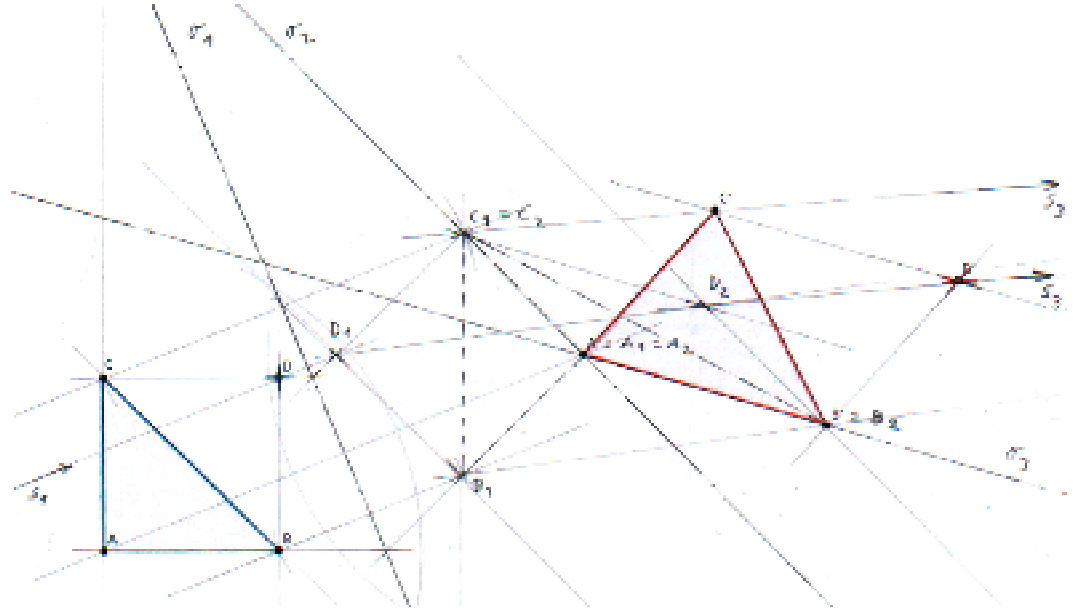


(A) ZÁKLADNÍ

- OSOVÁ AFINITA

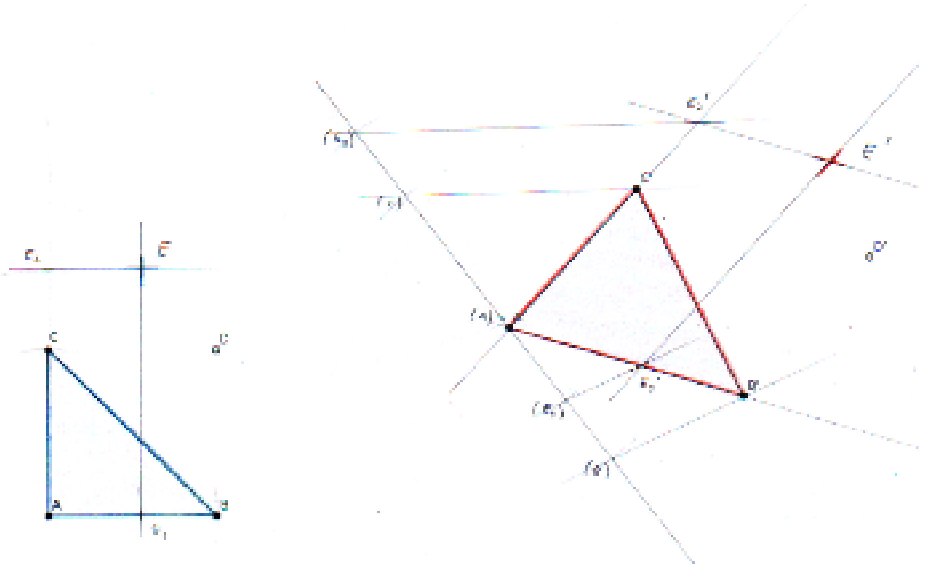
(C) SKLÁDÁNÍ

- pomocí ZÁKLADNÍCH



(D) OBECNÉ

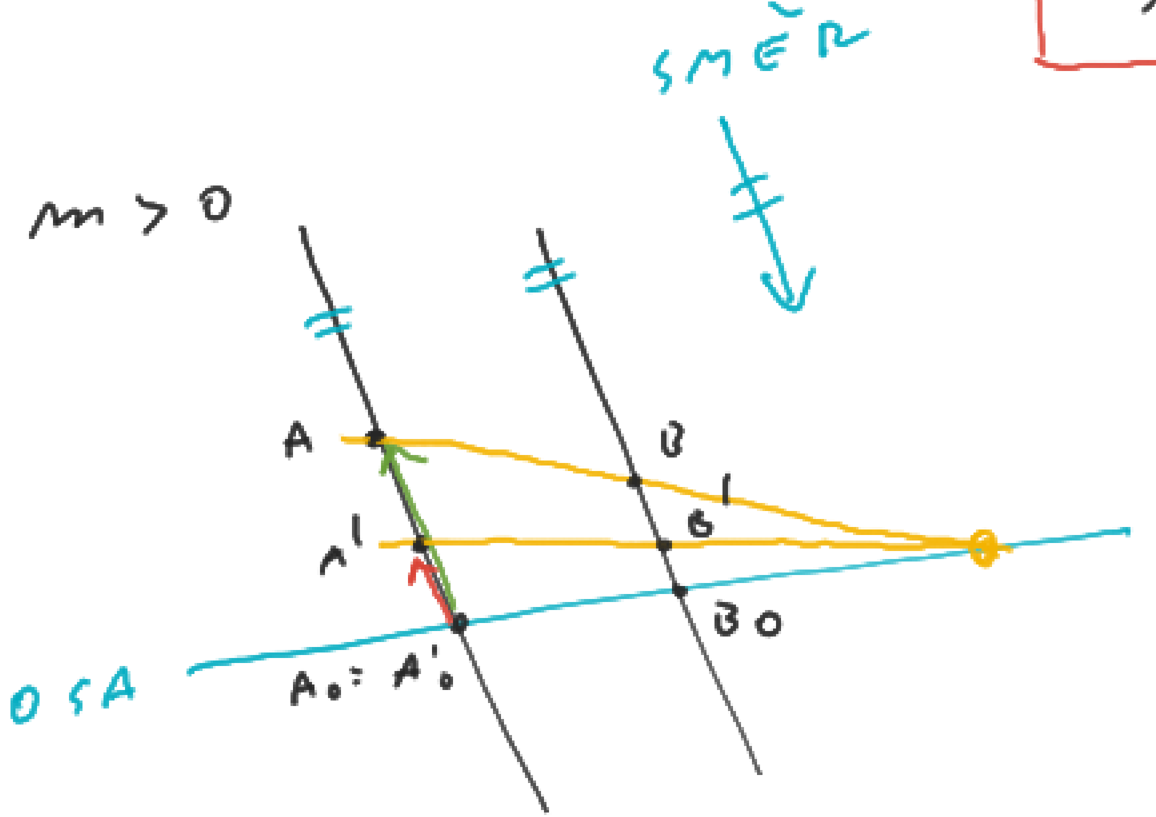
- pomocí VLASTNOSTÍ

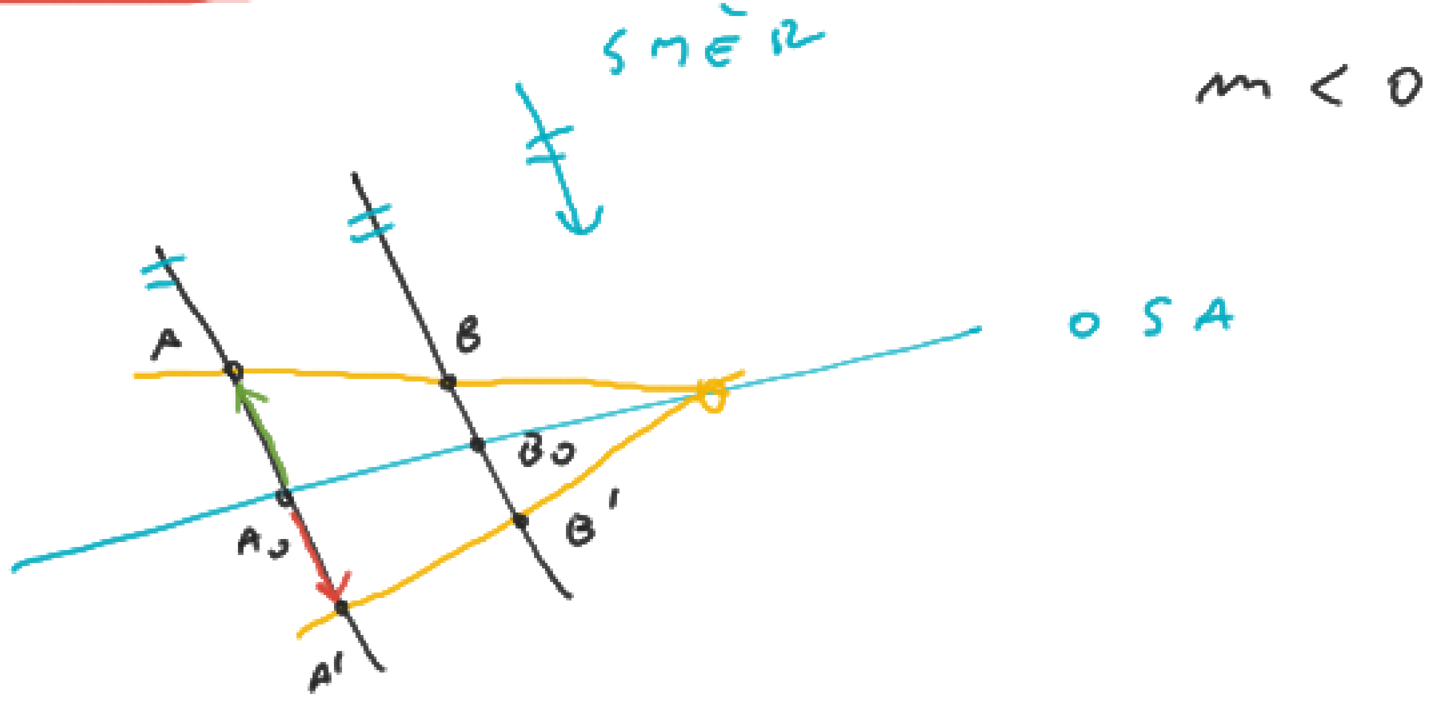


(A) ZÁKLADNÍ = OSOVÁ AFINITA
= škálování v JEDNOM směru

... určena osou, SMĚREM a KOEF. $m \in \mathbb{R}$

... tak, že $\boxed{\begin{array}{l} 1)\ AA' \parallel \text{směrem} \\ 2)\ \overrightarrow{A_0A'} : \overrightarrow{A_0A} = m \end{array}}$ pro lib. A

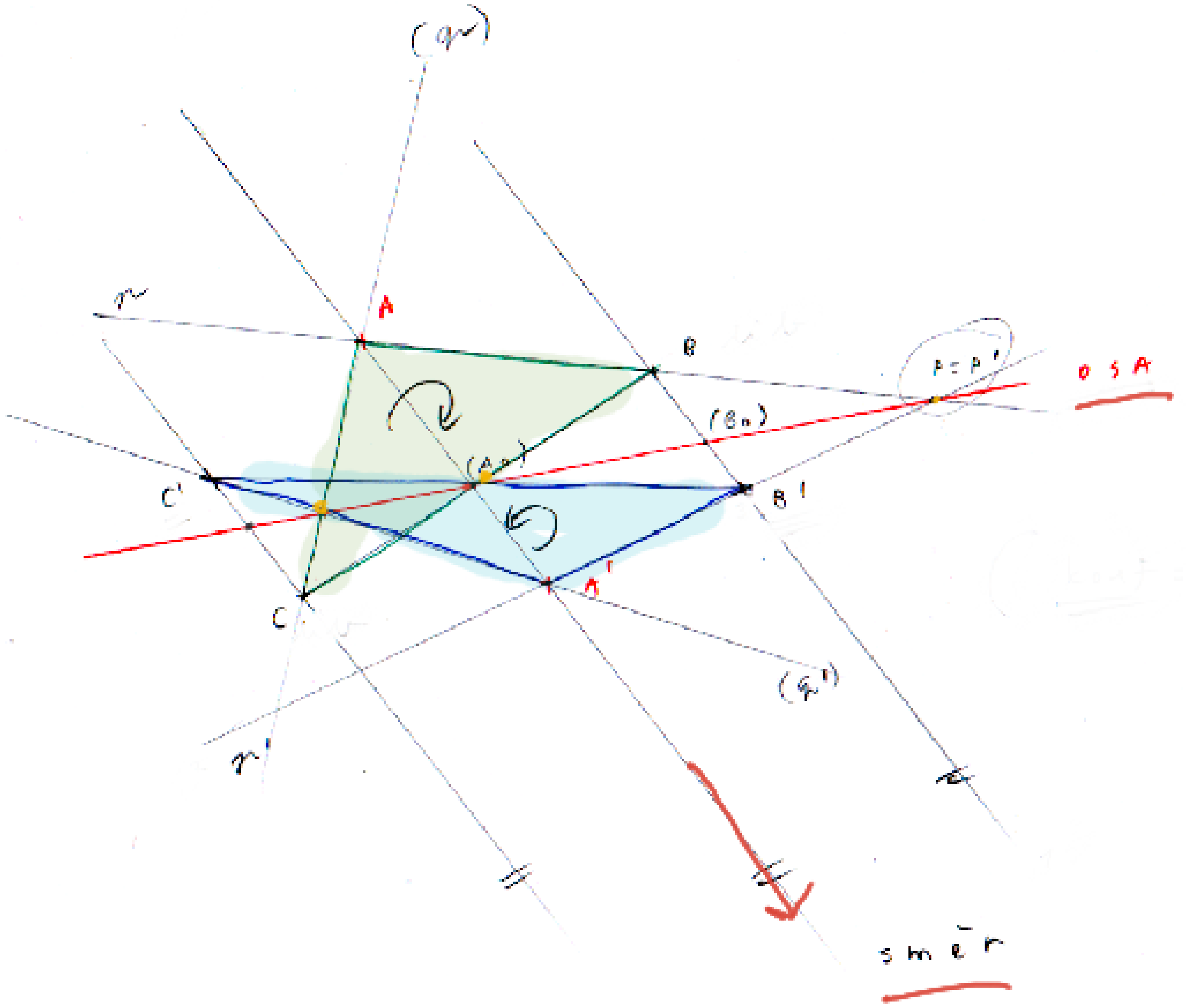




POZN.

- $(m =)\ \dfrac{\overrightarrow{A_0A'}}{\overrightarrow{A_0A}} = \dfrac{\overrightarrow{B_0B'}}{\overrightarrow{B_0B}} \iff AB \cap A'B'$ na ose ↯ [podobné △]
- každý bod na ose je PEVNÝ.

(A) ZÁKLADNÍ ... charakterizace



$$\left(m = \frac{\overrightarrow{A_0A'}}{\overrightarrow{A_0A}} \doteq 0{,}8 \right)$$

OSOVÁ AFINITA

$\Updownarrow$

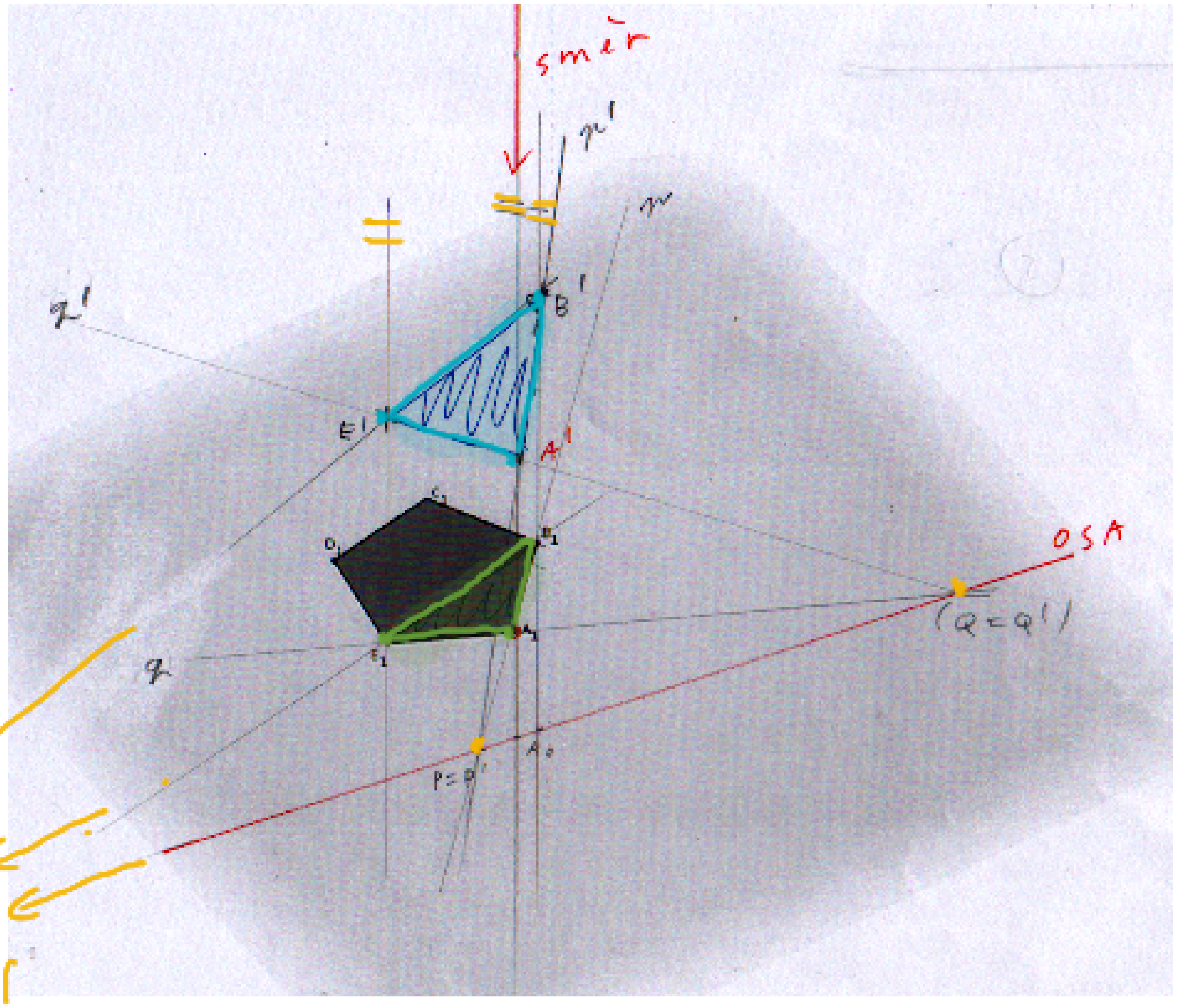
1) $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ ... SMĚR
2) $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$ leží na přímce ... OSA

POZN.

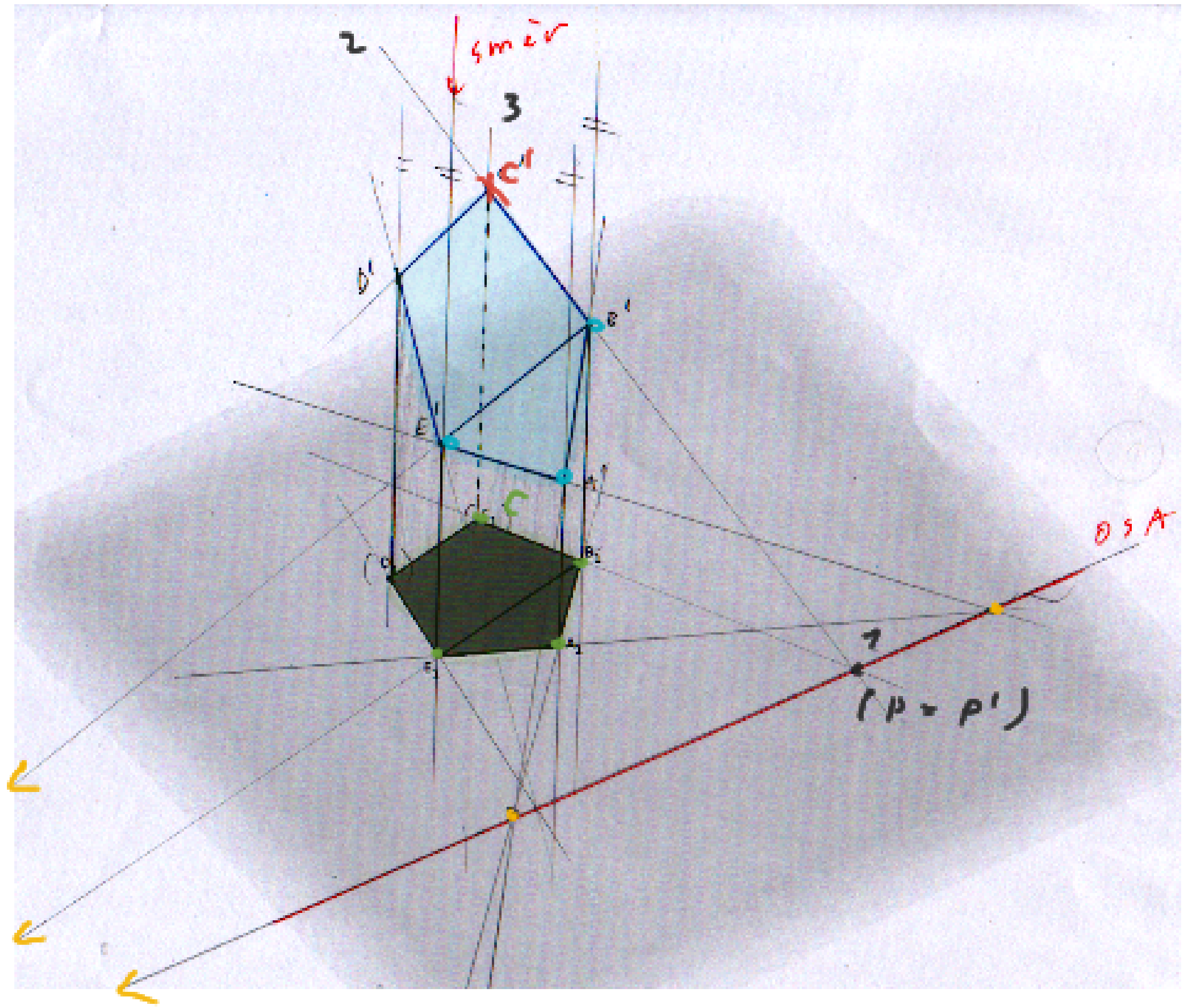
- přímé $\Leftrightarrow$ $m > 0$
- nepřímé $\Leftrightarrow$ $m < 0$
- involutivní $\Leftrightarrow$ $\underbrace{m = 1}_{\text{id}}$ nebo $\underbrace{m = -1}_{\text{šikmá soum.}}$
- $p = p' \Leftrightarrow p = \text{osa}$ nebo $p \parallel$ směrem

(A) ZÁKLADNÍ

charakterizace & konstr. obrazu ob. bodu;



bod na ose!



1) $p = p' = CB \cap$ osou

2) $C'B' = C'P'$

3) $C'C \parallel B'B$

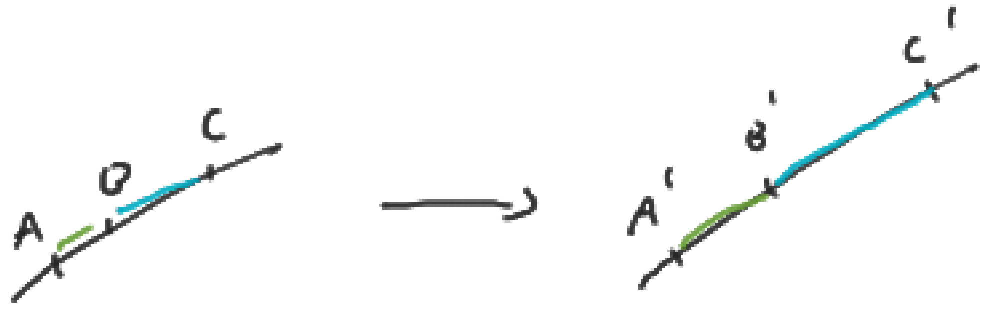
POZN.

- sr. Desarguesovou větou
  (ex. STŘED/SMĚR ⟺ ex. OSA)
- sr. s ŘEZEM hranolu
  (... osa = STOPA, směr = průmět HRAN)

(B) VLASTNOSTI (invarianty)

osová afinita ⇝ každé AFINNÍ zobr. zachovává:

- KOLINEÁRNOST



(resp. 

⟶ $A'=B'=C'$)

- POMĚRY trojic kolin. bodů (pokud nedegeneruje)

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}$$

- ROVNOBĚŽNOST

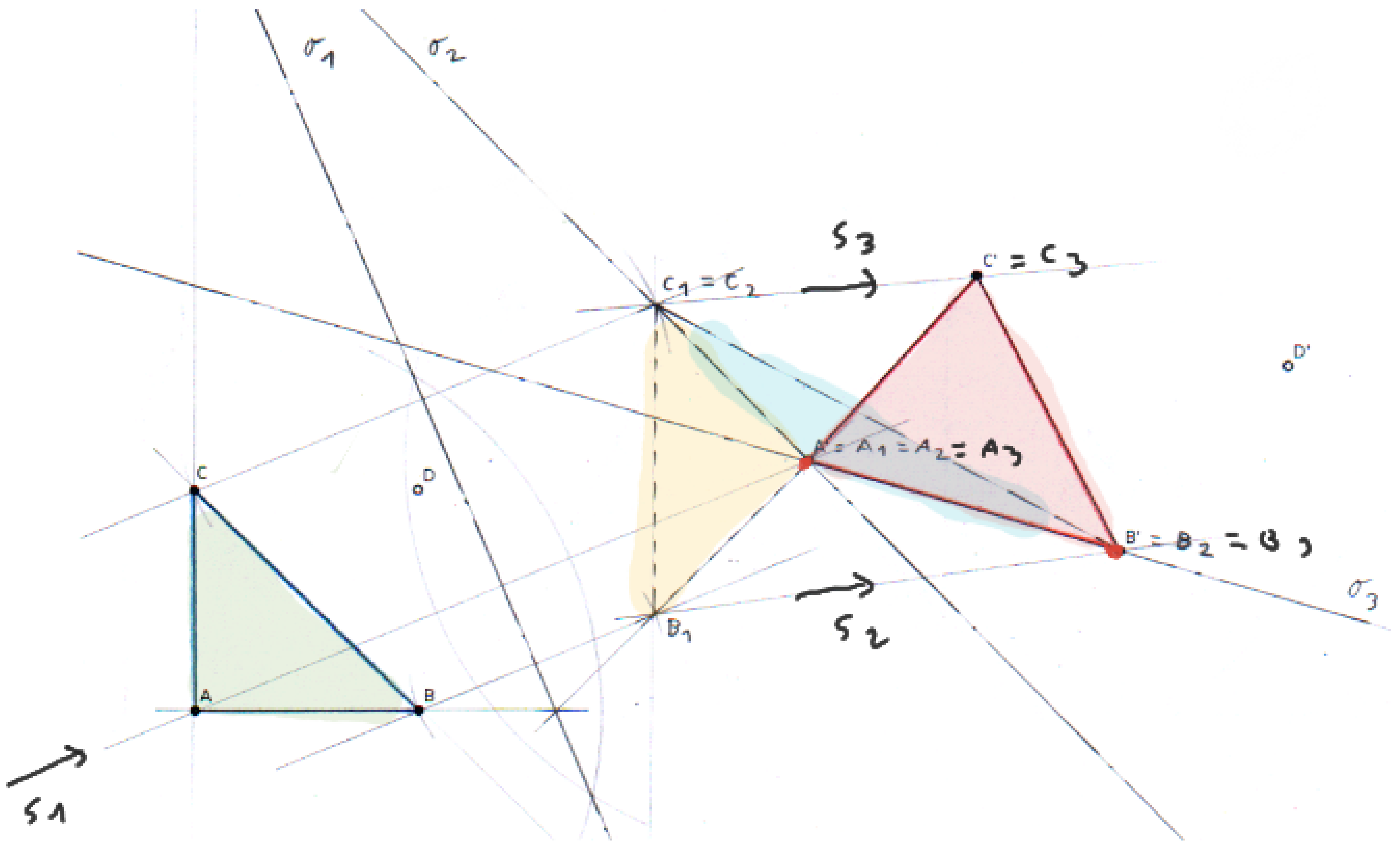
(důsledek předch.)

POZN.

- NEMUSÍ být injektivní
- EKVI-AFINNÍ ... navíc zach. OBSAHY

(c) SKLÁDÁNÍ ... vyjádřete danou afinitu jako složení základních (= os. afinit)

Např.



KONSTR.

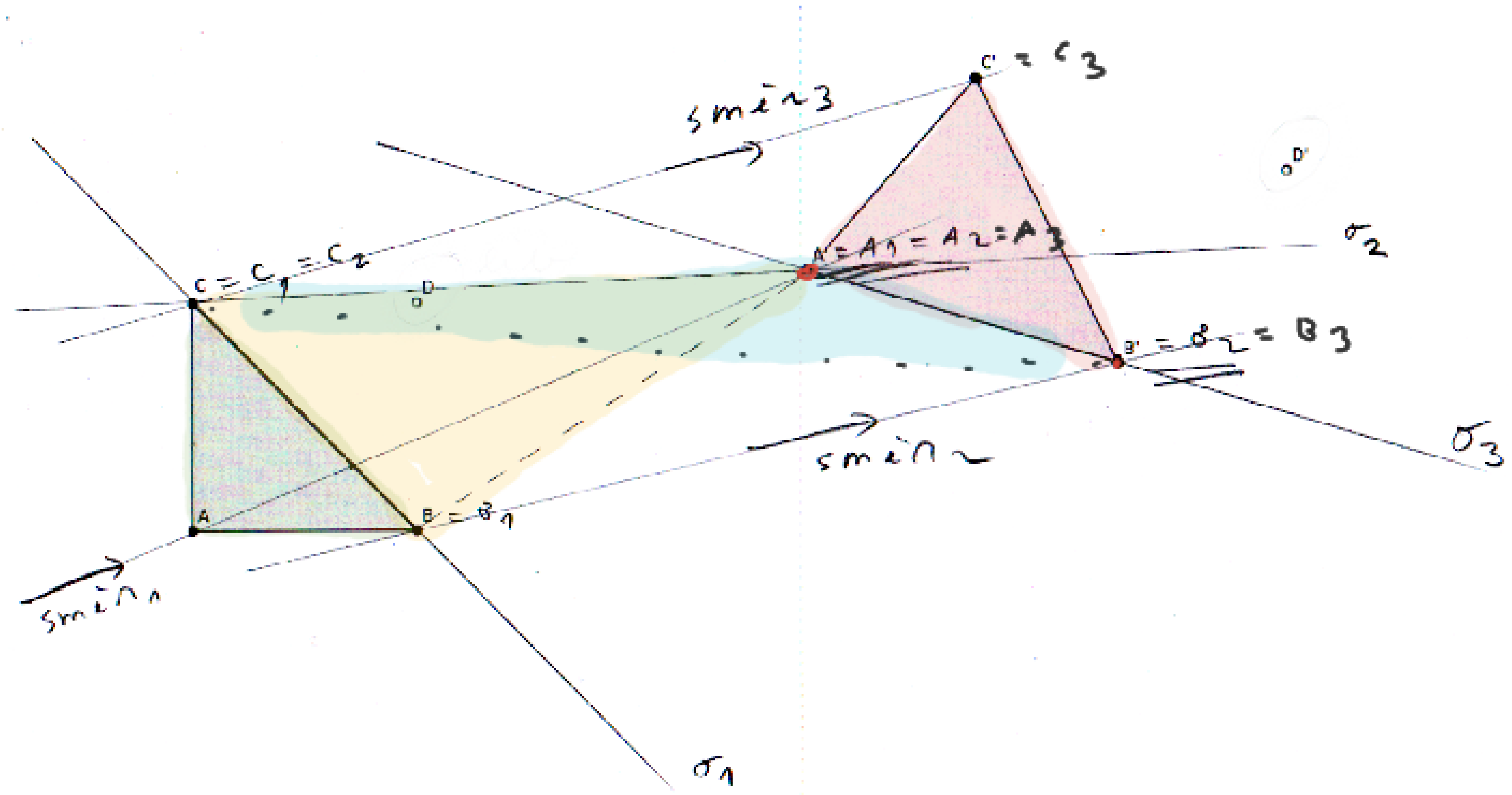
1) σ_1 lib
volíme σ_1 = osa AA'
⇝ $A_1B_1C_1$ = os. soum. ABC
⇝ $A_1 = A'$

2) $\sigma_2 \ni A'$!
volíme $\sigma_2 = A'C_1$ & $B_1 \mapsto B'$
⇝ $A_2B_2C_2$ = obraz $A_1B_1C_1$
⇝ $A_2 = A_1 = A'$, $B_2 = B'$, $C_2 = C_1$

3) $\sigma_3 = A'B'$ & $C_2 \mapsto C'$!
⇝ $A_3B_3C_3 = A'B'C'$

HOTOVO ... stačí MAX. 3

(c) SKLÁDÁNÍ ...... nebo taky např. takto:



KONSTR.

1) σ_1 lib

volíme $\sigma_1 = BC$ & $A \mapsto A'$

$\rightsquigarrow A_1B_1C_1 =$ obraz ABC

$\rightsquigarrow A_1 = A'$, $B_1 = B$, $C_1 = C$

2) $\sigma_2 \ni A'$!

volíme $\sigma_2 = A'C$ & $B_1 \mapsto B'$

$\rightsquigarrow A_2B_2C_1 =$ obraz $A_1B_1C_1$

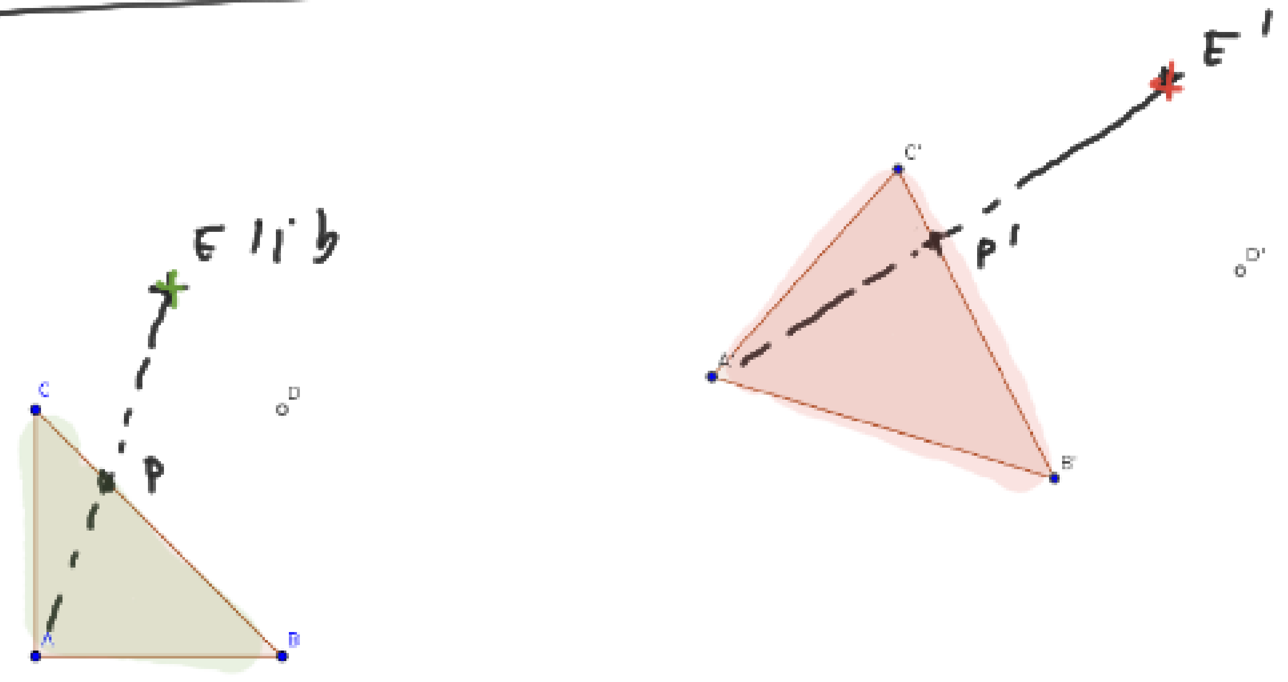
$\rightsquigarrow A_2 = A_1 = A'$, $B_2 = B'$, $C_2 = C_1$

3) $\sigma_3 = A'B'$ & $C_2 \mapsto C'$!

$\rightsquigarrow A_3B_3C_3 = A'B'C'$

HOTOVO ... stačí MAX. 3

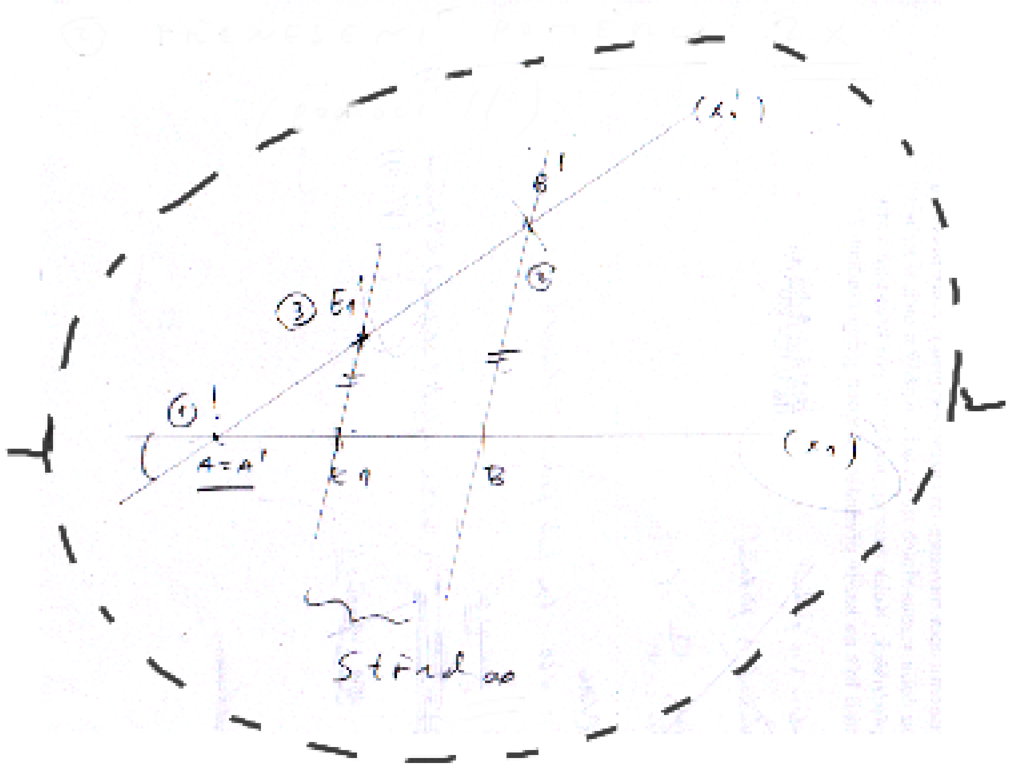
(D) OBECNĚ ... obraz ob. bodu pomocí VLASTNOSTÍ



NÁPADY

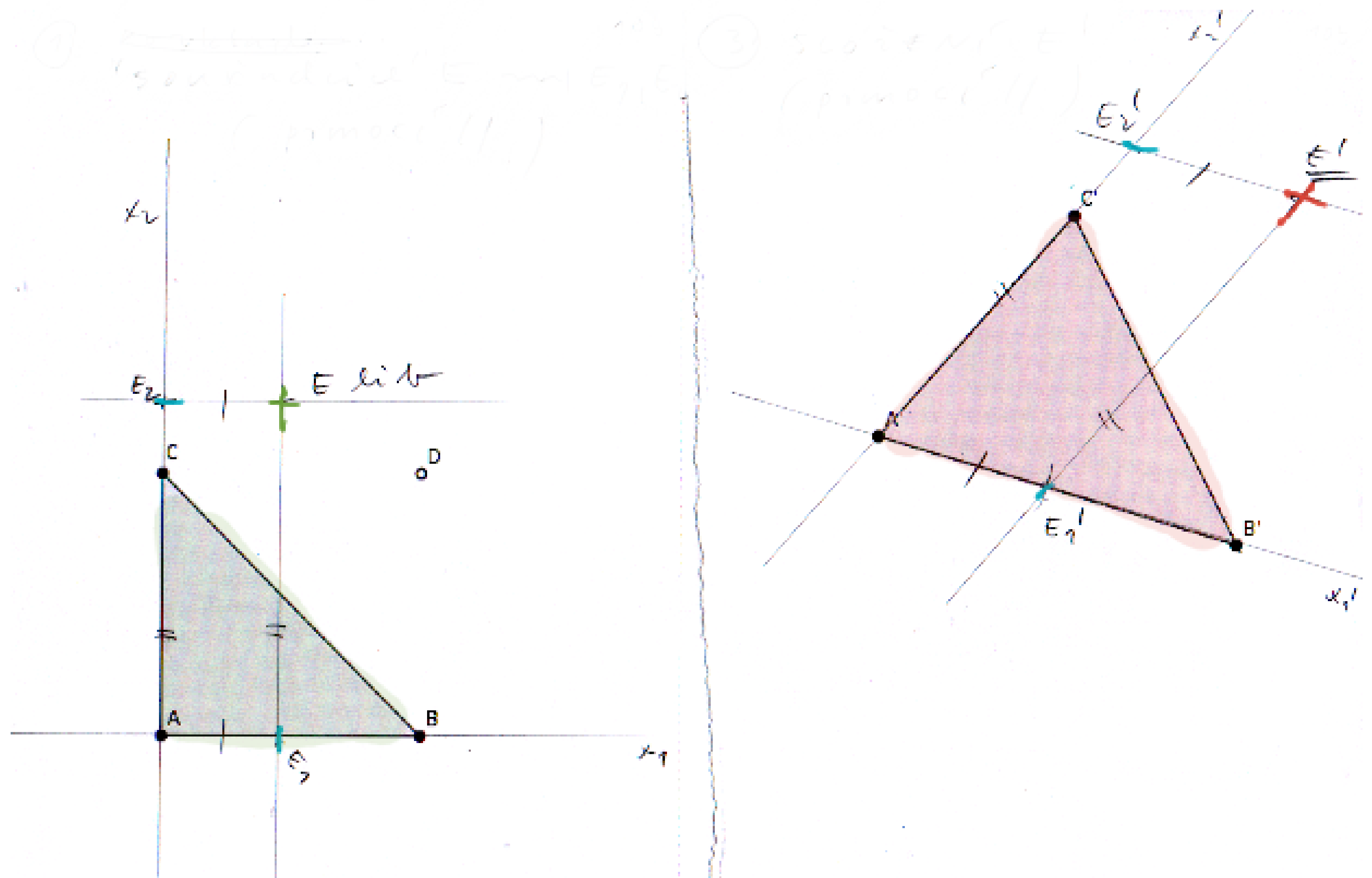
a) přenášení POMĚRŮ

[2x např. pomocí bodu P]



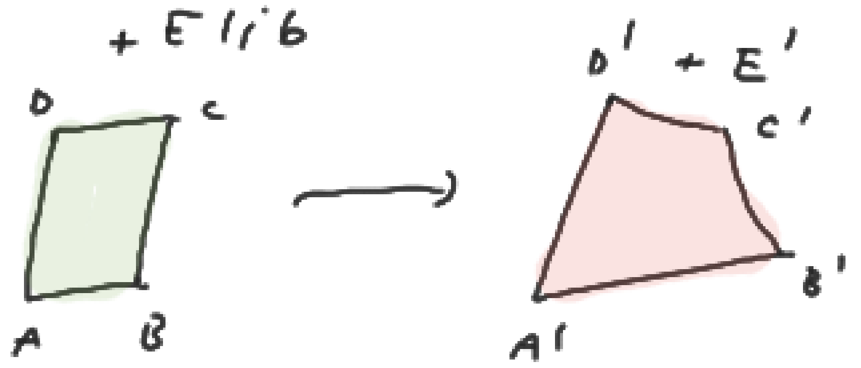
b) přenášení "SOUŘADNIC"

- E_1, E_2 – souř. bodu E
  [pomocí ∥]
- E_1', E_2' = obrazy E_1, E_2
  [POMĚRY 2x]
- E' = složení obrazu E
  [pomocí ∥]



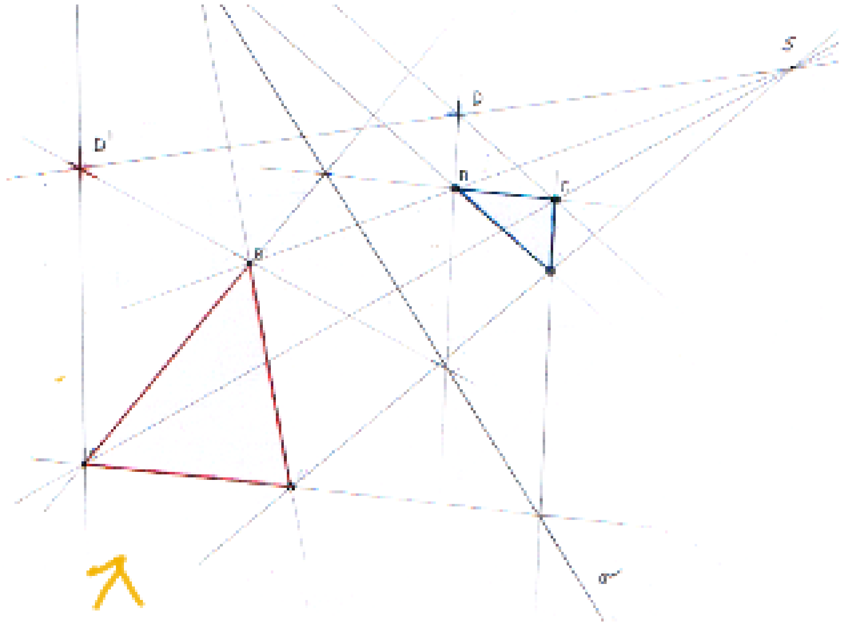
X. PROJEKTIVNÍ ZOBR.

• každé dva □ jsou afinně ekvivalentní...



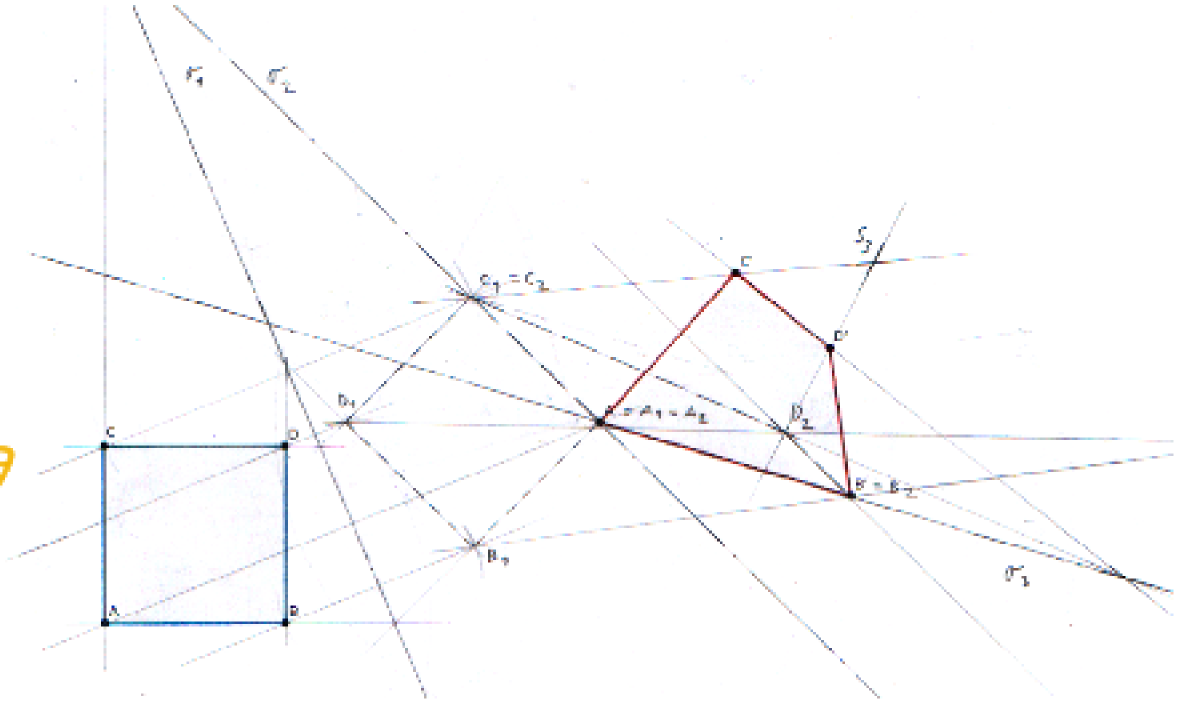
(B) VLASTNOSTI

- kolineárnost
- dvojpoměry čtveřic kolin. bodů



(A) ZÁKLADNÍ

- osová kolineace

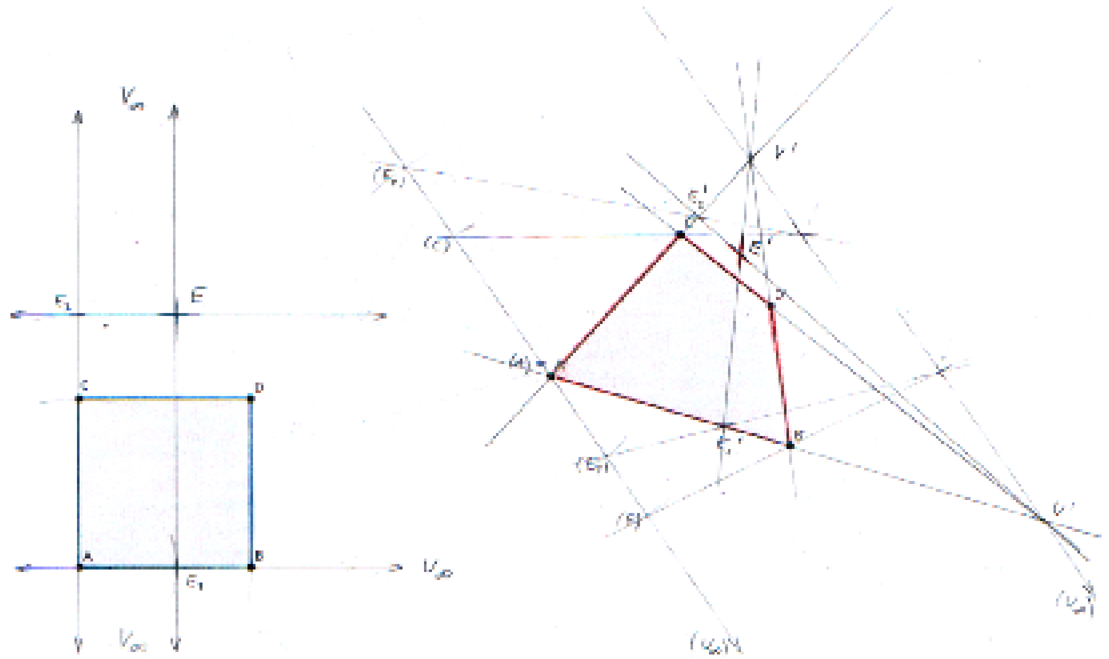


(C) SKLÁDÁNÍ

- pomocí základních

(D) OBECNÉ

- pomocí vlastností



(A) ZÁKLADNÍ = OSOVÁ KOLINEACE

... určena osou, STŘEDEM a KOEF. $m \in \mathbb{R}$

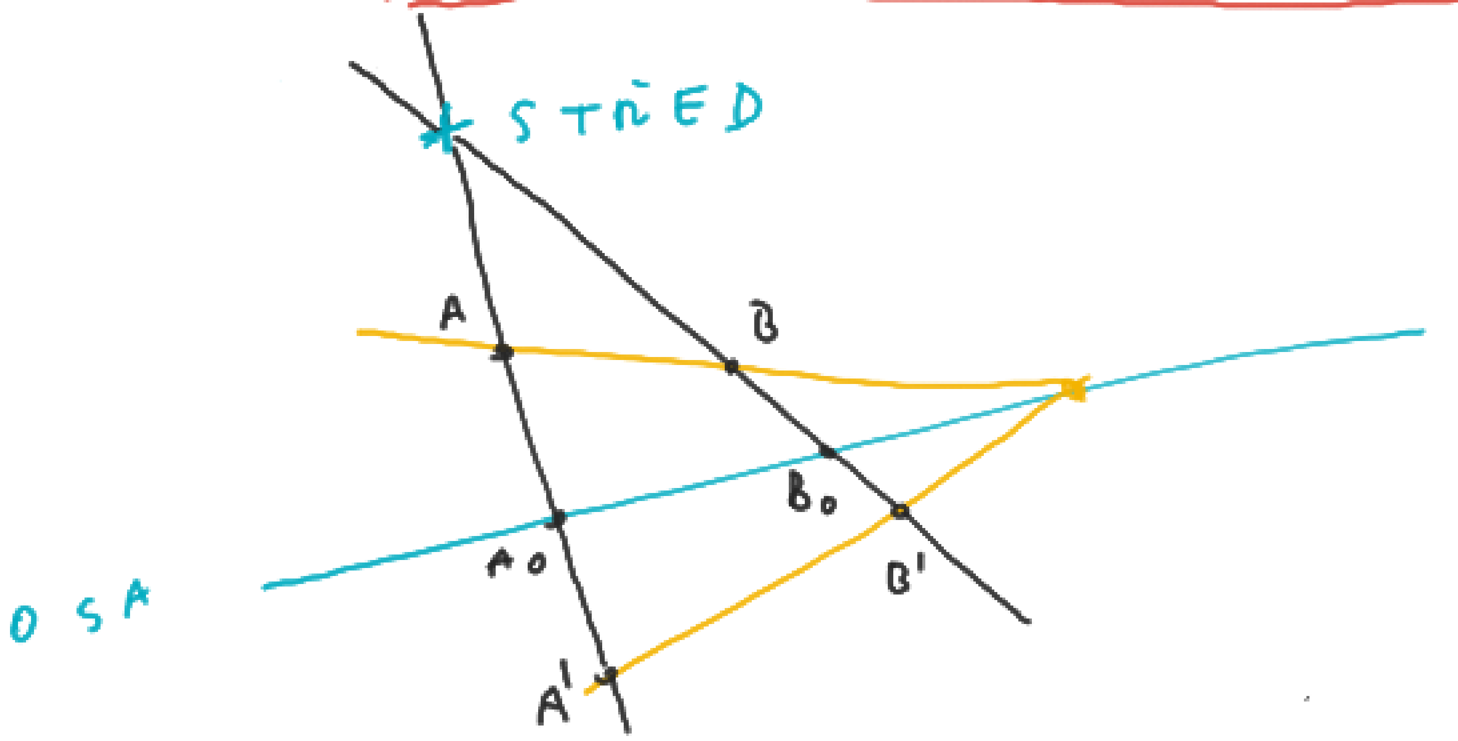
... tak, že

1) AA' proch. středem
2) DVOJPOMĚR $(S\,A\,A_0\,A') = m$

pro lib. A

DVOJPOMĚR = "dvojitý poměr"

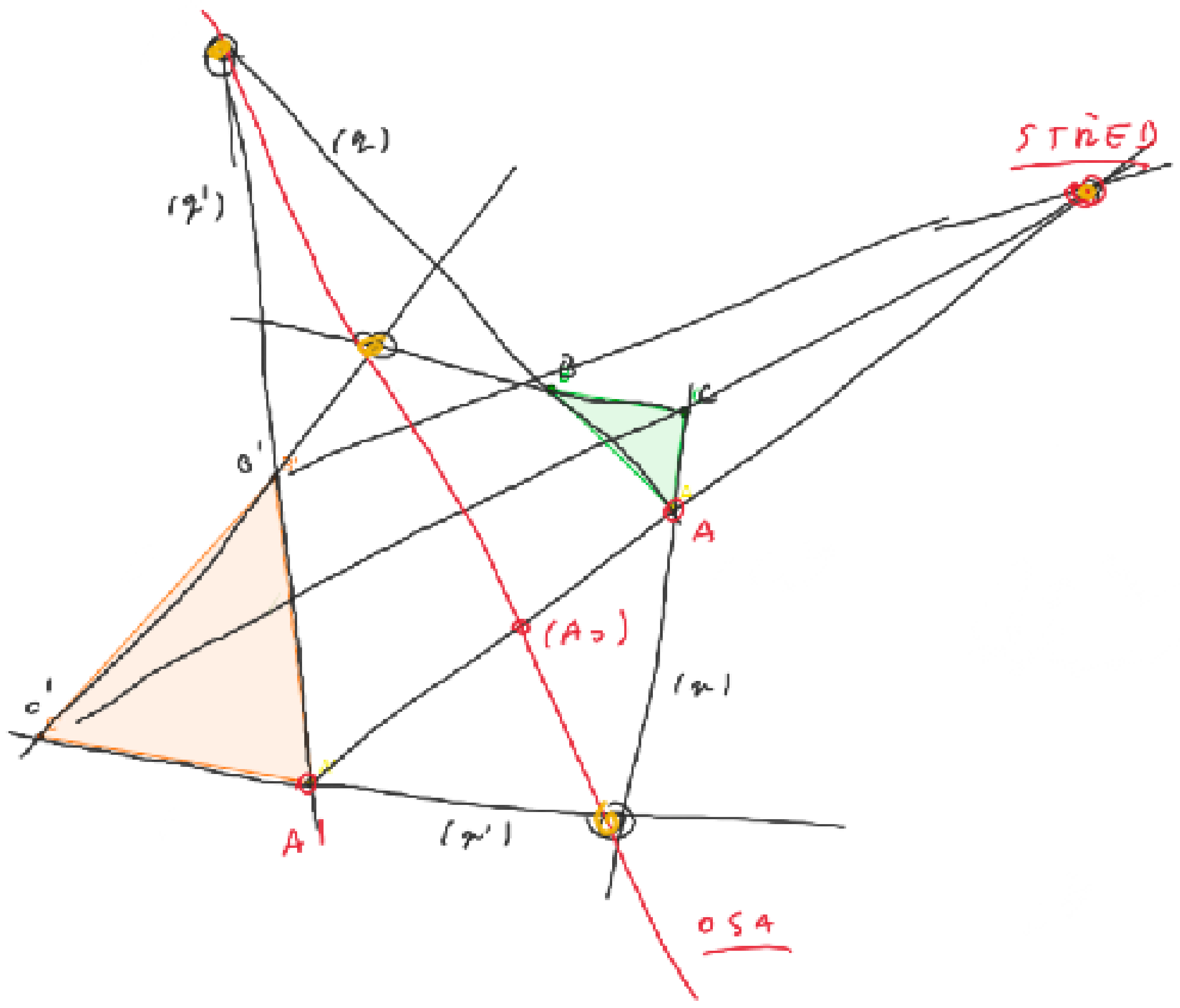
$$(S\,A\,A_0\,A') = \frac{\overrightarrow{SA_0}}{\overrightarrow{AA_0}} : \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{AA'}}$$



POZN.

- ($m =$) dvojpom. $(S\,A\,A_0\,A') = (S\,B\,B_0\,B') \iff AB \cap A'B'$ na ose [PAPPOVA VĚTA]
- střed = PEVNÝ bod
- každý bod na ose je PEVNÝ.

(A) ZÁKLADNÍ ... charakterizace



OSOVÁ KOLINEACE

$\Updownarrow$

1) AA', BB', CC' proch. bodem ... STŘED

2) $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $AC \cap A'C'$ leží na přímce ... OSA

$\rightsquigarrow$ modul = dvojpom. $(S A A_0 A')$

SPEC. PŘÍPADY

STŘED $\to \infty$ ... OS. AFINITA

OSA $\to \infty$ ... STEJNOLEHLOST

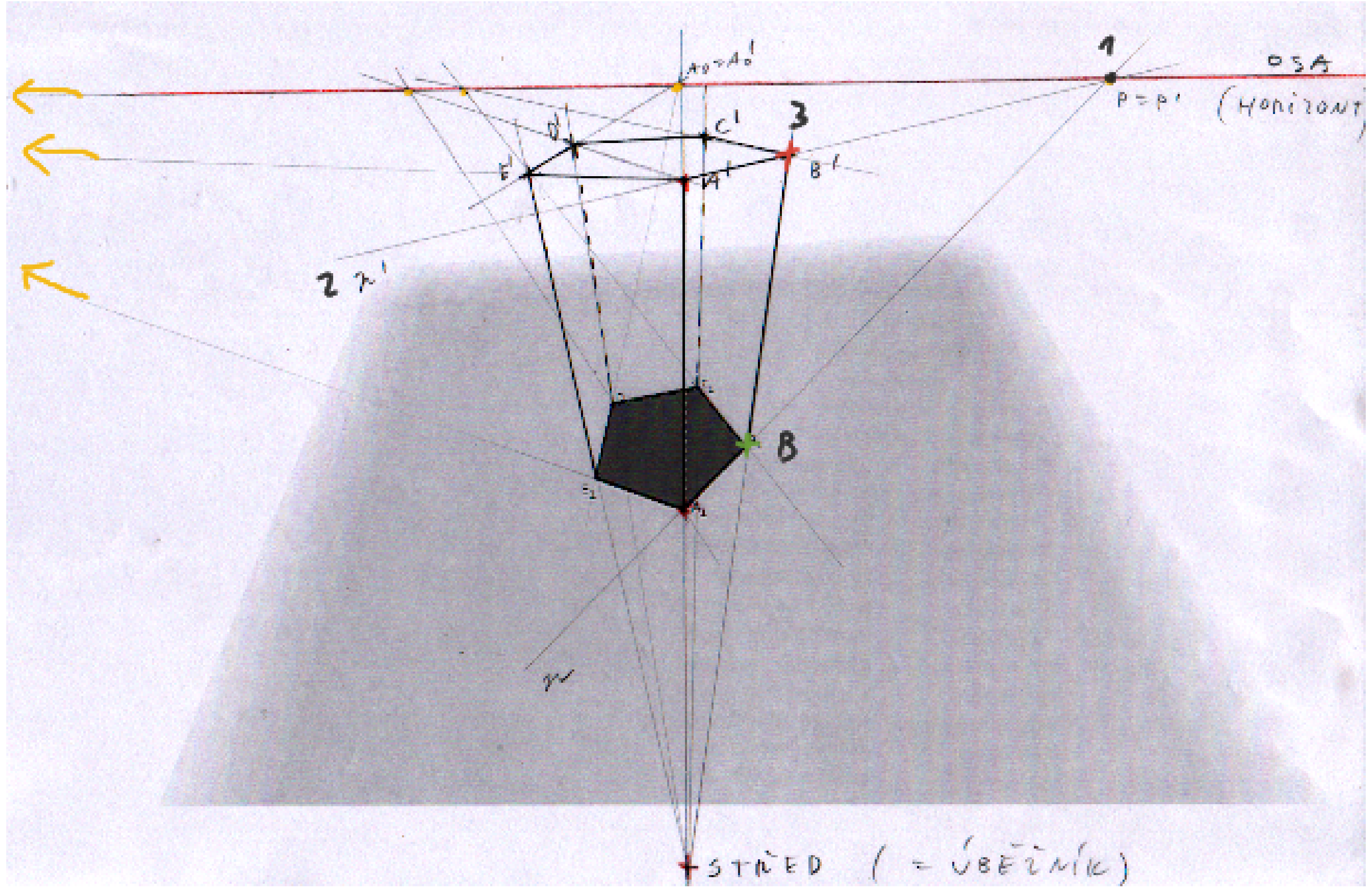
POZN.

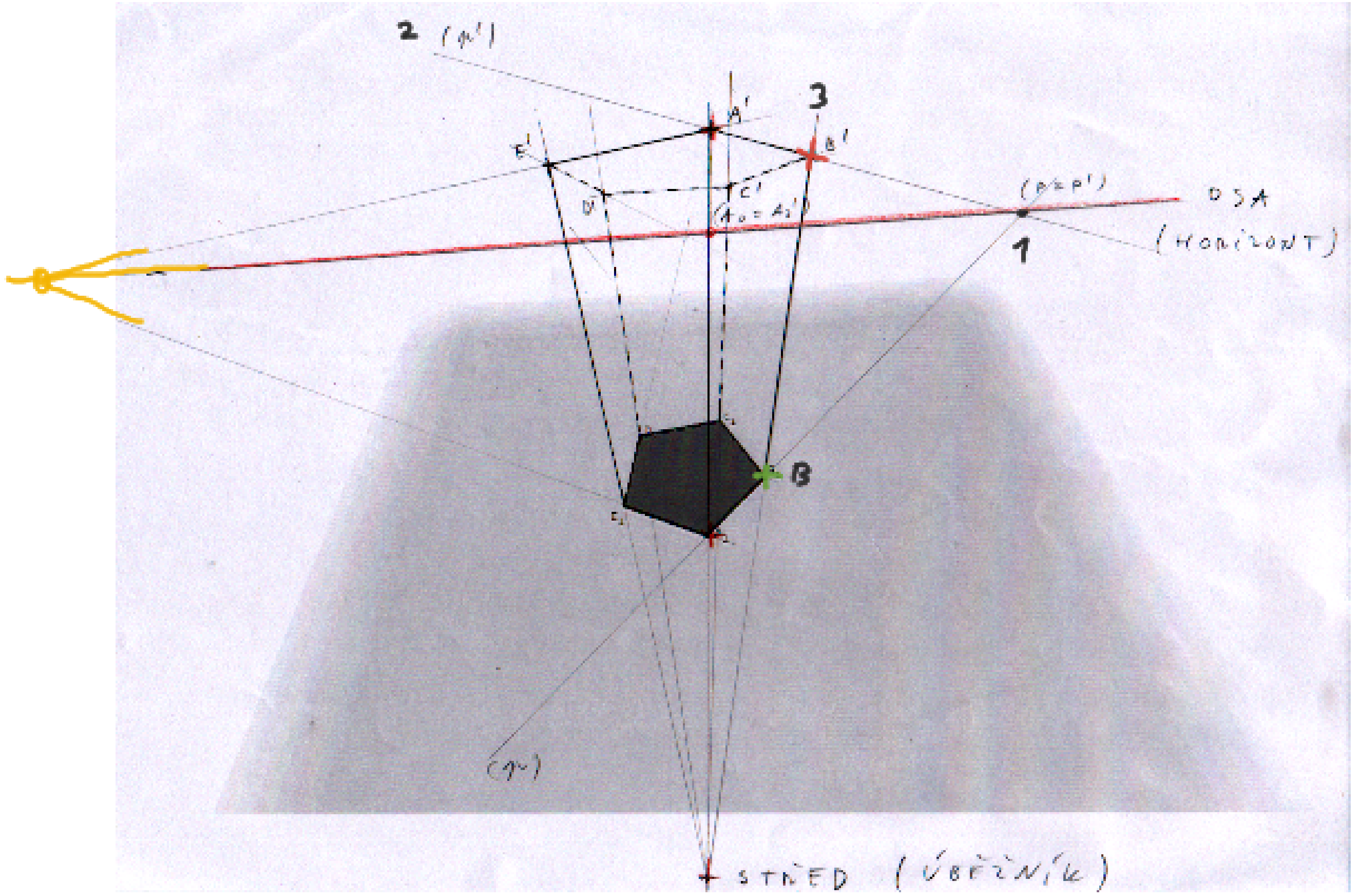
- involutivní $\iff$ $\underbrace{m = 1}_{\text{id}}$ nebo $\underbrace{m = -1}_{\text{harmonická soum.}}$

- $p = p' \iff p = $ osa nebo $p \ni$ střed

(A) ZÁKLADNÍ ... obraz ob. bodu

bod na ose





1) P = P' = AB ∩ osou

2) A'B' = A'P'

3) B' ∈ přímce sA

POZN.

- sr. Desarguesovou větou
  (ex. STŘED/SMĚR ⟺ ex. OSA)
- sr. s PRŮMĚTEM hranolu
  (.. osa = HORIZONT = ÚBĚŽNICE rovin podstav,
  střed = ÚBĚŽNÍK hran)

(B) VLASTNOSTI (invarianty)

osová kolineace ⇝ každé PROJEKTIVNÍ zobr. zachovává

- KOLINEÁRNOST  (resp. )
- DVOJPOMĚRY čtveřic kolin. bodů

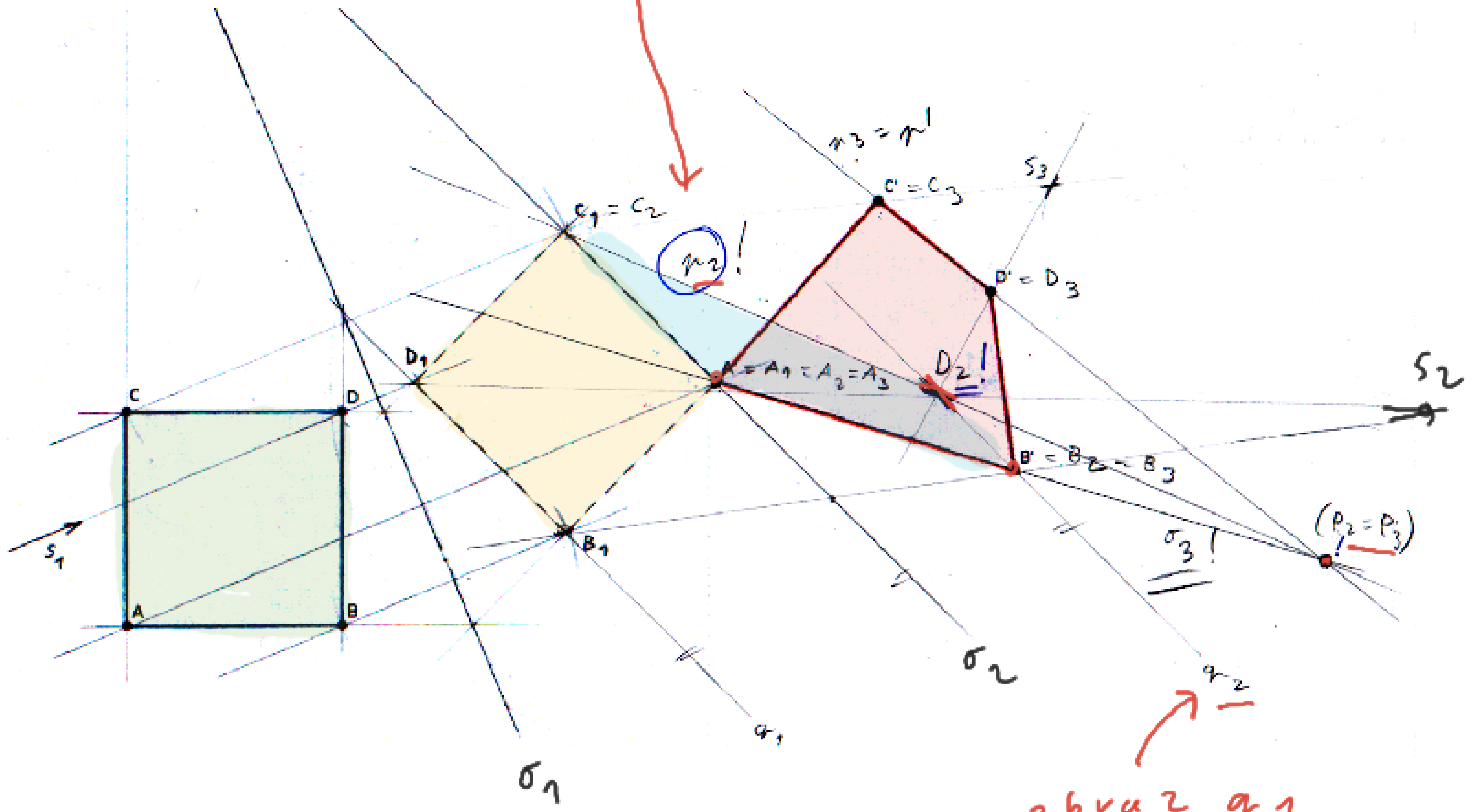
(..pokud nedegen.)

POZN.

- NEMUSÍ být injektivní
- NEMUSÍ zach. konvexitu 

(c) SKLÁDÁNÍ ... vyjádřete dané proj. zobr. jako složení ZÁKLADNÍCH (= os. kolineací)

vzor $p_3 = p'$ vzhledem k σ_3 ... !



obraz q_1 vzhledem k σ_2 ...

KONSTR.

1) σ_1 lib.
volíme σ_1 = osa AA'
⇝ $A_1B_1C_1D_1$ = os. soum. $ABCD$
⇝ $A_1 = A'$

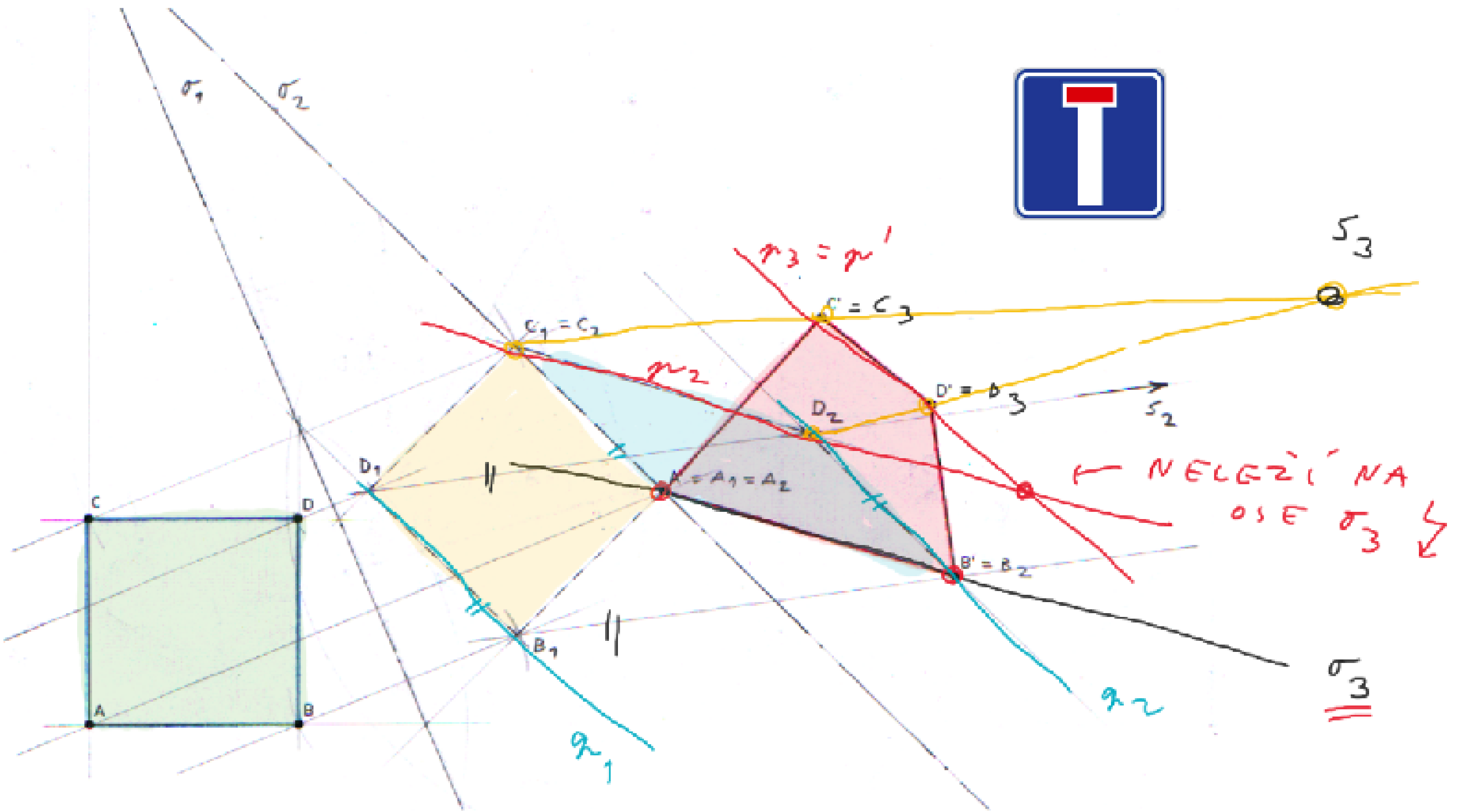
2) $\sigma_2 \ni A'$!
volíme $\sigma_2 = A'C_1$, $B_1 \mapsto B'$
& $D_1 \mapsto D_2$,
kde $\boxed{D_2 = p_2 \cap q_2}$ ↯
⇝ $A_2B_2C_2D_2$ = obraz $A_1B_1C_1D_1$
⇝ STŘED $S_2 = B_1B_2 \cap D_1D_2$

3) $\sigma_3 = A'B'$, $C_2 \mapsto C'$, $D_2 \mapsto D'$!
⇝ $A_3B_3C_3D_3 = A'B'C'D'$
⇝ STŘED $S_3 = C_2C' \cap D_2D'$

HOTOVO ... stačí MAX. 3

(c) SKLÁDÁNÍ ... POZOR !

pokud bychom v kroku 2) NEPŘEDVÍDALI, ...

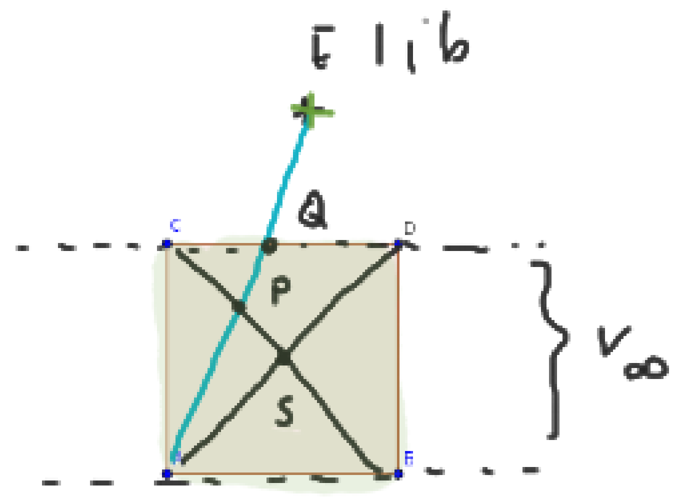


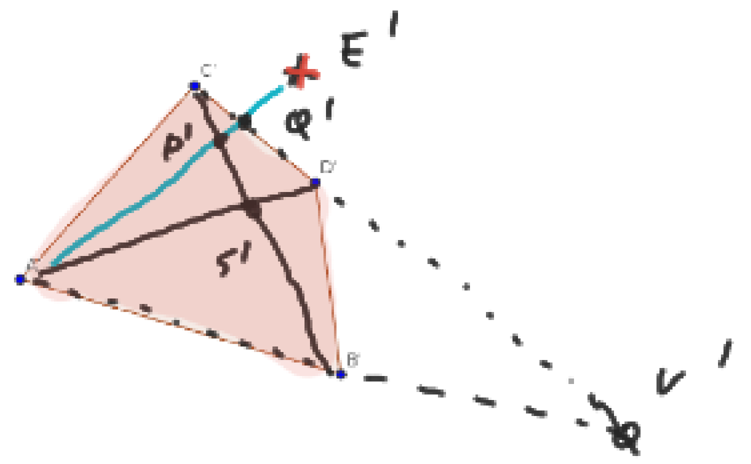
zde (CHYBNĚ)

2) osová AFINITA
$\sigma_2 = A'C_1$ & $B_1 \mapsto B'$

... tak máme PROBLÉM !

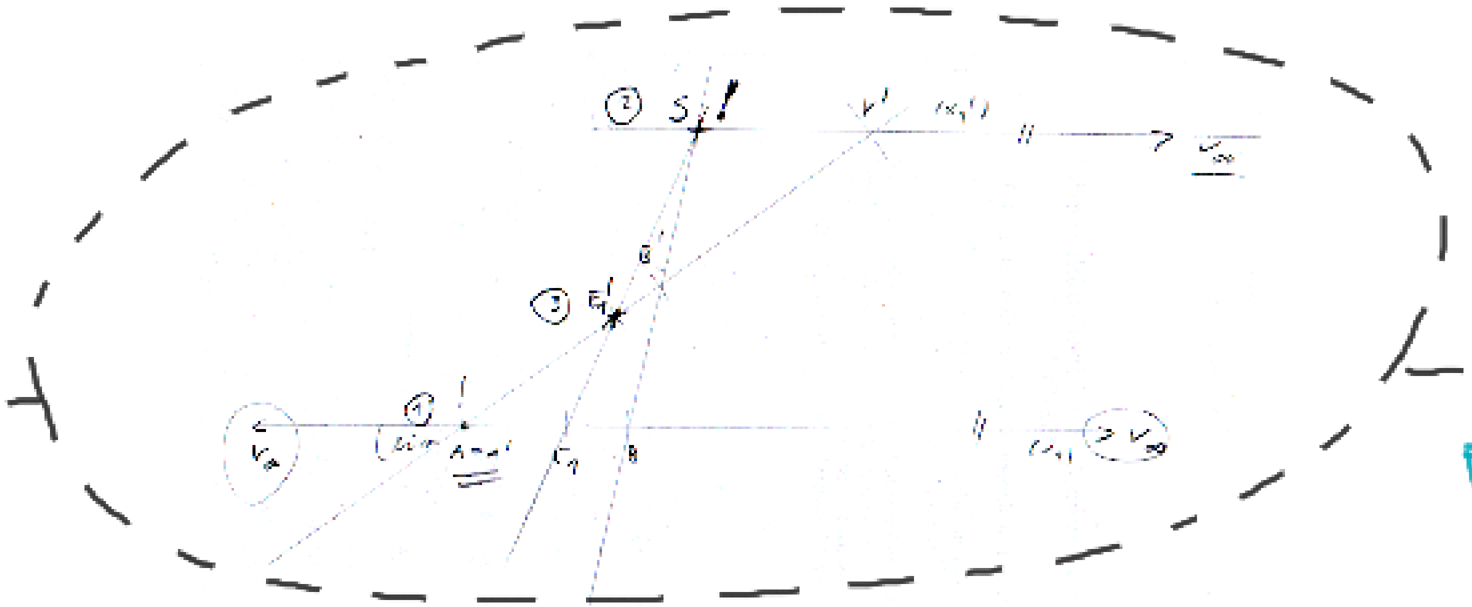
(D) OBECNĚ ... obraz ob. bodu pomocí VLASTNOSTÍ

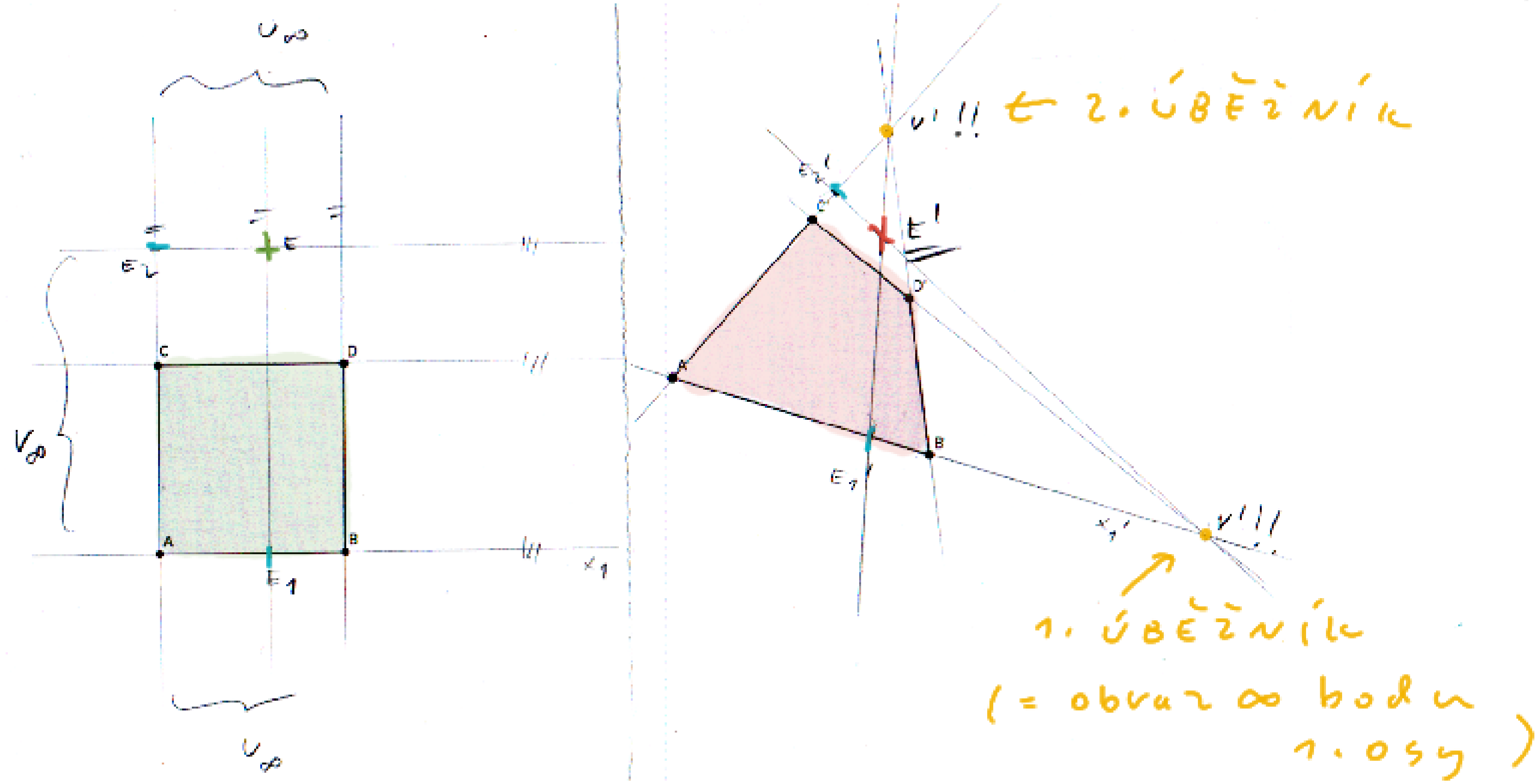




NÁPADY

a) přenášení DVOJPOMĚRŮ
[2x např. pomocí P a Q]



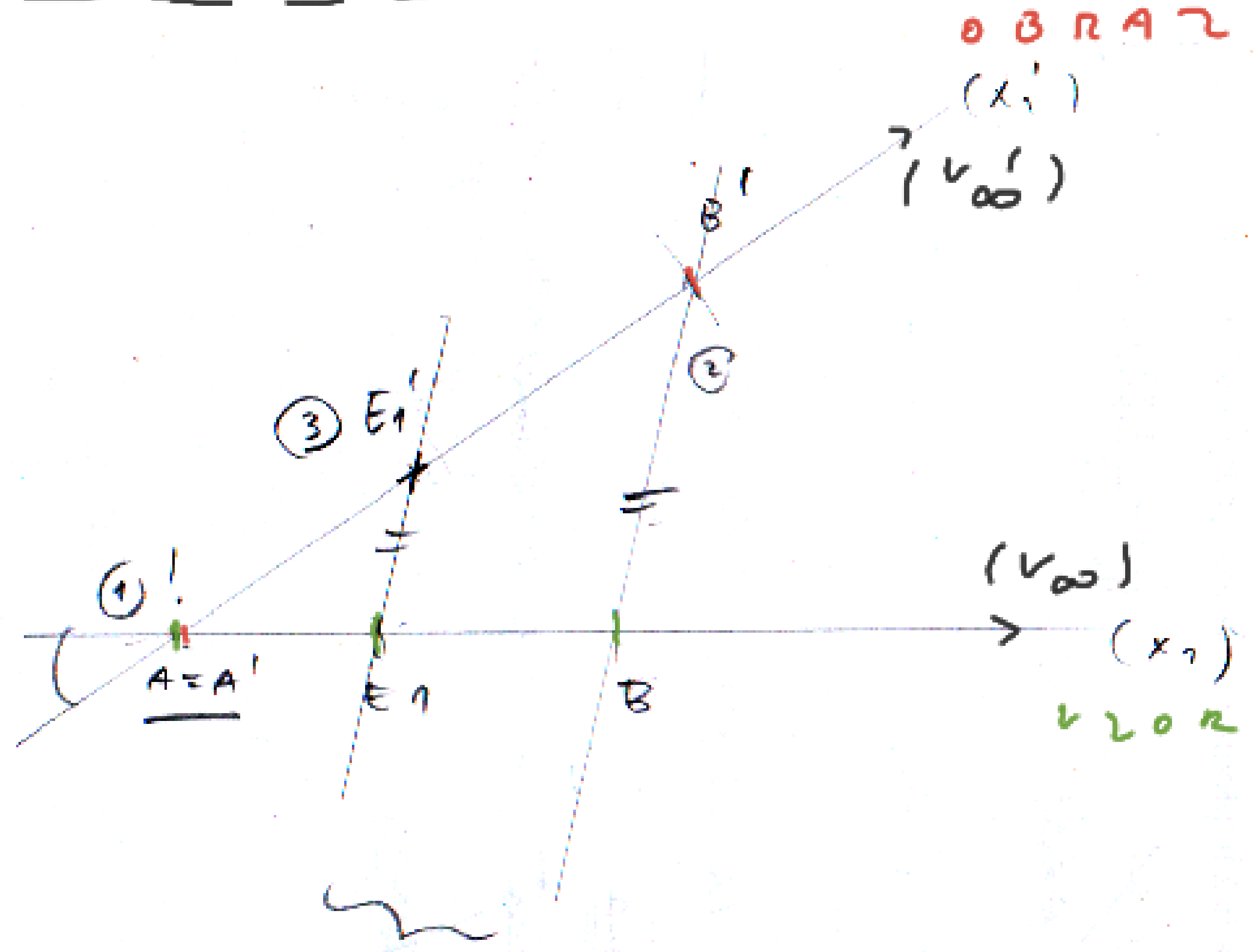


b) přenášení "SOUŘADNIC"

- E_1, E_2 = souř. bodu E
  [pomocí ∥]
- E_1', E_2' = obrazy E_1, E_2
  [DVOJPOMĚRY 2x]
- E' = složení obrazu
  [pomocí ÚBĚŽNÍKŮ]

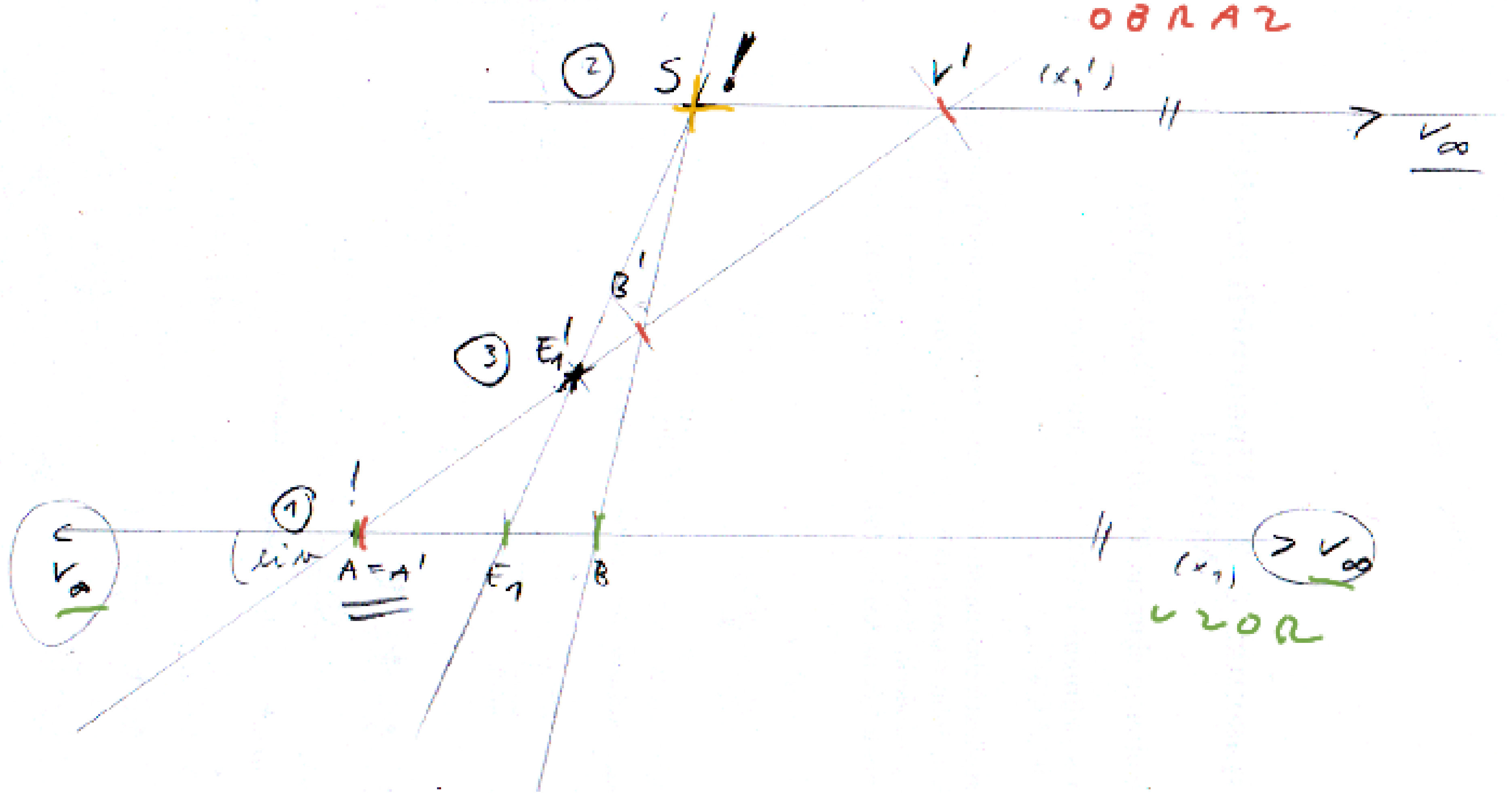
DETAIL K PŘENÁŠENÍ ...

POMĚRŮ



Střed ∞

DVOJPOMĚRŮ



KONSTR.

1) lícujeme jedním bodem [např. A=A', ∢ lib.]
2) konstrukce STŘEDU [$S = BB' \cap VV'$]
3) OBRAZ bodu [$E_1' = SE_1 \cap x_1'$]

DŮKAZ

PODOBNÉ △

PAPPOVA VĚTA !

XI. STEREO – ÚLOHY

OPAKOVÁNÍ

(A) PODSTAVA
- VOLNĚ (pár bodů m) dvojpoměry)
- ZÁKL. TRANSF. (os. kolineace)

(B) HRANOL
- DRUHÁ PODSTAVA (os. kolineace)

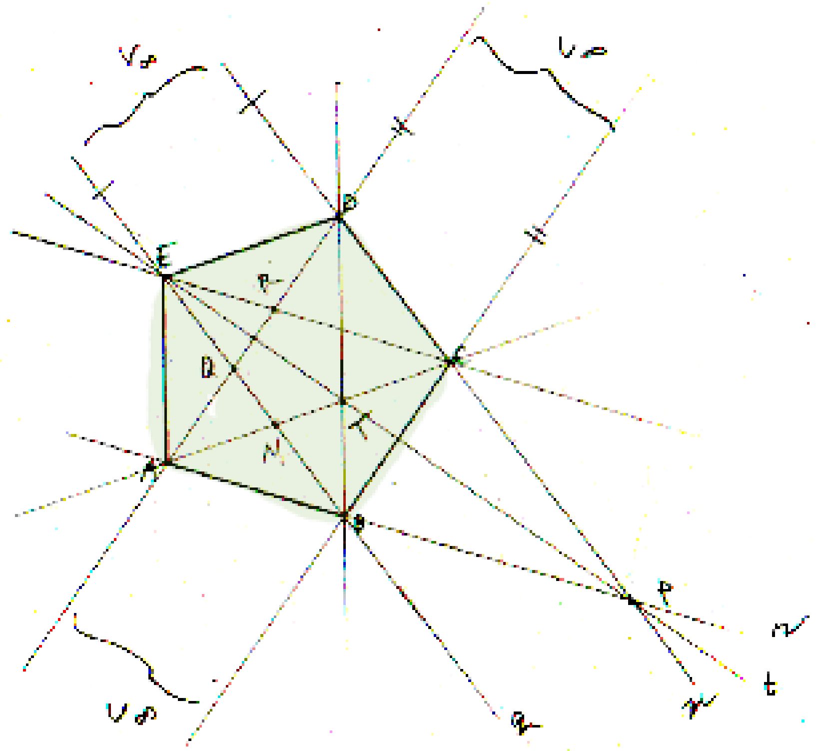
(C) ŘEZ
- ZÁKL. KORESP. (os. kolineace)

(D) MĚŘENÍ
- DÍLČÍ PŘENÁŠENÍ + SKLÁDÁNÍ (dvojpoměry)
- OTOČENÍ ROVINY (os. afinita)

NOVĚ

(A) PRAVID. 5-ÚHELNÍK — volně (viz cvičení IX a X)

originál

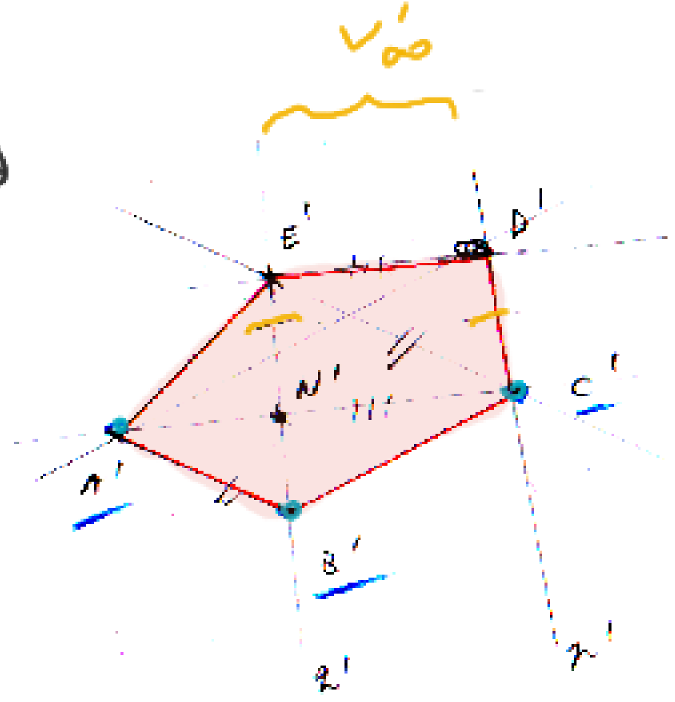


afinní obraz

0) dáno A', B', C'

1) N'... zlatý poměr

2) rovnoběžky ⇝ D', E'



projektivní obraz

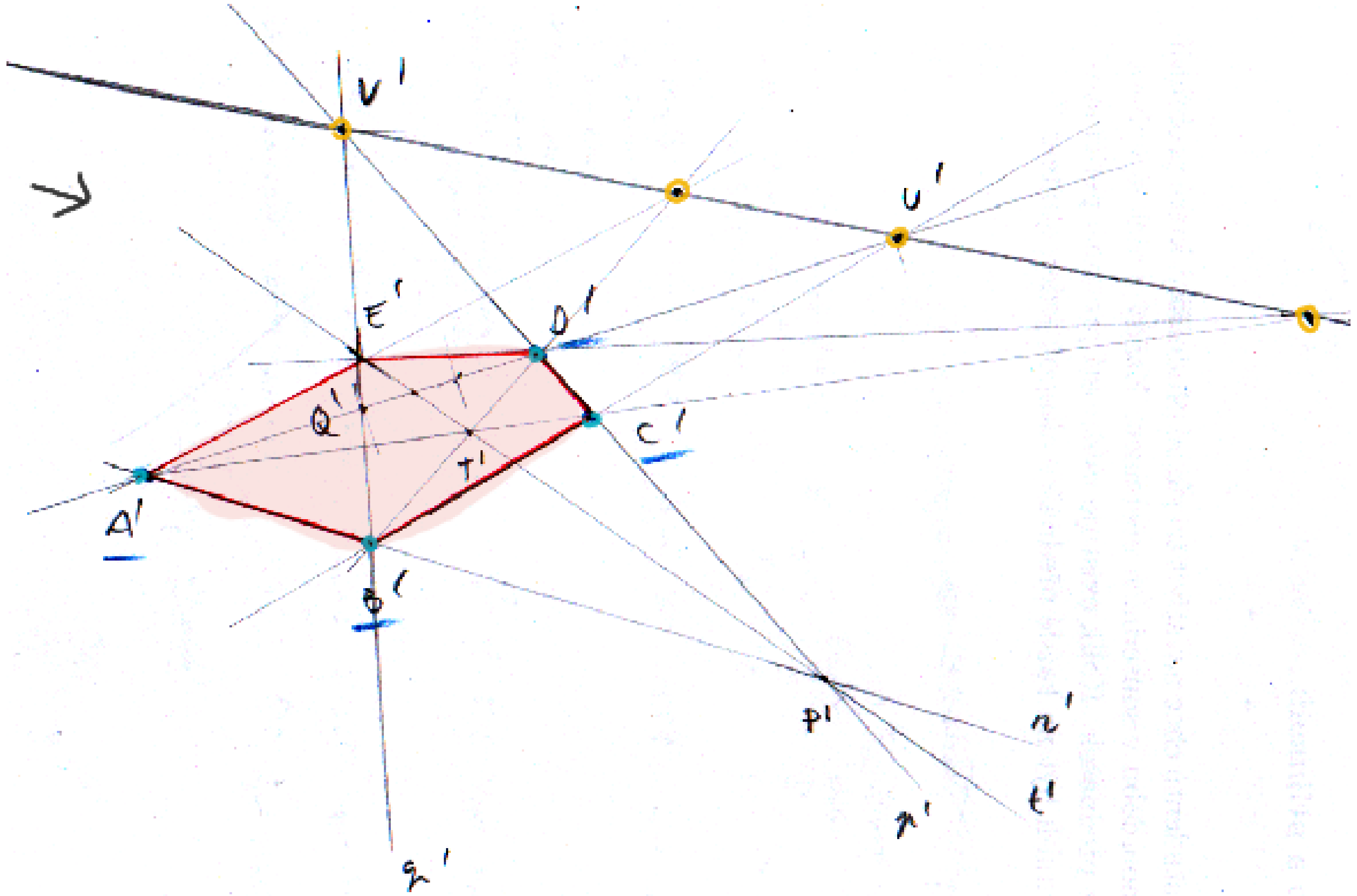
0) dáno A', B', C', D'

1) U'.. úběžník

2) Q'...zlatý dvojpoměr

3) přímka P'T'
(resp. další úběžníky)

⇝ E'

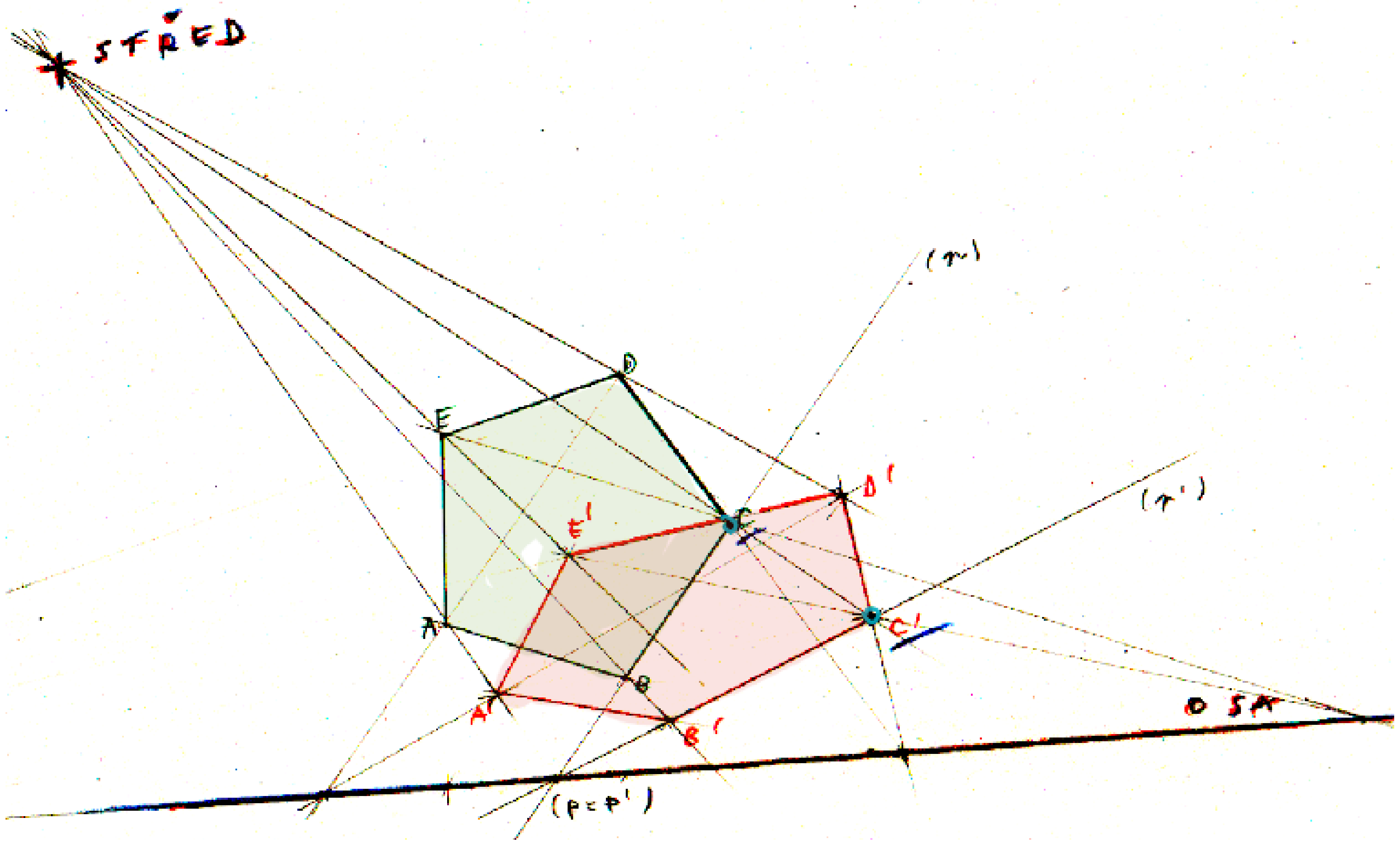


úběžnice!

...zde pomocné (můžeme brát jako součást zadání ...viz dále)

(A) PRAVID. 5-ÚHELNÍK — zákl. transformace

(viz cvičení IX a X)



0) dáno OSA, STŘED, C'

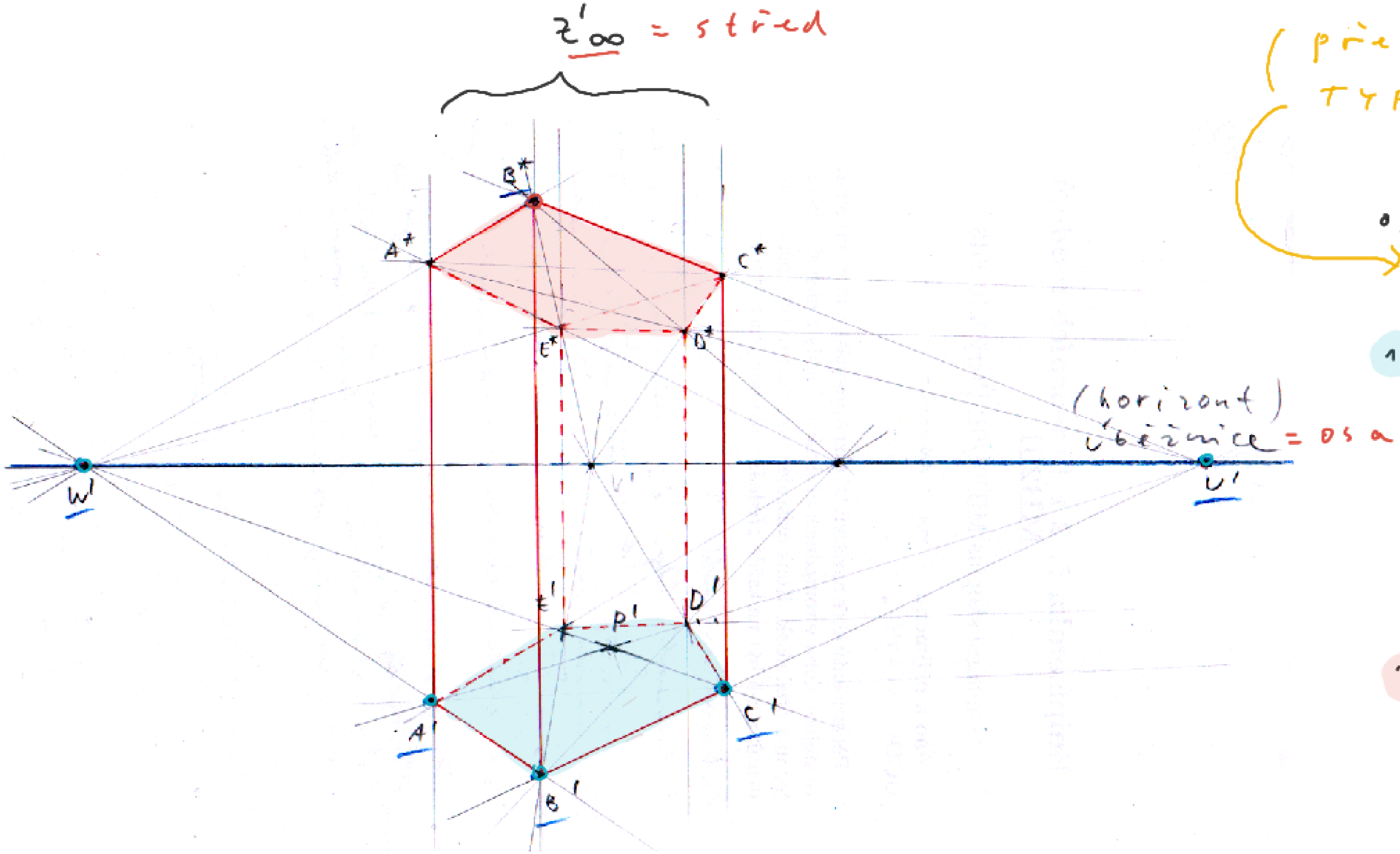
1) std. KONSTRUKCE (osová kolineace)

⤳ postupně B', A', E', D'

(žádné přenášení POMĚRŮ / DVOJPOMĚRŮ)

(B) PRAVID 5-BOKÝ HRANOL

(viz cvičení $\overline{X}$)



(předem kontrolujeme TYP průmětu ...!)

0) dáno A', B', C', B^* + úběžníky U', W', Z'

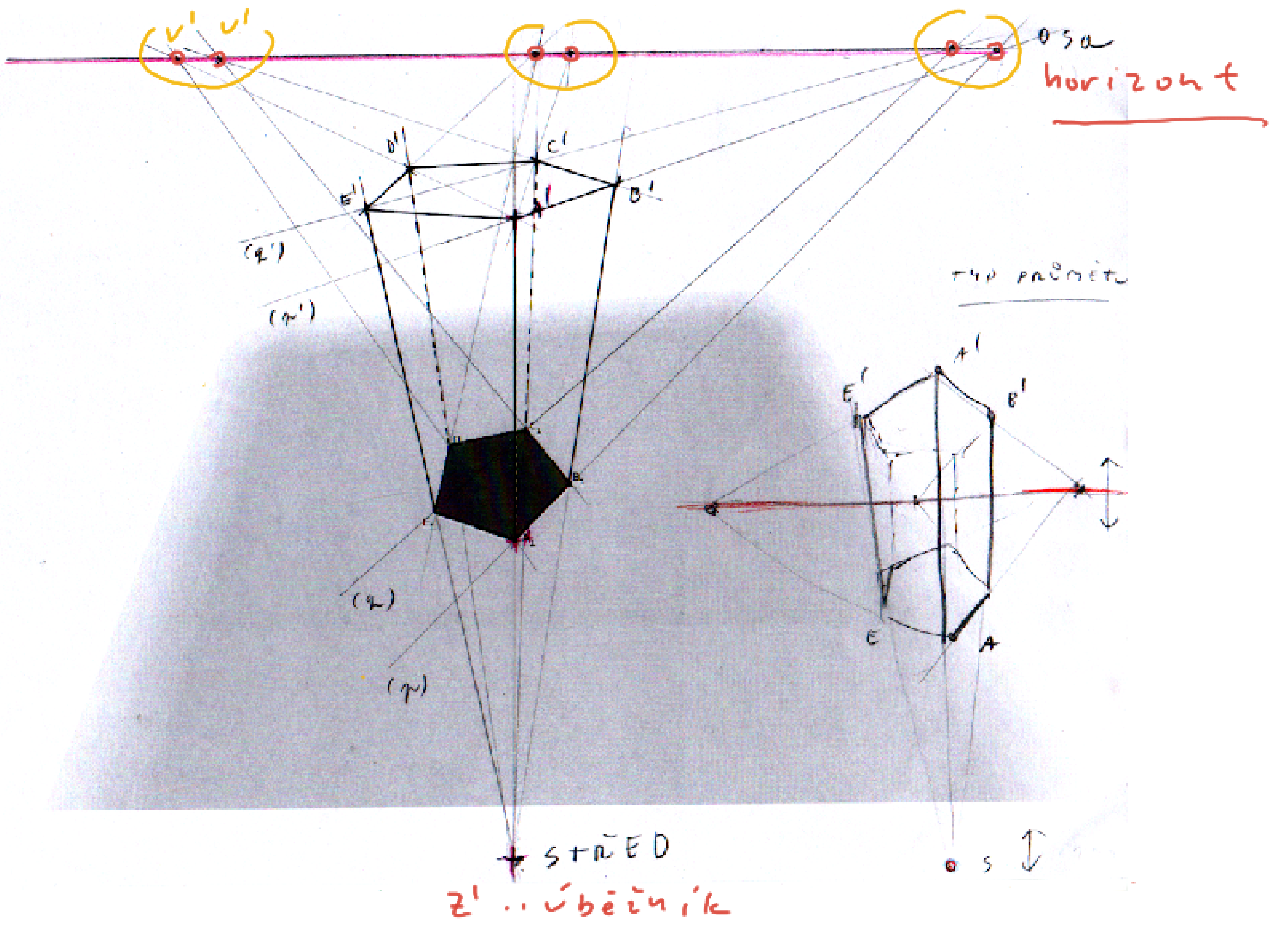
1) dolní PODSTAVA
- $P' = A'U' \cap C'W'$
- D' (resp. E') ... zlatý DVOJPOMĚR $\rightsquigarrow E'$ (resp. D')

2) horní PODSTAVA
... osová kolineace $\rightsquigarrow A^*, C^*, D^*, A^*$

3) viditelnost

(B) PRAVID. 5-BOKÝ HRANOL ? — NENÍ !

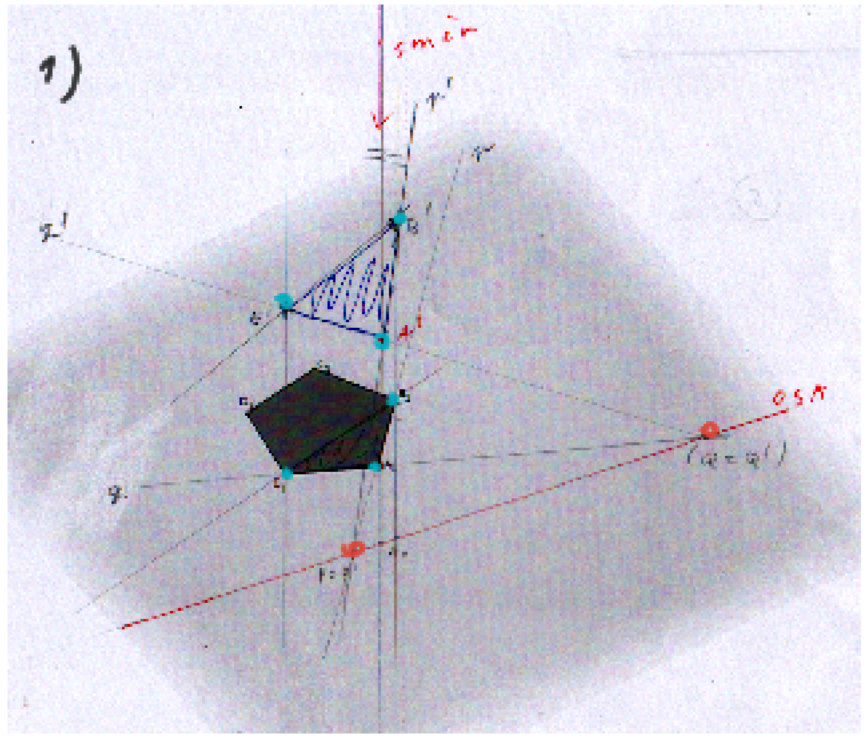
... jenom 5-boký hranol :

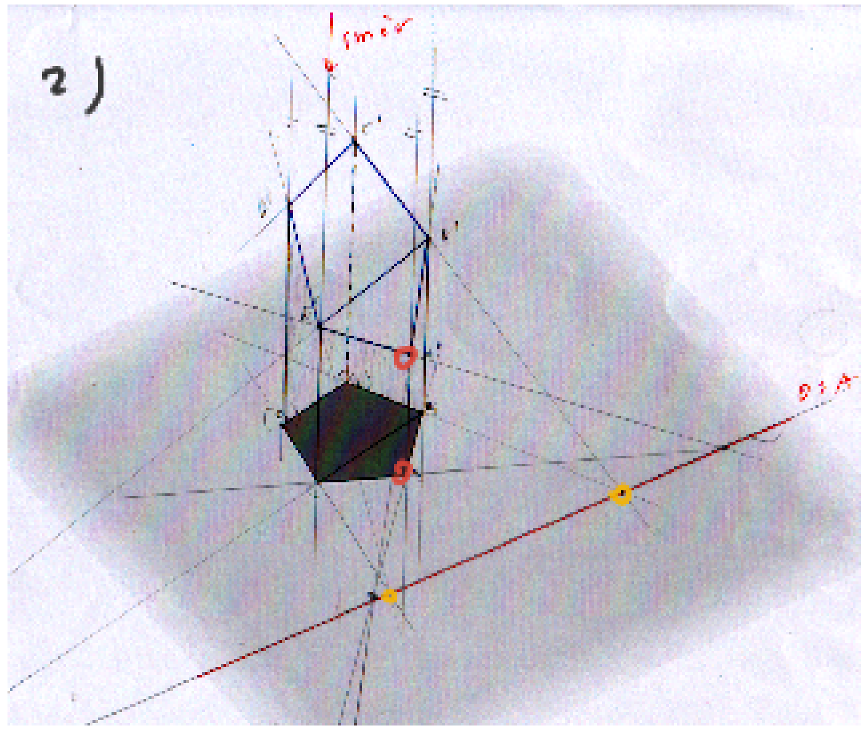


původně např.
BC || AD

B'C' ∩ A'D' = úběžník,
tj. JEDEN bod
na horizontu !

(C) ŘEZ HRANOLU / JEHLANU (viz cvičení $\boxed{IX}$)





0) dán hranol + rovina

... body K, L, M

1) sestr. OSU (stopu)

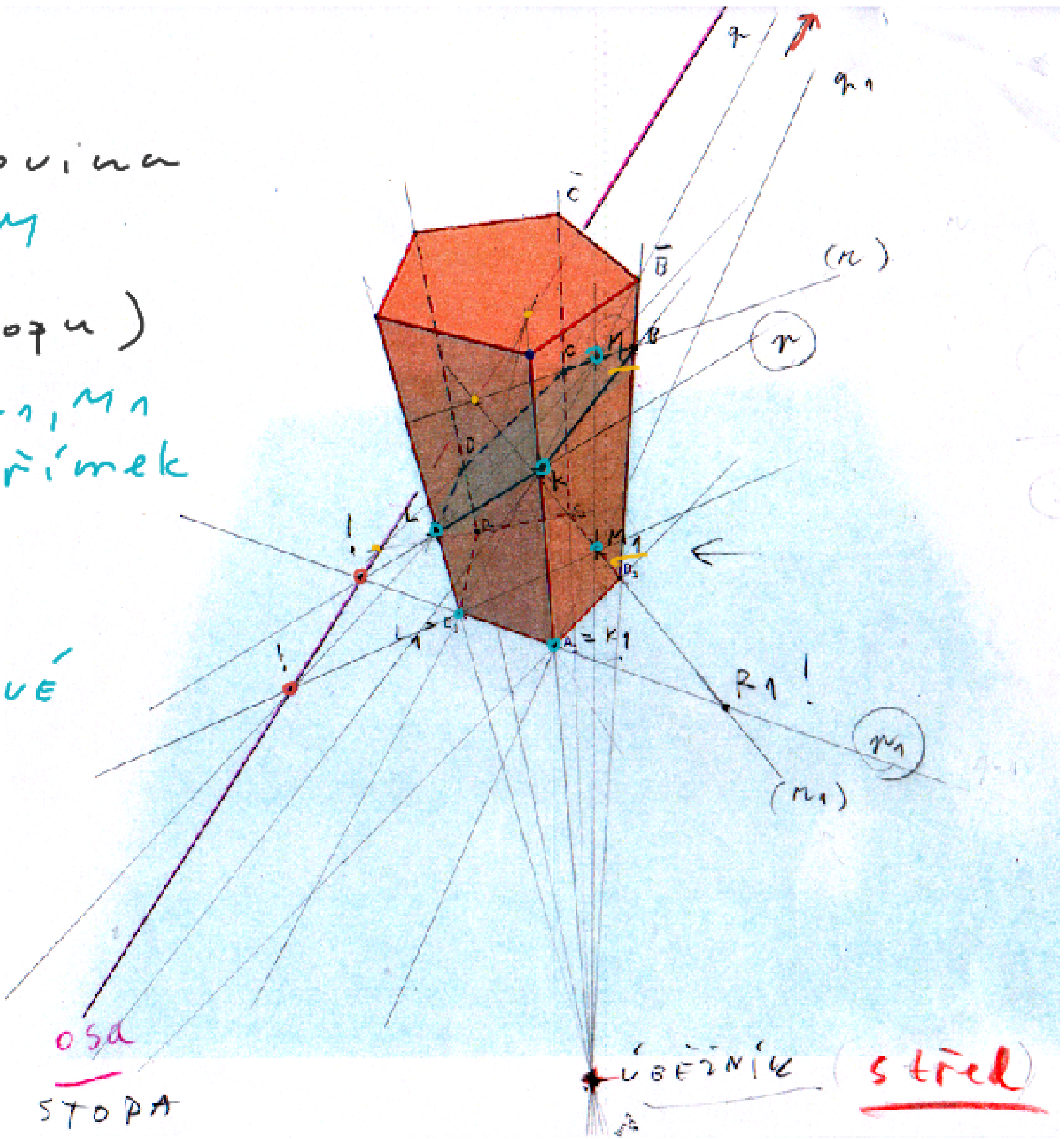
... pomocí K_1, L_1, M_1

a průs. odp. přímek

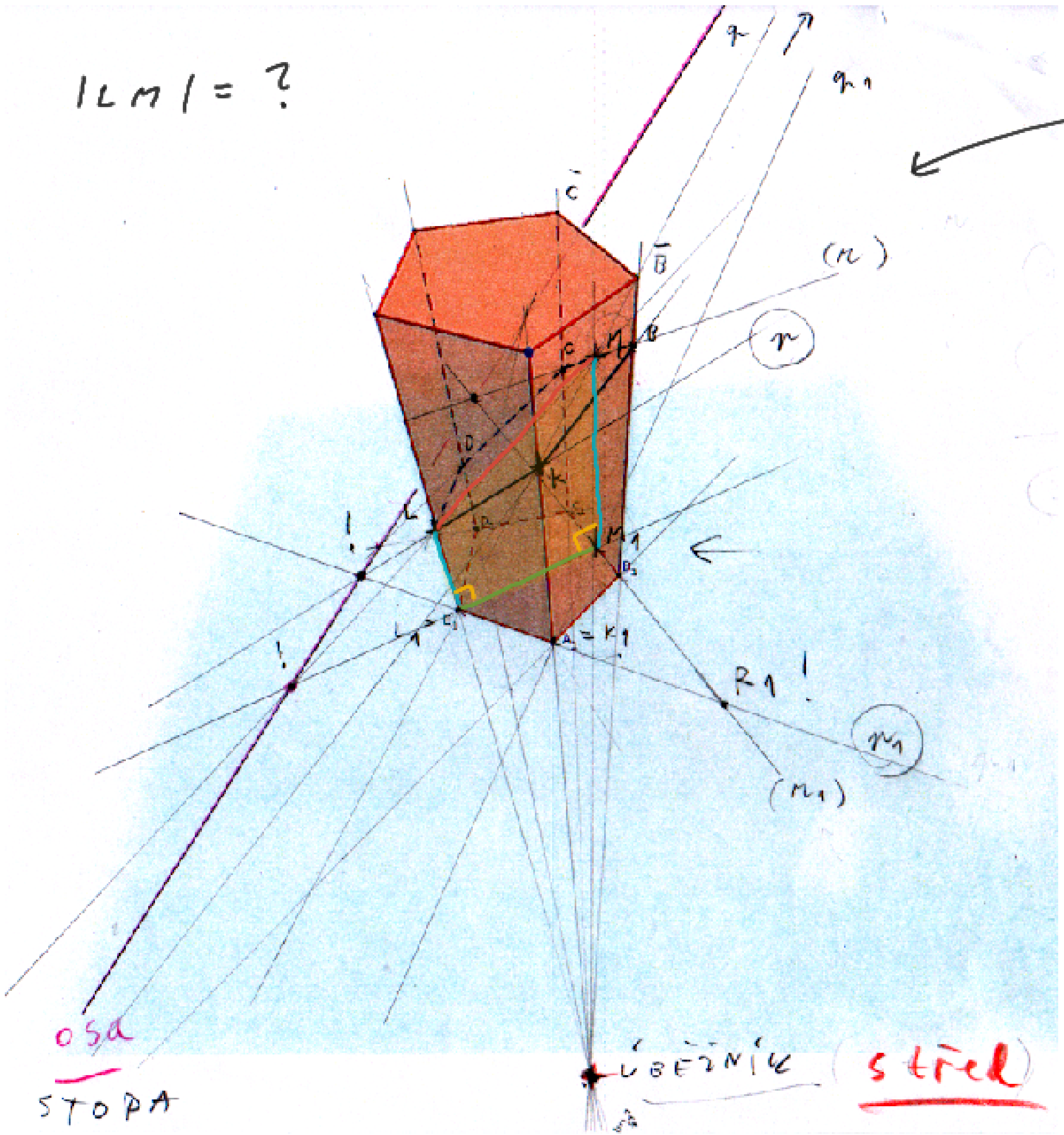
2) sestr. ŘEZ

... pomocí osové KOLINEACE

($K_1 \mapsto K$, $L_1 \mapsto L$, $M_1 \mapsto M$ ...)



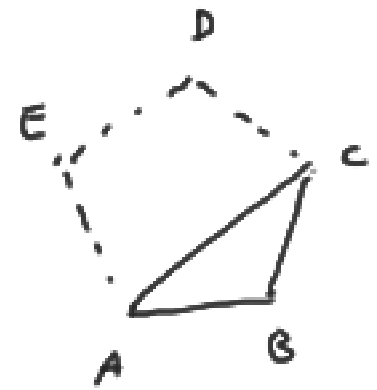
(D) MĚŘENÍ ÚSEČKY ← ZÁKL. ÚLOHA !



UPŘESNĚNÍ — skutečné velikosti:

(a) výška

(b) podstava



KONSTR.

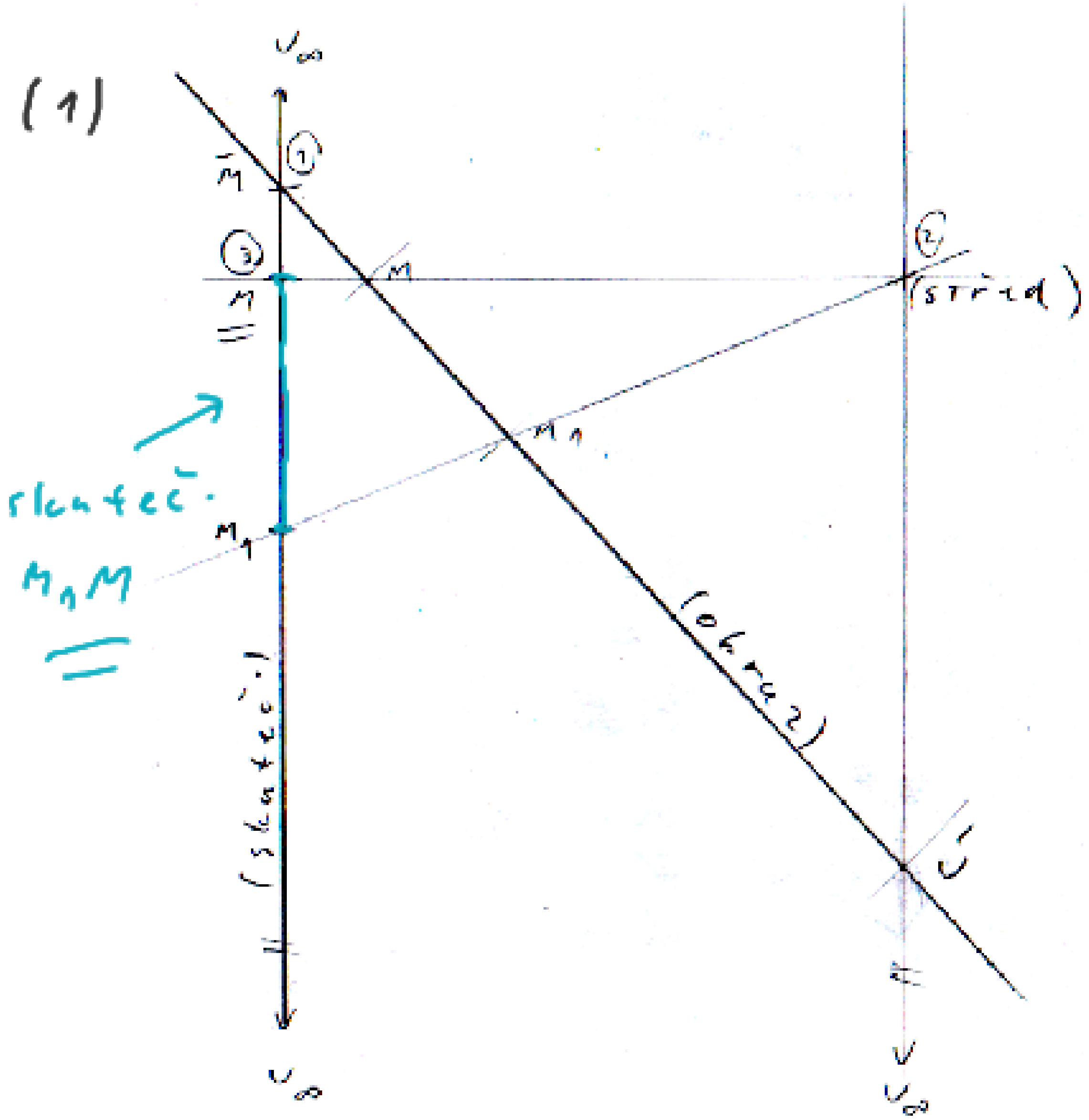
(1) vzhledem k (a)
⇝ skuteč. velikosti L_1L, M_1M
... pomocí DVOJPOMĚRU

(2) vzhledem k (b)
⇝ skuteč. velikost L_1M_1
... pomocí DVOJPOMĚRU

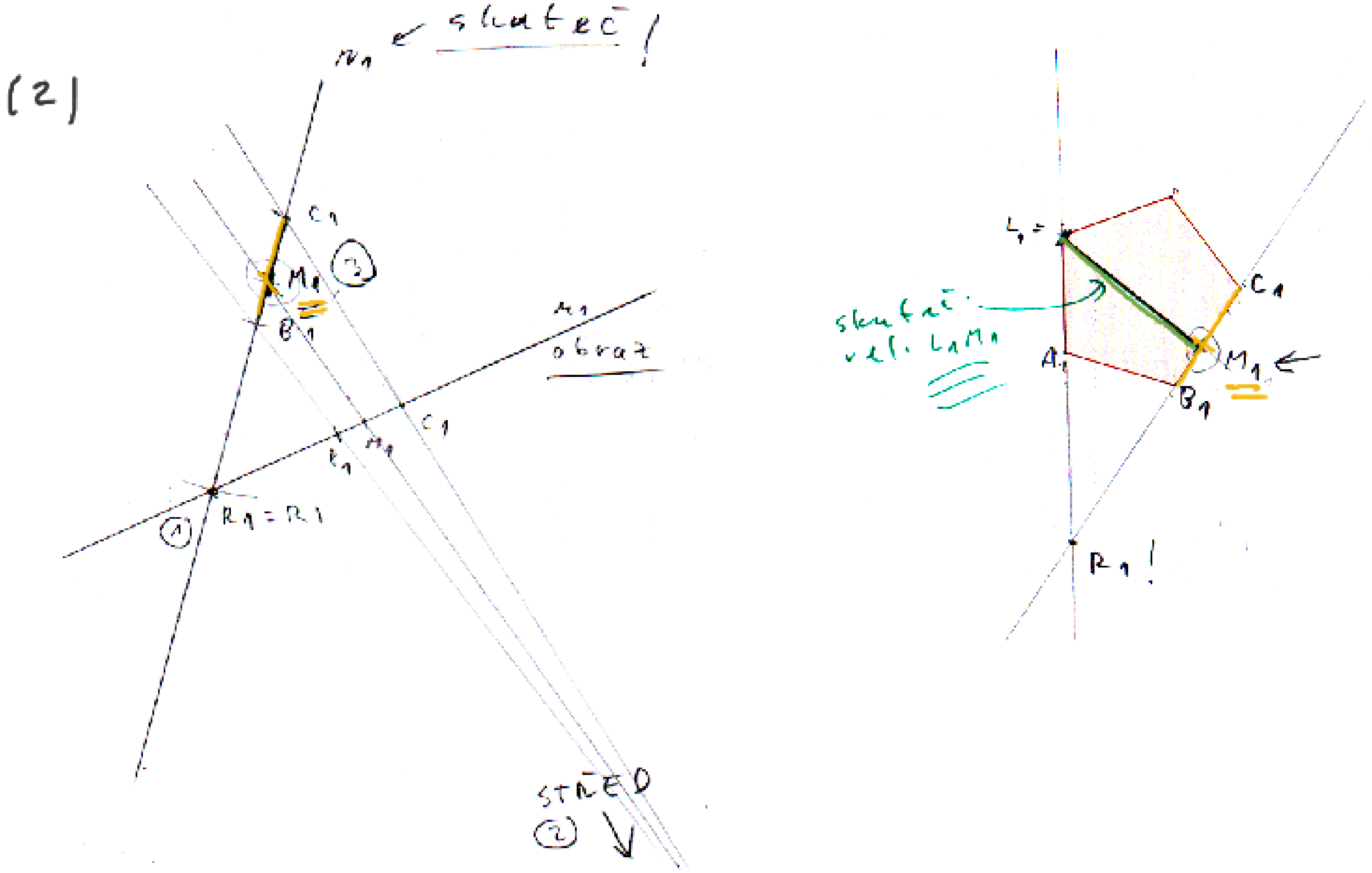
(3) složení skuteč. vel. LM
... pomocí ⊥ LICHOBĚŽNÍKU

(D) MĚŘENÍ |LM| – detaily

(1)



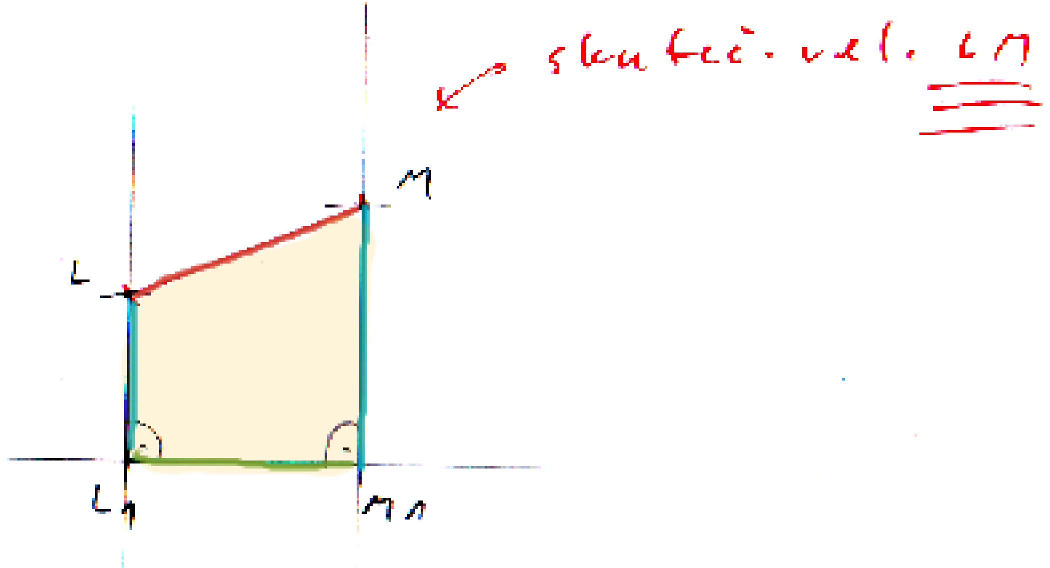
(2)



skuteč. L_1L ~>]

... obdobně

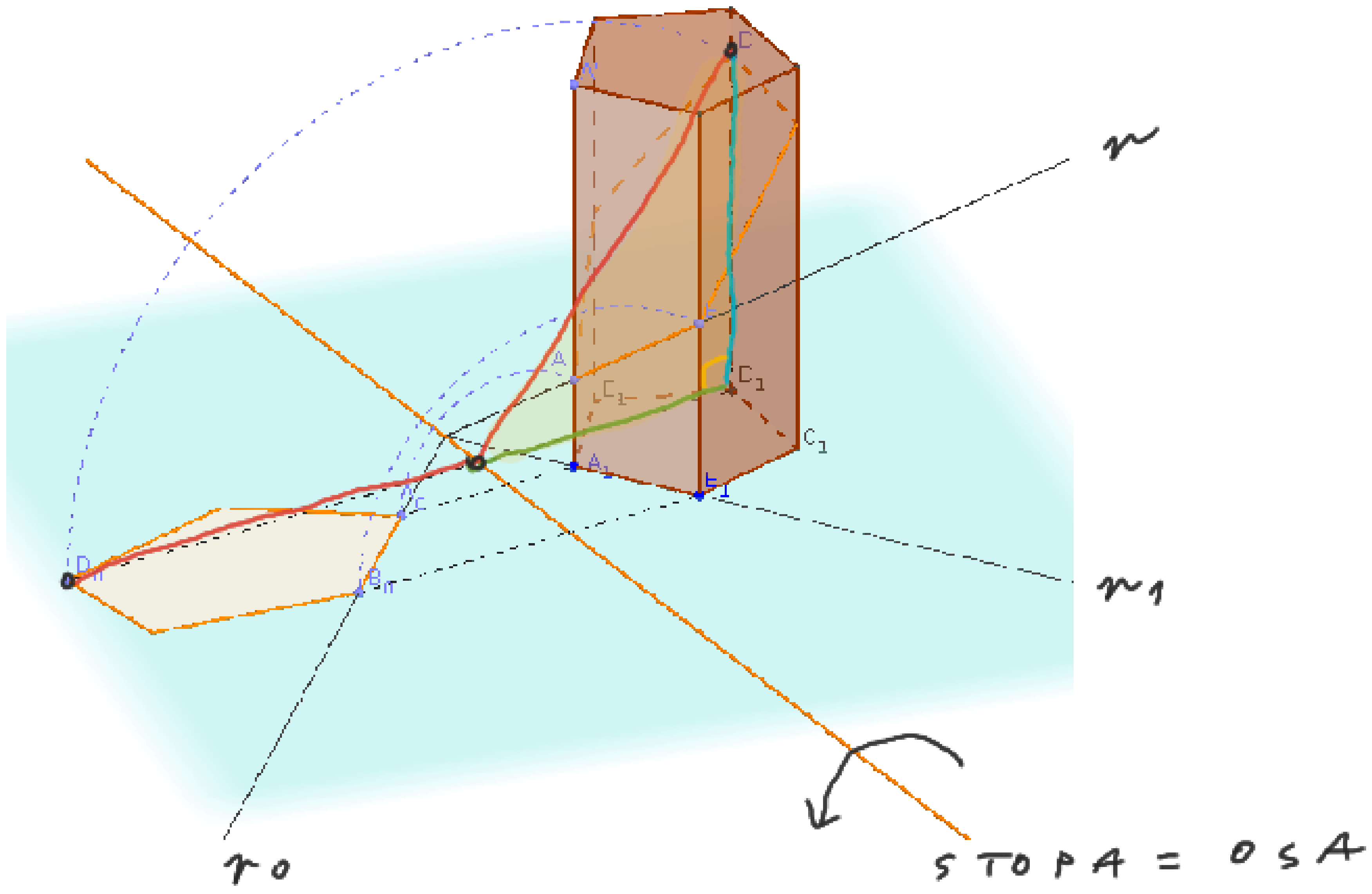
(3)



(D) MĚŘENÍ CELÉHO ŘEZU

NÁPAD 1 ... opakování předchozí konstr. (cca 7x)

NÁPAD 2 ... OTOČENÍ CELÉ ROVINY !! (měření $\underline{\underline{1x}}$)



(1) vzdálenost JEDNOHO bodu od stopy

... zákl. konstrukce ✓

(2) otočení CELÉ roviny do roviny podstavy

... OSOVÁ AFINITA :

$A_1 \mapsto A_0$, $B_1 \mapsto B_0$, ... ✓

v PŮDORYSE vidíme ve skuteč. velikosti ✓

(D) OTÁČENÍ ROVINY — detaily

(0) dán hranol a $\triangle ABD$

(1) osa = stopa ... body P, Q, R

(2) $O = O_1$ = pata kolmice z D ... v půdoryse!

(3) skuteč. velikost OD ⇝ otočený bod D_0 !

(4) osová afinita ⇝ $A_0, B_0, \ldots$