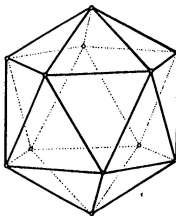
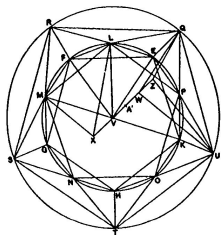


Konstrukční geometrie



Poslední aktualizace: 5. května 2022, Vojtěch Žádník

<https://is.muni.cz/el/1441/jaro2022/MA0007/>

Cíle

- ▶ připomenout, zorganizovat a rozšířit stávající poznatky
- ▶ něco udělat a také vysvětlit

Proces

- ▶ zapamatovat a zopakovat
- ▶ pochopit a použít
- ▶ rozlišovat a vysvětlovat
- ▶ přetvářet a vytvářet

Kulisy

- ▶ geometrie

Přehled celkový

- ▶ jaro 2022: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- ▶ podzim 2022 a jaro 2023: počítačí geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

Přehled aktuální

- ▶ klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- ▶ geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- ▶ poznámky k zobrazování prostoru do roviny

Materiály

- ▶ IS: osnova, přednáška, odkazy, staré písemky¹

Zakončení

- ▶ úlohy → písemka → ústní zkouška

Soutěž

- ▶ o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

¹<https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2022/MA0007/index.qwarp>

Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

- = základy eukleidovské geometrie
- = geometrie Eukleidových Základů,² ovšem s Hilbertovými upřesněními.³

Základní pojmy:

- ▶ *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- ▶ *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- ▶ *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, ...*

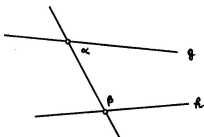
Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

- ▶ *několik ke každému ze základních vztahů...*

²kolem -300, http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady

³kolem +1900, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

- (I) Každé dva různé body spojuje přímka.
- (II) Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (III) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (IV) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (V) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.



$\alpha + \beta < 2R$ g a h se protínají

Konstrukce založené na postulátech (I)–(III) jsou tzv. *eukleidovské konstrukce*. Postulát (V) je přezdíván *pátým Eukleidovým postulátem*.⁴

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

- ▶ *Veličiny témuž rovné i navzájem rovný jsou.*
- ▶ *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovný.*
- ▶ apod.

Dnes čteme jako:

- ▶ $k = l$ a $m = l$ $k = m$.
- ▶ $k = l$ a $m = n$ $k + m = l + n$.
- ▶ apod.⁵

⁵<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html>

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány. . .

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- ▶ *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je* *zbylými dvěma.*

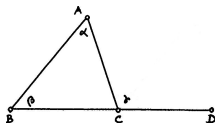
Axiomy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- ▶ *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému* *) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

. . . jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky!⁶

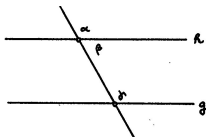
⁶viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 27).

- ▶ Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- ▶ Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.⁷



$$\gamma \square \alpha \text{ a } \gamma \square \beta$$

- ▶ Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek⁸ (odtud rovnoběžky).

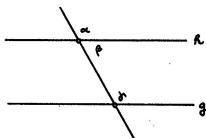


$$\alpha = \gamma \square h \parallel g$$

⁷Zde jsou poprvé potřeba axiomy uspořádání (viz s. 11).

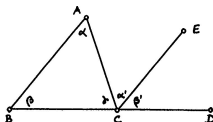
⁸Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 12).

- Věta o střídavých úhlech⁹ (odtud rovnoběžky).



$$h \parallel g \quad \boxed{} \quad \alpha = \gamma$$

- Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.¹⁰



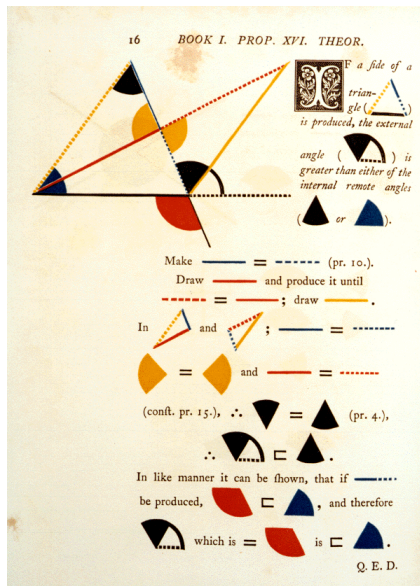
$$\alpha + \beta + \gamma = \boxed{}$$

- Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsahích.¹¹
- Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

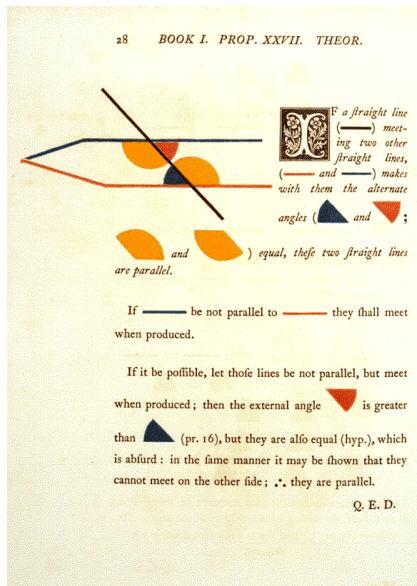
⁹Nepřímá: $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$; odtud podle (V) plyne, že se přímky h, g protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 13).

¹⁰Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 14).

¹¹Podrobněji od s. 16...




¹²<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html>











¹³<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html>

30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.




 STRAIGHT line
 (—) falling on
 two parallel straight
 lines (— and
 —), makes the alternate
 angles equal to one another; and
 also the external equal to the in-
 ternal and opposite angle on the
 same side; and the two internal
 angles on the same side together
 equal to two right angles.

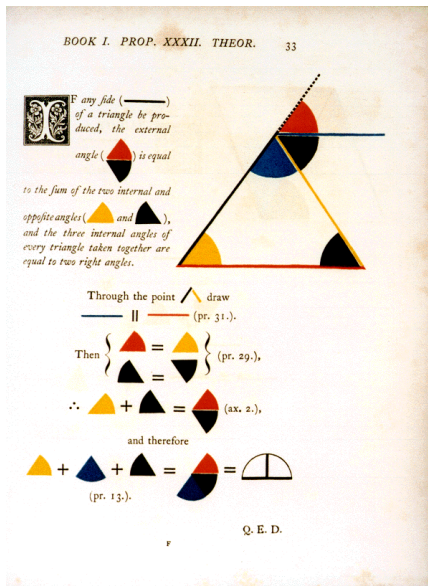
For if the alternate angles  and  be not equal,
 draw —, making  =  (pr. 23).
 Therefore — || — (pr. 27.) and there-
 fore two straight lines which intersect are parallel to
 the same straight line, which is impossible (ax. 12).

Hence the alternate angles  and  are not
 unequal, that is, they are equal:  =  (pr. 15);
 ∴  = , the external angle equal to the inter-
 nal and opposite on the same side: if  be added to
 both, then  +  =  =  (pr. 13).

That is to say, the two internal angles at the same side of
 the cutting line are equal to two right angles.

Q. E. D.

¹⁴<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html>

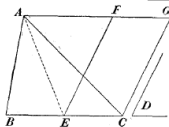


¹⁵<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html>

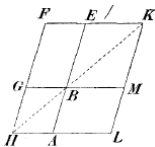
Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

- *Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají* .

- *Trojúhelník ABC a rovnoběžník $ECGF$ mají* (kde E = střed BC a $BC \parallel AF$):



- *Rovnoběžníky $BEFG$ a $BALM$ mají* (kde společný bod B ∈ úhlopříčce HK):



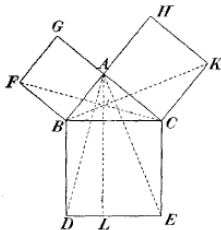
- *Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta* ...

¹⁶Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 18, 19).

Věta

Trojúhelník BAC je pravoúhlý a P je pata výšky z vrcholu A .

Potom platí a , tudíž .



Důkaz.

- ▶ $FBAG$ je čtverec a úhel BAC je pravý \implies body G, A, C leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s FB .
- ▶ Odtud podle zákl. věty o obsahích, shodnosti trojúh. FBC a ABD a znovu podle zákl. věty o obsahích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec $FBAG$ stejný obsah jako obdélník $PBDL$.

Obdobně to funguje na druhé straně...¹⁷



¹⁷<https://www.geogebra.org/m/apubVUSE>

36 BOOK I. PROP. XXXV. THEOR.



PARALLELOGRAMS
on the same base, and
between the same paral-
lels, are (in area) equal.

On account of the parallels,

$$\begin{array}{l} \text{red triangle} = \text{blue triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{black triangle} = \text{white triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{and } \text{blue triangle} = \text{red triangle} \quad (\text{pr. 34.}) \end{array}$$

But, $\text{yellow trapezoid} = \text{yellow trapezoid}$ (pr. 8.)

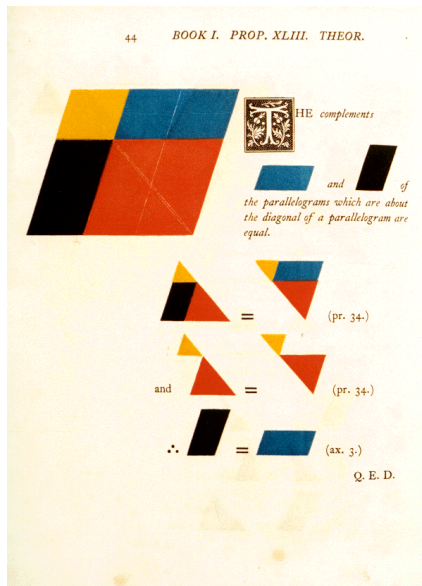
$$\therefore \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{blue triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{red triangle}$$

$$\text{and } \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{black triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{white triangle}$$

$$\therefore \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{black triangle} = \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{white triangle}$$

Q. E. D.

¹⁸<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html>



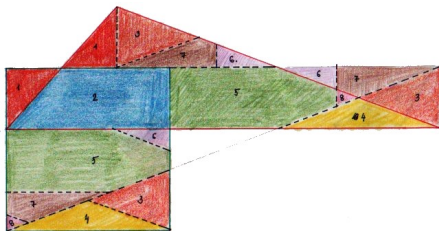
¹⁹<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html>

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestavit čtverec se stejným obsahem.²⁰

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním . . .

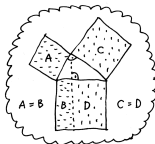
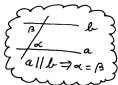
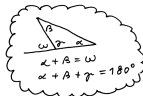
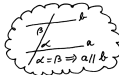
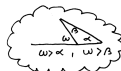
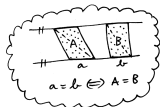
Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.

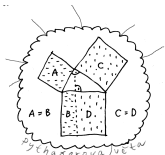


Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

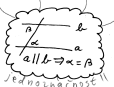
²⁰<http://ggbtu.be/mkripDpYd>



1. PATRO



PŘÍZEMÍ

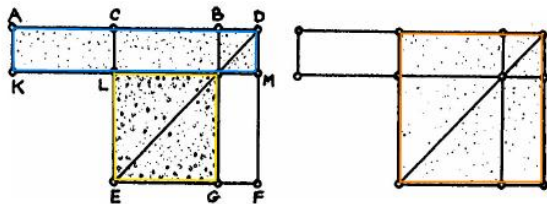


SUTERÉN



Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

... geometrické konstrukce vs. algebraická vyjádření...



Obrázek 4.11: **A** II.6: Pokud je C střed úsečky AB a D je libovolný bod na téže přímce vpravo od B , potom platí $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$.

Poznámky

Při značení $|AB| =: b$ a $|DB| =: x$ lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. .

Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice (s. 29).

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 27)...

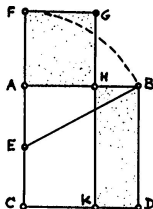
Definice

Bod H dělí úsečku AB ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

Konstrukce

- (i) AC je kolmice k AB , přičemž $AC = AB$,
- (ii) E = střed AC ,
- (iii) F leží na polopřímce CA tak, že $EF = EB$,
- (iv) H leží na úsečce AB tak, že $AH = AF$
 $\implies AH$ je delší částí zlatého řezu úsečky AB .

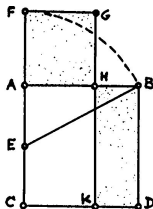


Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 24) a z Pythagorovy věty (s. 17):

$$CF \cdot FA + AE^2 = \boxed{} = \boxed{} \text{ neboli } CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník $CFGK$ a čtverec $ABDC$ mají stejný obsah. Tyto však mají společnou část $CKHA$, takže taky čtverec $AHGF$ a obdélník $KDHB$ mají stejný obsah. To můžeme zapsat jako

$$\boxed{} \text{ neboli } AH : BH = AB : AH. \quad \square$$



Počítání

Při označení $|AB| =: b$ a $|AH| =: x$ definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x) \text{ neboli } b(b - x) = x^2 \text{ neboli } \boxed{}.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \boxed{}, \quad |EB| = \boxed{}, \quad |AF| = |AH| = x = \boxed{}.$$

Skutečně, $x = \boxed{}$ je kořenem kvadratické rovnice $\boxed{}$...

Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- ▶ **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- ▶ **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,
- ▶ **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\quad} \quad (\quad)$$

Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem \iff jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$1 + - \cdot : \sqrt{ () }$$

Důkaz.

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

- (a) průnik dvou přímek \rightsquigarrow soustava rovnic,
 (b) průnik přímky s kružnicí \rightsquigarrow soustava a rovnice,
 (c) průnik dvou kružnic \rightsquigarrow soustava rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme , nebo rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...

Kořen(y) lib. a rovnice umíme vyjádřit z jejich koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice $x^2 + bx + c = 0$ se dělá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vzorečku

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

- (a) zdvojení krychle $\leadsto x = \sqrt[3]{2a}$,
- (b) rozvinutí kružnice $\leadsto x = 2\pi r$,
- (c) kvadratura kruhu $\leadsto x = \sqrt{\pi r}$,
- (d) roztřetí úhlu $\leadsto x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$,
- (e) pravidelné mnohoúhelníky $\leadsto \dots\dots$ (s. 53)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že π není racionální, resp. algebraické číslo.²¹

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

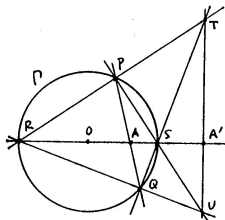
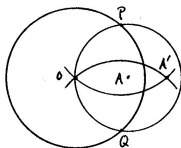
- ▶ problémy (a), (b) a (c) řešitelné,
- ▶ problémy (d) a (e) řešitelné.

²¹r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



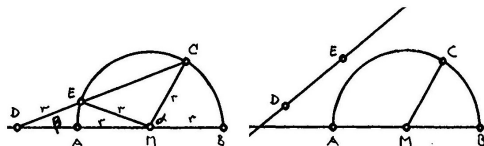
Příklad: Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu A' k bodu A vzhledem ke kružnici se středem O .

Věta

Konstrukce je proveditelná eukleidovsky je proveditelná mascheroniovsky

je proveditelná steinerovsky.

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)

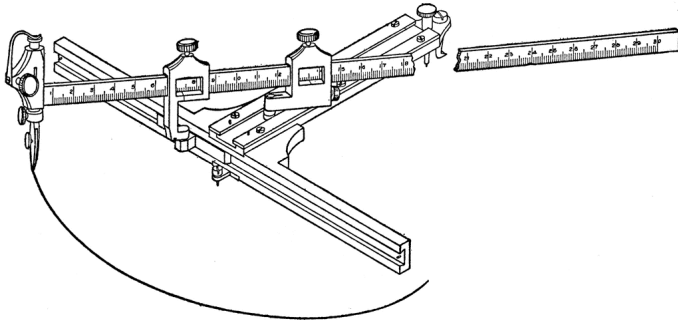


Příklad: Archimédova trisekce úhlu s označeným pravítkem.

Poznámka

Takto lze sestavit (reálné) kořeny libovolné rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 30...²²

²²http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction



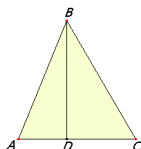
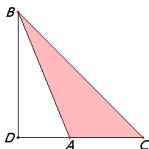
Konstrukce elipsy pomocí *neuseis* udělatka.

Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Jako důsledek (a zobecnění) (s. 17) představujeme:

Věta

V obecném trojúhelníku ABC , kde $D =$ pata výšky z vrcholu B , platí:



$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + \boxed{},$$

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - \boxed{}.$$

Důkaz.

Plyne z (zde pro trojúh. BDC a BDA) a pár úprav:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 = \\ &= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + \boxed{} = BA^2 + AC^2 + \boxed{}. \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka

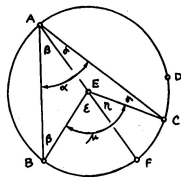
Při obvyklém značení $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $\alpha = |\angle BAC|$ můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - \boxed{}.$$

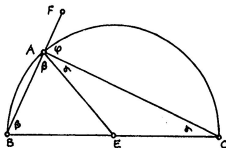
Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Jako důsledky věty (s. 10) uvádíme:²³

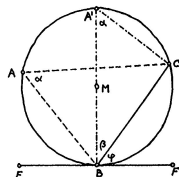
- ▶ větu o středovém a obvodovém úhlu,
- ▶ spec. případ — Thaletovu větu,
- ▶ větu o úsekovém úhlu,
- ▶ apod.



$$\mu = \text{$$



$$\alpha + \beta = \text{$$



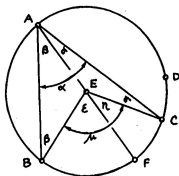
$$\varphi = \text{$$

²³<https://ggbm.at/MtseAe67>

Pro kružnici se středem E a úseč BC je úhel BEC středový (ozn. μ) a úhel BAC obvodový (ozn. α):

Věta

*Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ($\mu = 2\alpha$).
Proto jsou obvodové úhly k téže úseči **všechny stejné**.*



Důkaz.

- ▶ Trojúhelník ABE je rovnoramenný \implies úhly u základny jsou

- ▶ Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $ABE \implies$ vnější úhel .

Ze stejných důvodů platí také , odkud plyne $\mu = 2\alpha$.

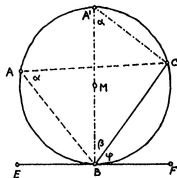
(Podobně se zdůvodní i ostatní varianty...)



Pro kružnici, úseč BC a tečnu BF je úhel CBF úsekový (ozn. φ):

Věta

Úsekový úhel k dané úseči je stejný jako úhel obvodový ($\alpha = \varphi$).



Důkaz.

► Věta o obvodovém úhlu \implies úhel BAC je .

► Vezměme A' tak, aby $A'B$ byl průměrem kružnice ($\angle A'BC$ ozn. β).

Věta o tečně \implies .

► Thaletova věta \implies úhel u C je .

Věta o součtu úhlů v trojúhelníku $A'BC$ \implies .

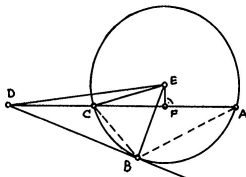
Celkem tedy $\alpha = \varphi$.



Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A :

Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je .



$$DC \cdot DA = \text{}$$

Důkaz 1 (pro D vně kružnice).

Lze zdůvodnit několikerým užitím (pro trojúhelníky DBE , DFE , CFE)²⁴ a pár úpravami:

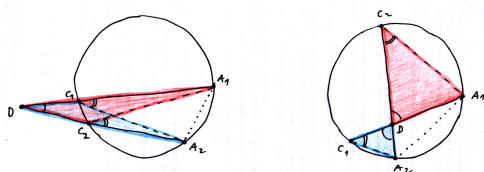
$$\begin{aligned} \text{} &= DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) = \\ &= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC. \end{aligned}$$

²⁴kde E = střed kružnice a F = pata kolmice na AC

Sečna jdoucí bodem D protíná kružnici v bodech C a A :

Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin $DC \cdot DA$ je .



$$DC_1 \cdot DA_1 = \text{}$$

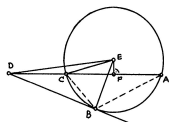
Důkaz 2 (univerzální).

Alternativně pomocí trojúhelníků:

- ▶ Věta o obvodových úhlech \implies vyznačené úhly u vrcholů C_i .
- ▶ Navíc úhly u vrcholu D jsou stejné \implies trojúhelníky C_1DA_2 a C_2DA_1 jsou .
- ▶ Tedy , což je ekviv. $DC_1 \cdot DA_1 = \text{}$. □

Pro bod D vně kružnice (a B bod dotyku tečny) platí

$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

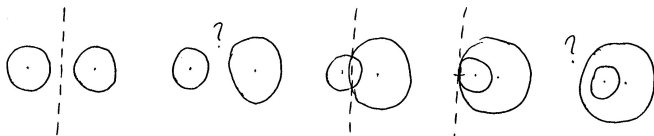


Definice

Mocnost bodu D ke kružnici se středem E a poloměrem r je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

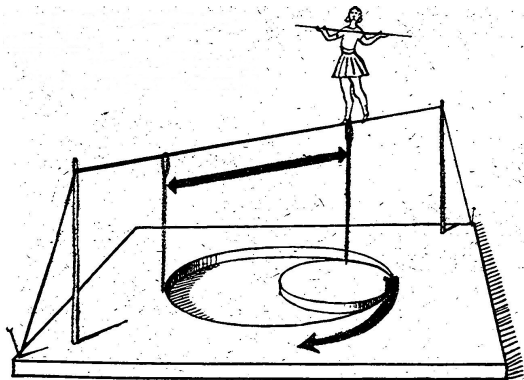
Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.



Věta

Chordála dvou nesoustředných kružnic je , která je na spojnici jejich středů.²⁵

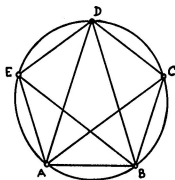
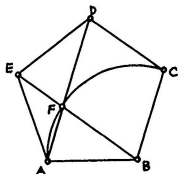
²⁵Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...



Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý.

Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.



Postřehy

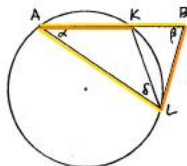
- (1) Souměrnost podle osy jdoucí $E \Rightarrow AD \square BC$ a $BE \square CD \Rightarrow BCDF$ je .
- (2) Obvodové úhly BAC , CAD , DAE atd. jsou všechny shodné \Rightarrow trojúhelník ABD je a úhly u základny jsou úhlu u vrcholu D , tzv. zlatý trojúhelník.
- (3) Trojúhelníky ADE a EAF jsou oba a mají společný úhel u vrcholu $A \Rightarrow$ jsou .

Pravidelný 5-úhelník lze sestavit pomocí zlatého 3-úhelníku, a ten lze sestavit pomocí zlatého řezu:

Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:

poměr ramene a základny je **zlatý** trojúhelník je **zlatý**.



Důkaz.

Poměr stran je určen poměrem úhlů a naopak. Stačí předp. $AK =$ delší část zlatého řezu AB , $AL = AB$, $BL = AK$ a ukázat $\beta = 2\alpha$:

- ▶ $K =$ zlatý řez a $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$ neboli .
- ▶ Toto je $\implies BL =$ tečna.
- ▶ Úsekový $\angle BLK$ obvodový $\angle LAK \implies \angle ALB =$.
- ▶ $\triangle ABL$ je $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$.
- ▶ $\angle LKB$ je vnějším úhlem v $\triangle AKL \implies \angle LKB =$.
- ▶ Odtud plyne, že $\triangle BLK$ je $\implies KL = BL = AK$.
- ▶ Proto také trojúhelník AKL je $\implies \underline{\alpha = \delta}$.

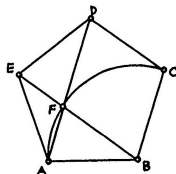
Celkem tedy $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$.



Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:

Věta

Úhlopříčky pravidelného 5-úhelníku se protínají v poměrech **zlatého řezu**...²⁶



Důkaz.

- ▶ Trojúhelníky ADE a EAF jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu $A \implies$ jsou .
- ▶ Odpovídající si strany jsou úměrné $\implies AD : DE = EA : AF$.
- ▶ Současně však platí , tedy

$$AD : DF = DF : FA. \quad \square$$

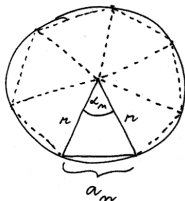
²⁶... jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.

Středový úhel v pravidelném n -úhelníku je $\alpha_n = 360^\circ/n$.

Velikost strany pravidelného n -úhelníku veps.

do kružnice s poloměrem r je (podle)

$$a_n = r \sqrt{2 - 2 \cos \alpha_n}.$$



Pro $n = 10$ je $\alpha_{10} = 36^\circ$, pro $n = 5$ je $\alpha_5 = 72^\circ$.

Ale to jsou právě úhly ve !

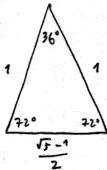
Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

a (podle) $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Po dosazení dostáváme

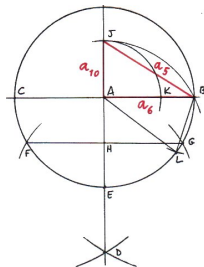
$$a_5 = r \sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dots = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$



Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky AB a zlatý trojúhelník ABL :

Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou **pravoúhlého trojúhelníku**, jehož odvěsnami jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.



Důkaz.

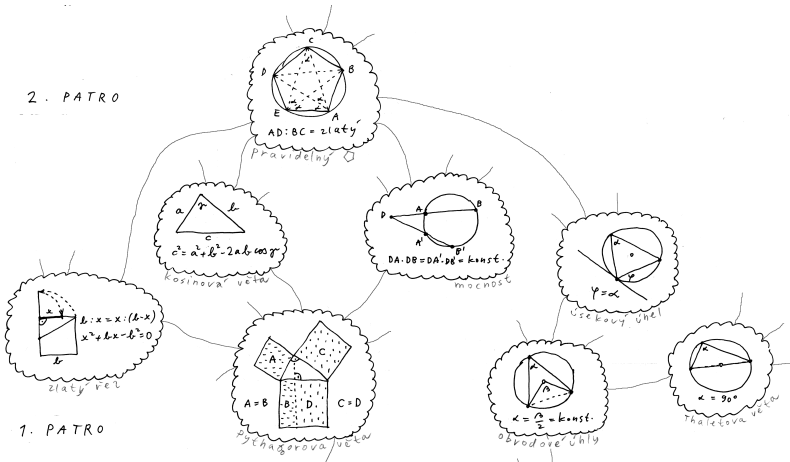
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \quad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle v trojúhelníku ABJ platí

$$|BJ| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \dots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

2. PATRO



1. PATRO

Pravidelný n -úhelník umíme sestrojít pro $n = 3, 4, 5, 6$.

Půlením úhlů lze sestrojít také např. pro $n = 8, 10, 12, 16, 20, \dots$

Kombinací předchozího lze sestrojít také např. pro $n = 15, \dots$

Věta

Pokud lze sestrojít pravidelný k -úhelník a l -úhelník, potom lze sestrojít také pravidelný n -úhelník, kde $n =$ k a l .²⁷

Důkaz.

Bez újmy můžeme předp. k, l nesoudělné.

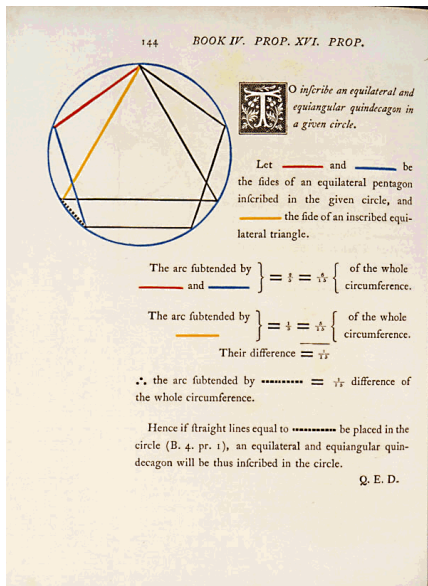
Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

$$\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l}\right) \cdot 360^\circ = \frac{al + bk}{k \cdot l} \cdot 360^\circ.$$

: k, l nesoudělné $\implies al + bk =$, pro nějaká celá čísla a, b, \dots
 \dots , tedy umíme středový úhel -úhelníku.

□

²⁷Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např. $3 \cdot 3 = 9$)!



Z předchozího tušíme, že pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

Věta (Gaussova–Wantzelova)

Pravidelný n -úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem \iff n je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_k = 2^{2^k} + 1$.

K dnešnímu dni²⁹ je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

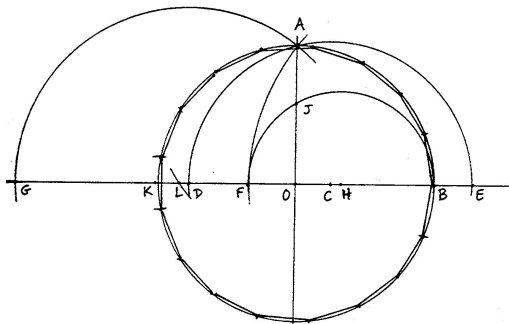
lze	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17	20			
nelze				7	9	11	13	14			18	19	21	22

²⁹5. května 2022, viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number

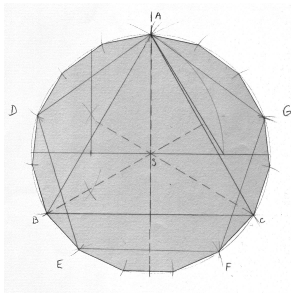
Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem r lze vyjádřit jako

$$a_{17} = \frac{r}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

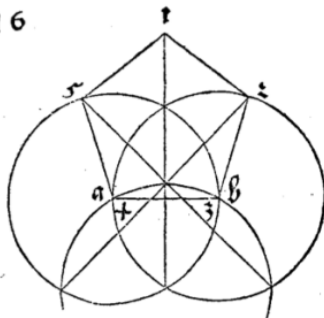
Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto³⁰



³⁰30. března 1796, viz <https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon>



16



Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných...

Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

Definice

Veličiny a, b jsou ve stejném poměru jako veličiny c, d ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla m, n platí

$$na \square mb \iff nc \square md.$$

Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny a, b, c, d jsou reálná čísla, čísla m, n jsou čísla celá.

Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:³¹

Reálná čísla $r (= \frac{a}{b})$ a $s (= \frac{c}{d})$ jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo $q (= \frac{m}{n})$ platí

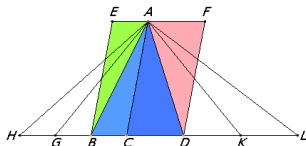
$$r \square q \iff s \square q.$$

³¹ Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je

poměr délek jejich základů.



obsah ACB : obsah ACD CB : CD

Důkaz.

Plyne přímo ze základní věty trojúhelníků (s. 18) a z definice

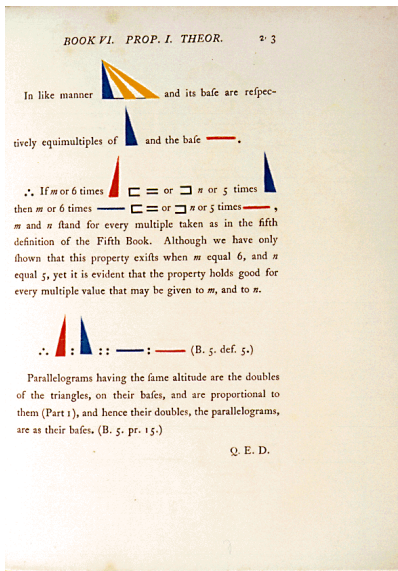
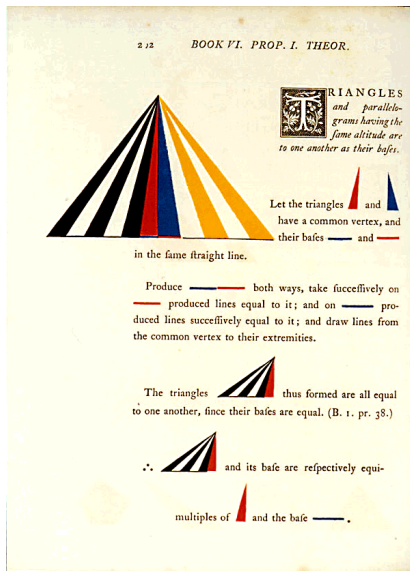
(s. 57)... □

Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

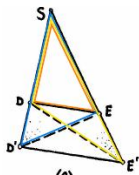
$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde S = obsah trojúhelníku, a = velikost strany, v = velikost výšky na stranu a .



Věta

Přímka je s jednou stranou trojúhelníku \iff protíná zbylé dvě strany .



$$SD' : SD \square SE' : SE \iff D'E' \square DE$$

Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD \square \text{obsah } SD'E' : \text{obsah } SDE,$$

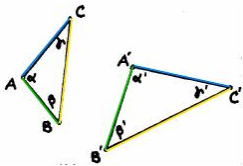
$$SE' : SE \square \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

Jmenovatelé na pravé straně jsou a trojúhelníky $SD'E'$ a $SE'D$ mají společný . Tedy (s. 18):

$$SD' : SD \square SE' : SE \iff \text{obsah } DD'E' \square \text{obsah } EE'D \iff D'E' \square DE.$$

Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$
$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

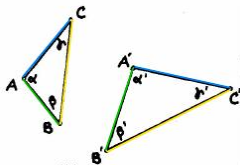
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \boxed{}.$$

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 61) jsou :

Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly \iff strany u shodných úhlů jsou úměrné.



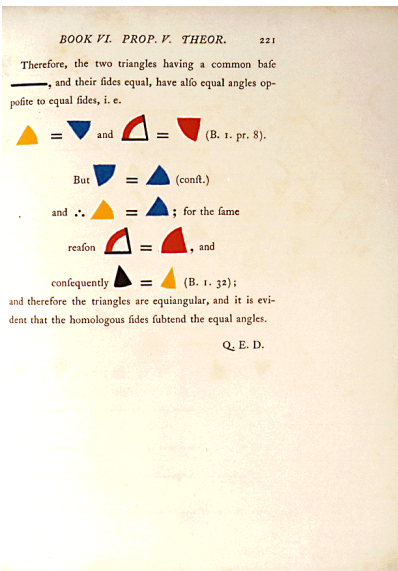
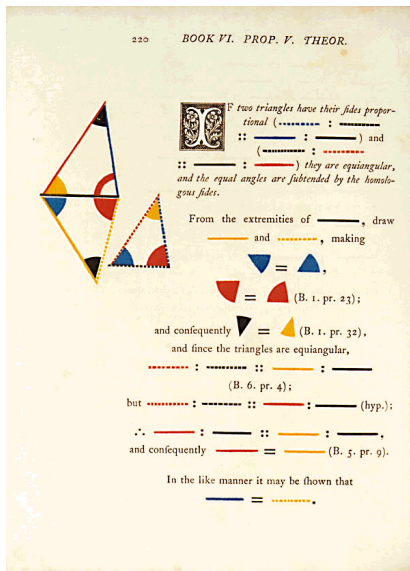
$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c', c : a = c' : a', a : b = a' : b'.$$

Důkaz.

Implikace je důsledkem předchozí věty (s. 60)...

Pro opačné tvrzení uvažme pomocný trojúhelník ABD , který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem $A'B'C'$.

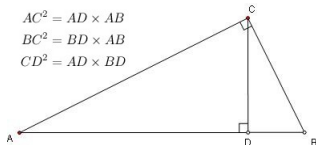
Nyní strany u shodných úhlů jsou a současně trojúhelníky ABD a ABC mají společnou stranu, tedy jsou ... □



Implikaci „ \implies “ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- ▶ Věta o mocnosti bodu ke kružnicí (s. 41).
- ▶ Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 47).
- ▶ Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 17):



Důkaz.

Trojúhelníky ADC a ACB mají po dvou shodné vnitřní úhly \implies jsou podobné

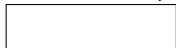
$$\implies AC : AD = AB : AC \implies \boxed{}.$$

Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně...

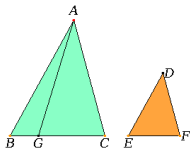


Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr



odpovídajících stran.



Je-li koeficient podobnosti = k , potom poměr obsahů .

Poznámky k důkazu

Snadné pro $k \in \mathbb{Z}$, resp. $k \in \square$.

Problematické pro $k \in \square$ — možné přístupy:

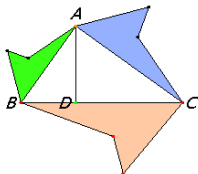
- ▶ limitní přechod,
- ▶ vzoreček,
- ▶ “elementární” trik.³⁴

³⁴<https://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop19.html>

Věta

Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku ,

potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je obsahů těch nad odvěsnami.



Důkaz.

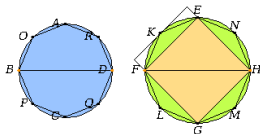
Plyne z předchozího tvrzení (s. 65) a z Pythagorovy věty (s. 17)...



U křivočarých útvarů se úvahám nevyhneme...³⁵

Věta

Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr jejich průměrů.



Idea důkazu.

Každý kruh lze aproximovat mnohoúhelníky.

Každé dva kruhy jsou a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky .

Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 65)... □

Poznámka

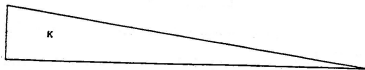
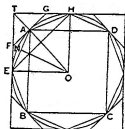
Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{$$

³⁵... v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

Věta (Archimédova)

Obsah kruhu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



Poznámky

Jinými slovy: $S = \frac{1}{2}r \cdot o$, kde r = poloměr kružnice a o = její obvod.
To spolu s rovností na s. 67 dává

$$S = \frac{1}{2}r \cdot o = \text{input} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!
Při tradičním značení:

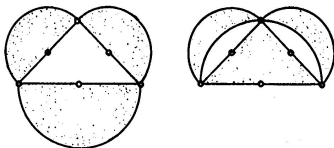
$$S = \text{input} \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2 \text{input} \cdot r.$$

³⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Area_of_a_circle#Archimedes's_proof

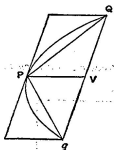
Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat (s. 20), kruh (s. 30).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat :

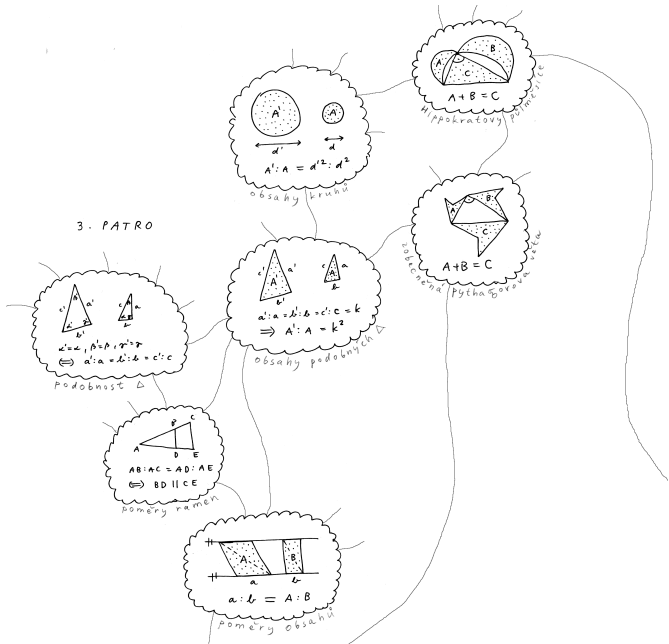
- ▶ Hippokratés: Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají jako tento trojúhelník.



- ▶ Archimédés: Obsah parabolické úseče je trojúhelníku PQq (což jsou opsaného rovnoběžníku).



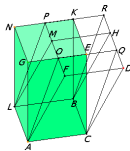
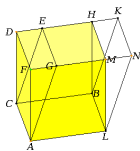
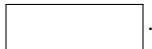
3. PATRO



Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

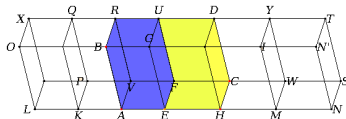
K tvrzením o rovnoběžnících (s. 16, s. 58, s. 65) máme tyto 3D **analogie**:

- ▶ Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají



- ▶ Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je

poměr obsahů jejich základů.



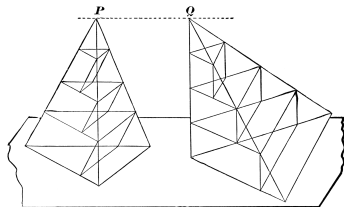
- ▶ Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr

odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázkou jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je poměr obsahů jejich základů.



Idea důkazu.

Každý jehlan lze konečným počtem hranolů.

Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami.

Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 72)... □

Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.³⁷

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \text{} S \cdot v,$$

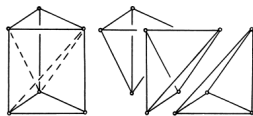
kde V = objem jehlanu, S = obsah podstavy a v = velikost odpovídající výšky.

Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů!³⁸

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 20) obecně

.



³⁷http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

³⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

S podobnými úvahami jako na s. 73 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

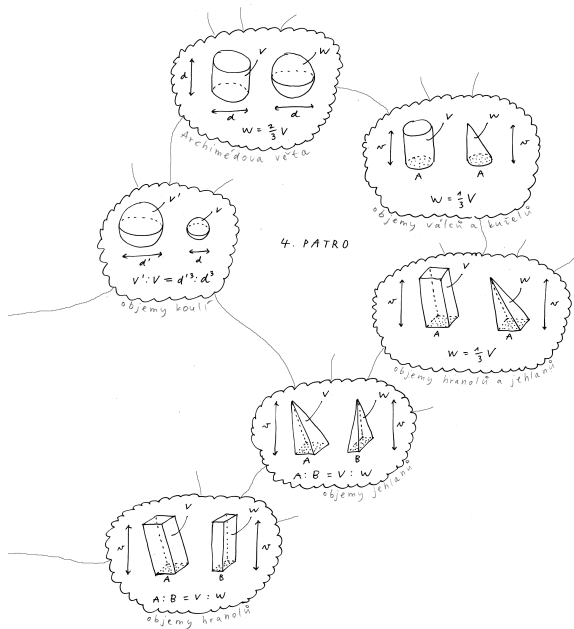
- ▶ Poměr objemů válců se stejnou výškou je poměr obsahů jejich podstav,
- ▶ poměr objemů koulí je stejný jako poměr jejich průměrů,
- ▶ objem kužele je roven objemu jemu opsaného válce,
- ▶ apod.

Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

Věta (Archimédova)

Objem koule je roven objemu jemu opsaného válce.³⁹

³⁹viz např. opět https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip

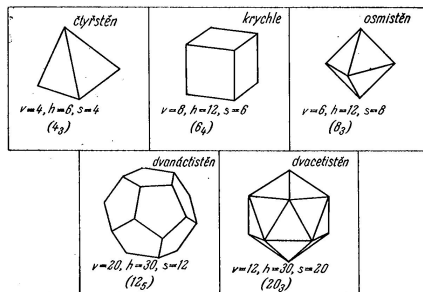


Základy	4
Úvod	4
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	23
Kosinová věta	34
O kružnicích	36
Pravidelný pětiúhelník a další	44
Teorie podobnosti	56
Trocha stereometrie	71
Pravidelné mnohostěny	77
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

- = pravidelné konvexní mnohostěny
- = konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky⁴⁰

Věta









Platónských těles je právě pět druhů:



⁴⁰ \implies mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

(1) Platónských těles pět druhů:

součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:

			
{3,3} Defect 180°	{3,4} Defect 120°	{3,5} Defect 60°	{3,6} Defect 0°
			
{4,3} Defect 90°	{4,4} Defect 0°	{5,3} Defect 36°	{6,3} Defect 0°
<p>A vertex needs at least 3 faces, and an angle defect. A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling. By Descartes' theorem, the number of vertices is $720^\circ/\text{defect}$.</p>			

(2) Platónských těles pět druhů:

pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:

- ▶ čtyřstěn {3, 3}, krychle {4, 3}, osmistěn {3, 4} jsou snadné,
- ▶ pro rozbor dvacetistěnu {3, 5} a dvanáctistěnu {5, 3} budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 49)...

Bubínek:

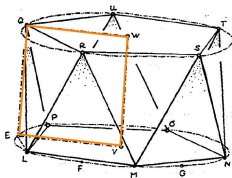
$QL = QR =$ strana vepsaného □-úhelníku,

$LE =$ strana vepsaného □-úhelníku,

$LEQ =$ □ trojúhelník.

Proto podle s. 49:

- ▶ $EQ =$ strana vepsaného 6-úhelníku = poloměr kružnice.



$EQ = VE$, tedy $EVWQ$ je čtverec.

Čepičky:

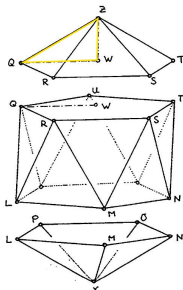
$QWZ = \square$ trojúhelník,

$QZ = QR =$ strana vepsaného \square -úhelníku,

$QW =$ strana vepsaného \square -úhelníku.

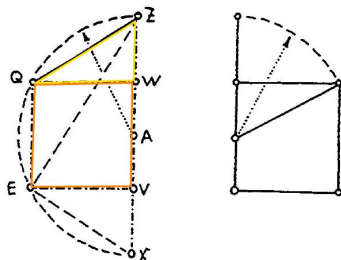
Proto podle s. 49:

- ▶ $WZ =$ strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.



$WZ =$ delší část zlatého řezu úsečky WQ .

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule...



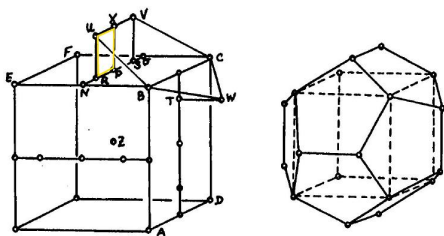
Řez dvacetistěnu a řez ⁴¹

⁴¹viz konstrukci na s. 25

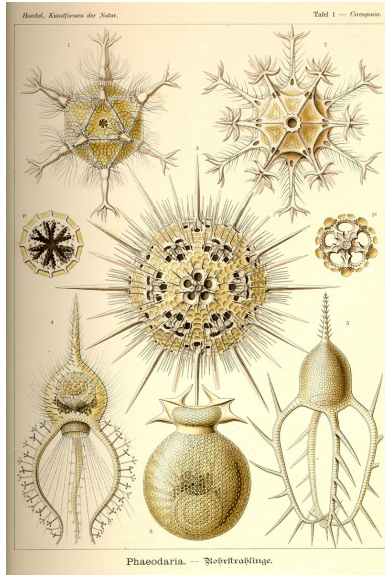
Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy U, V, W podle obr. . .

. . . a postupně se zdůvodní, že:

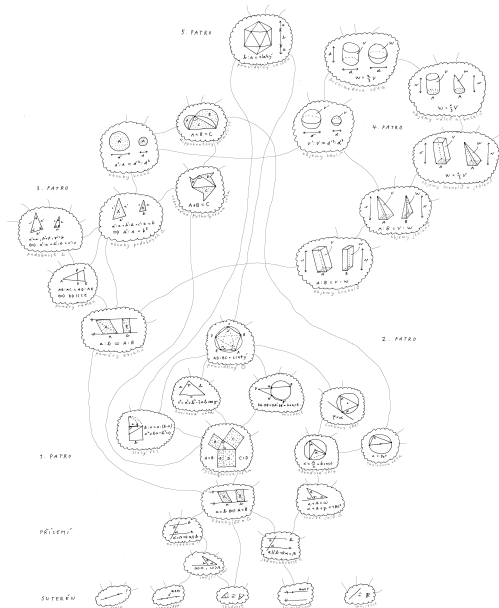
- ▶ body $UBCWV$ leží v jedné rovině,
- ▶ pětiúhelník $UBCWV$ je pravidelný,
- ▶ vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná.



$RU = RP =$ delší část úsečky PN .



Circogonia icosahedra je .



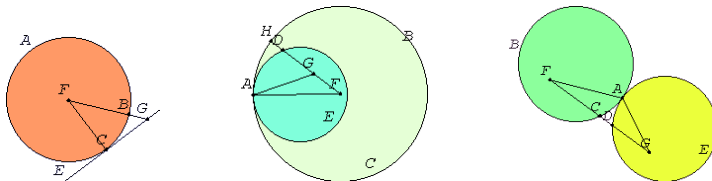
⁴²<https://is.muni.cz/el/ped/jaro2022/MA0007/um/prednaska/zaklady.pdf>

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Úvod	86
Základní úlohy	89
Zobecnění	94
Obecná Apollóniova úloha	97
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.



Věta

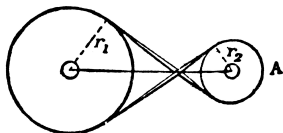
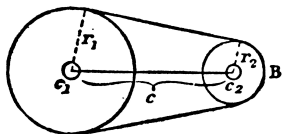
Přímka se dotýká kružnice v bodě C je kolmá k průměru FC.

Kružnice se dotýkají v bodě A spojnice jejich středů prochází bodem A.⁴³

⁴³Důkazy zpravidla nepřimo, viz např.

Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

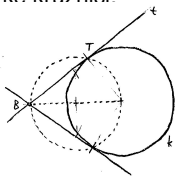
- ▶ *cyklus* = orientovaná kružnice,
- ▶ *paprsek* = orientovaná přímka,
- ▶ *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.



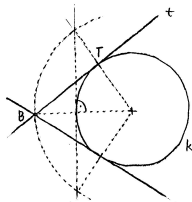
Základy	4
Dotykové úlohy	86
Úvod	86
Základní úlohy	89
Zobecnění	94
Obecná Apollóniova úloha	97
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Základní úlohy s tečnami

Tečna z bodu ke kružnici:

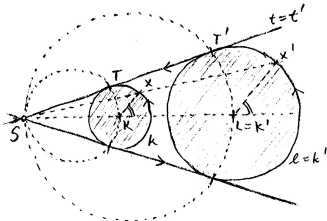


(a) pomocí

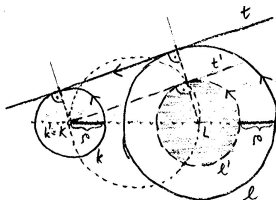


(b) pomocí

Společné tečny ke dvěma kružnicím:

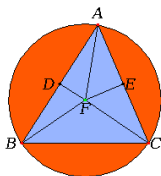


(a) pomocí

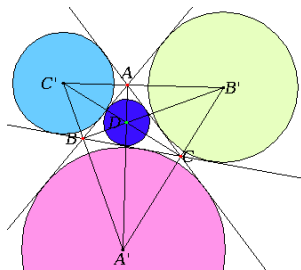


(b) pomocí 44

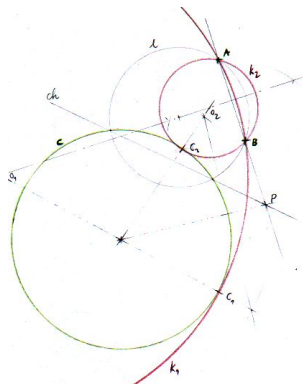
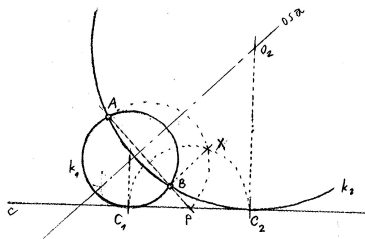
Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:



pomocí ,



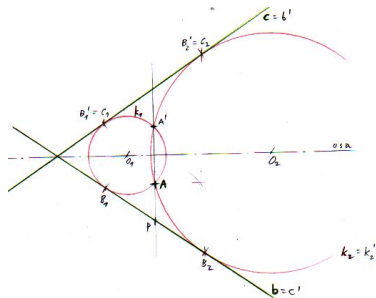
Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímkou, resp. kružnice:



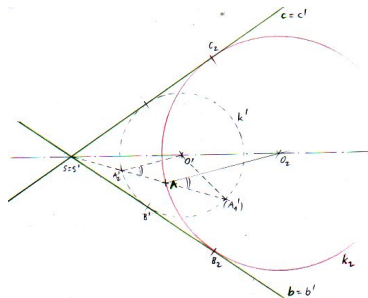
např. pomocí



Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



(a) pomocí 45

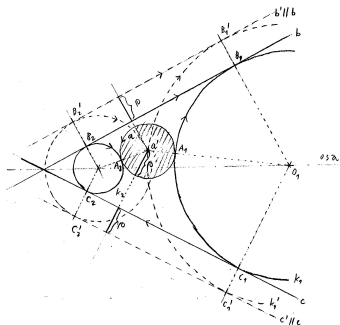


(b) pomocí

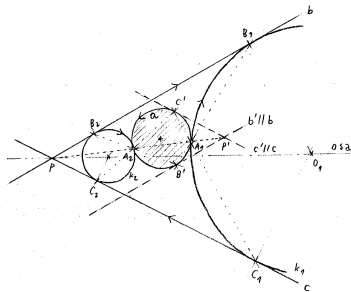
45... redukováno na předchozí případ (s. 92).

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Úvod	86
Základní úlohy	89
Zobecnění	94
Obecná Apollóniova úloha	97
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímk:



(a) pomocí 46



(b) pomocí

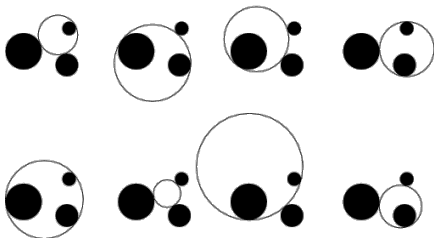
Základy	4
Dotykové úlohy	86
Úvod	86
Základní úlohy	89
Zobecnění	94
Obecná Apollóniova úloha	97
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

= dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

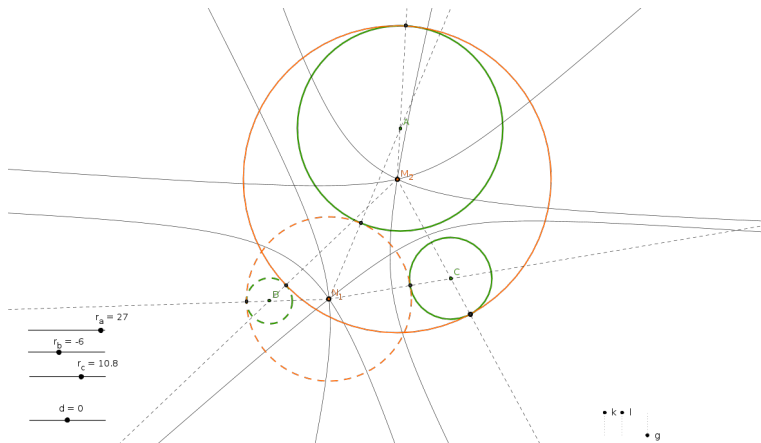
$$\lim_{r \rightarrow 0}(\text{kružnice}) = \boxed{}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty}(\text{kružnice}) = \boxed{}.$$

Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po :



Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací...⁴⁸

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace*...



Středů všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří .

⁴⁸http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius

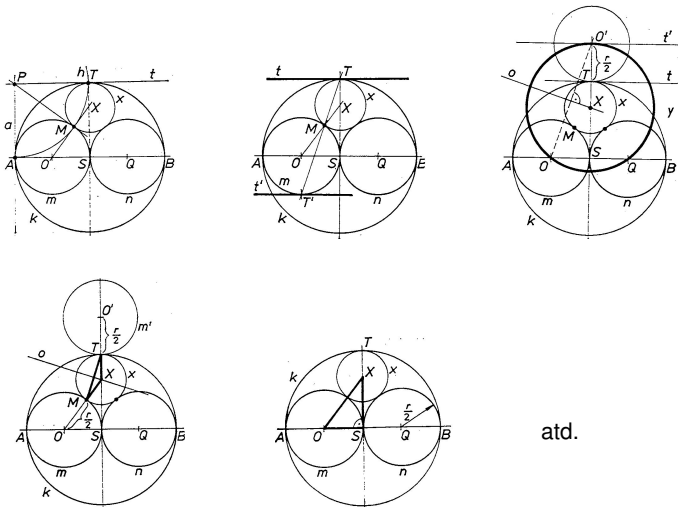
Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

- ▶ souměrnosti,
- ▶ stejnolehlost,
- ▶ dilatace,
- ▶ kruhová inverze,
- ▶ apod.

Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. [103](#)...

Ukázka typického použití na s. [115](#)...

Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:⁴⁹

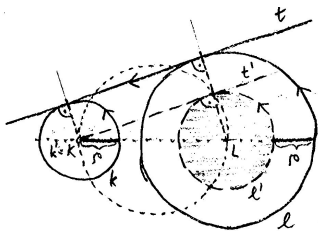


atd.

⁴⁹např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 90):



Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- ▶ nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (),⁵⁰
- ▶ měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- ▶ není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale ,
- ▶ orientovaný dotyk nejsnáze znázorníme tečným (vázaným) vektorem. . .

⁵⁰Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto kurzu!

Co to je? Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

Čím je určena? Nenulovým reálným číslem ρ .

Jak je určena? Obraz lib. zastoupeného vektorem \mathbf{v} je reprezentován vektorem \mathbf{v}' , který je posunut o vzdálenost ρ kolmo k \mathbf{v} , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci...



Jaké má vlastnosti? Orientované kontaktní zobrazení!

K čemu to je dobré? Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 90, 95, 116, ...)!

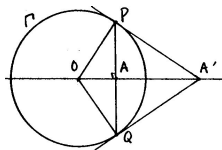
Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Co to je? Transformace roviny vyjma .⁵¹

Čím je určena? Kružnicí se středem O a poloměrem r .⁵²

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu $A \neq O$ leží na polopřímce OA , a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s kružnicí pevných bodů,
základní konformní transformace v rovině, nepřímá, ...

⁵¹tzv. střed kruhové inverze

⁵²tzv. řídicí kružnice

Zřejmé:

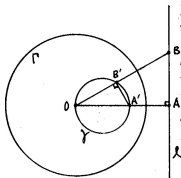
- (a) Kruhová inverze je involutivní transformace.
- (b) Všechny body na řídící kružnici jsou pevné.
- (c) Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.
- (d) Každá přímka procházející středem inverze je pevná; přitom jediné pevné body jsou průsečíky s řídící kružnicí a

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X' = \square, \quad \text{resp.} \quad \lim_{X \rightarrow O} X' = \square.$$

Nezřejmé:

- (e) Kružnice procházející středem O se zobrazuje na (neprocházející středem O), a naopak.
- (f) Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje . Naopak, každá kružnice procházející dvojitými inverzními body je kolmá ke Γ .
- (g) Obecná kružnice neprocházející středem O se zobrazuje do neprocházející O .
- (h) Kruhová inverze je konformní, tzn. zobrazení.

- (e) Kružnice procházející středem O se zobrazuje na přímku (neprocházející středem O), a naopak.



Důkaz.

Předp. extrémní dvojici $A \mapsto A'$, kde $OA \perp \ell$ a $OA' =$ průměr γ .

Ozn. $B \in \ell$ a $B' \in \gamma$ průsečíky s lib. přímkou jdoucí O .

Dokážeme, že B a B' jsou inverzního vzhledem ke Γ :

- Thaletova věta \implies úhel $OB'A'$ je \implies trojúhelníky OAB

a $OA'B'$ jsou \implies

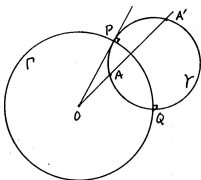
$$\text{ neboli } OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

- Body A a A' jsou inverzní vzhledem ke Γ , takže B a B' taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = \text{}. \quad \square$$

(f) Kružnice kolmá ke Γ se zobrazuje sama na sebe.

Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke Γ .



Důkaz.

Kružnice γ protíná řídicí kružnici Γ kolmo⁵³

\iff poloměr OP je ke kružnici γ

\iff pro libovolnou sečnu jdoucí bodem O platí⁵⁴

$$OA \cdot OA' = \text{$$

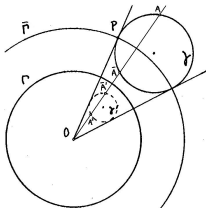
\iff body A a A' jsou vzhledem ke Γ .

□

⁵³tzn. tečny ve společném bodě P jsou kolmé

⁵⁴podle věty o bodu ke kružnici (s. 41)

- (g) Obecná kružnice nepocházející středem O se zobrazuje do jiné kružnice nepocházející O .



Důkaz.

Uvažme kružnici $\bar{\Gamma}$, která je soustředná s Γ a protíná kružnici γ kolmo.

Ukážeme, že složení kruhových inverzí $\bar{\Gamma}$ a Γ je .⁵⁵

- Označme $A \mapsto A'$ kruhovou inverzi vzhledem ke Γ a $A \mapsto \bar{A}$ kruhovou inverzi vzhledem ke $\bar{\Gamma}$, tedy

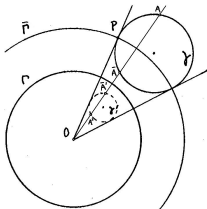
$$OA \cdot OA' = \square \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot OA' = \square.$$

- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = \square = \mathbf{konst.} \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \mathbf{konst} \cdot OA. \quad \square$$

⁵⁵... zbytek je jasný: z předchozího (s. 109) a vlastností stejnolehlosti (s. 132) plyne, že obrazem γ vzhledem ke Γ je kružnice.

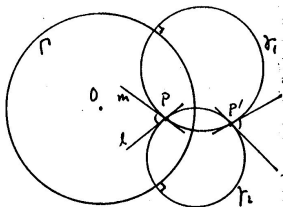
Při stejnoolehlosti $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$ se střed γ na střed γ' .



Při kruhové inverzi $\Gamma : A \mapsto A'$ se střed γ na střed γ' !

(Viz též obraz středu γ vzhledem ke kruhové inverzi $\bar{\Gamma} \dots$)

(h) Kruhová inverze je konformní zobrazení.⁵⁶



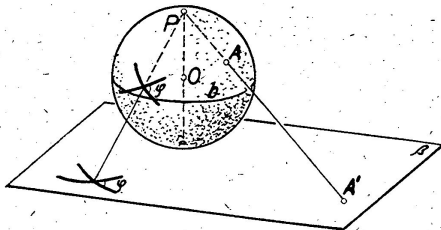
Důkaz.

- ▶ Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě P = odchylka jejich m a l .
- ▶ Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě , které prochází bodem P a mají přímky m a l jako tečny.
- ▶ Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice γ_1 a γ_2 , které jsou k řídící kružnici Γ !
- ▶ Avšak kružnice γ_1 a γ_2 se zobrazují (s. 109), obrazem bodu P je bod P' kružnic a odchylka v bodě P je jako odchylka v bodě P' . □

⁵⁶... úhlojevné, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Každé podobné zobrazení je konformní.

Dalším známým **nepodobným** konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):

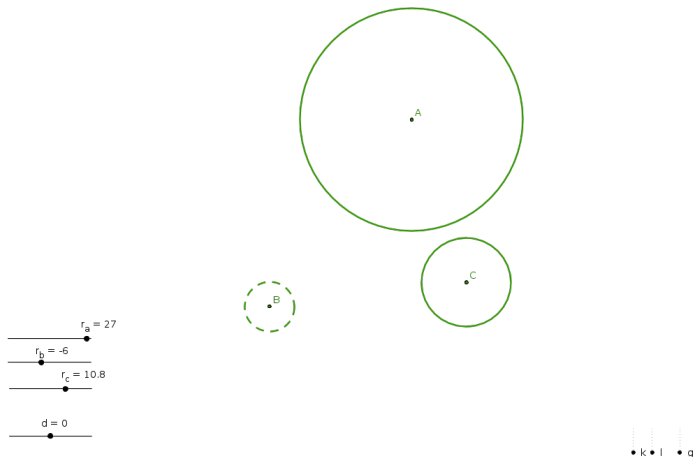


Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

- ▶ **nezachovávají vzdálenosti ani poměry vzdáleností,**
 - ▶ **nezobrazují přímky na přímky,**
 - ▶ **nezachovávají obsahy, resp. objemy,**
-
- ▶ ale zachovávají odchylky protínajících se křivek,
 - ▶ jsou prostá (injektivní).

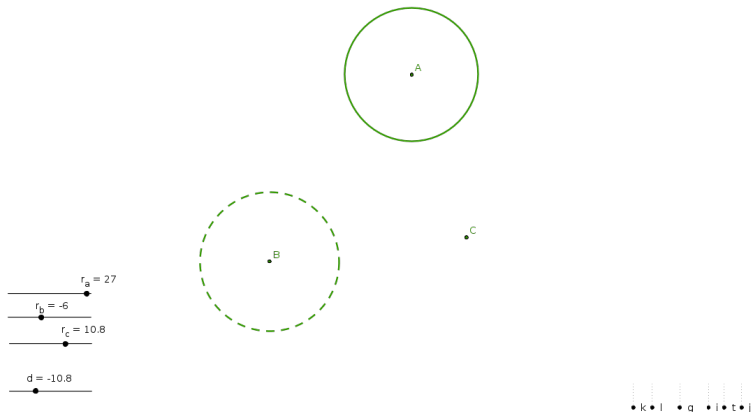
Orientovaná Apollóniova úloha:⁵⁷



Sestrojít cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

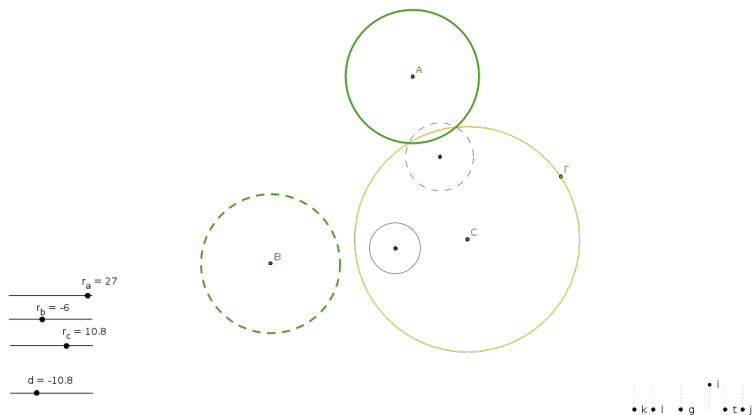
⁵⁷<http://ggbtu.be/mrFsNSnbN>

(1) vhodná :



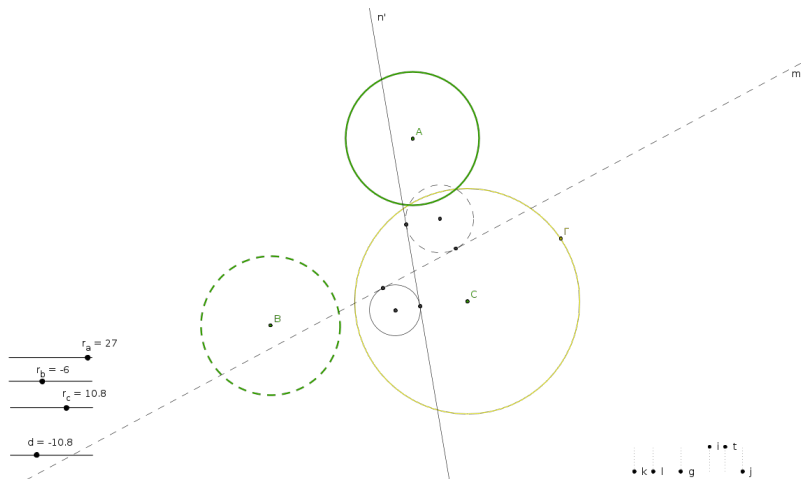
... tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, ...

(2) vhodná :



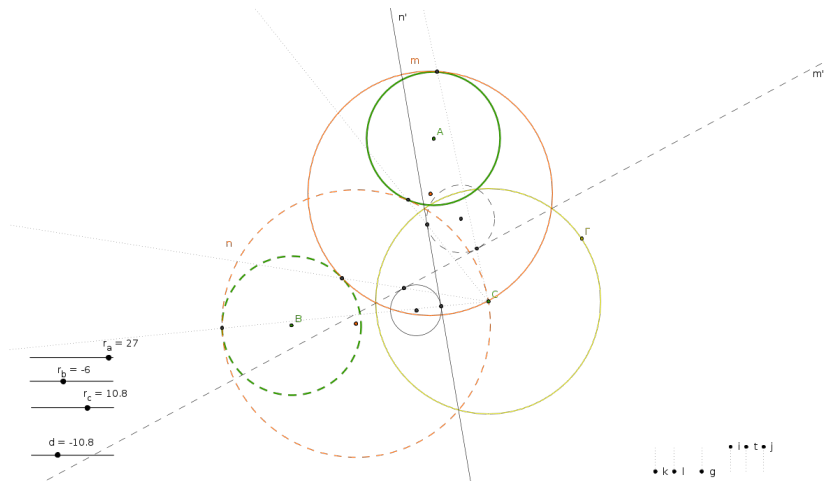
... kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 108), ...

(3) dvou kružnic:



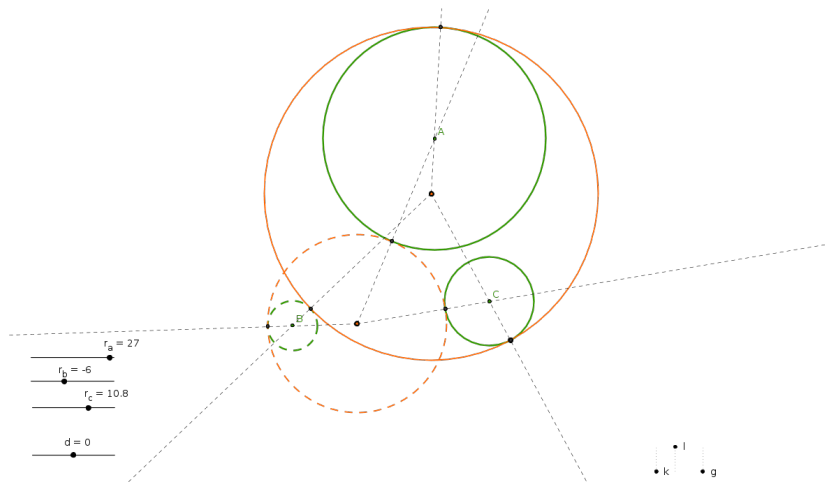
... což je jedna ze základních úloh (s. 90), ...

(4) zpět:



... což je snadné, ...

(5) zpět:



... což je taky snadné.



projektivní



afinní



podobná



shodná



ekviafinní

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o .⁵⁸

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na kolmici k ose, a to tak, že



kde X_0 = průsečík XX' s osou o .



Jaké má vlastnosti? Involutivní transformace s přímkou pevných bodů, základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

⁵⁸tzv. osa

Definice

Shodné zobrazení

(a) zachovává vzdálenosti,

tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí



Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

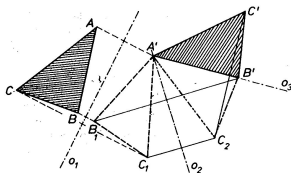
(d) zachovává obsahy, resp. objemy,

(e) je prosté (injektivní).

Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Věta

Každá shodnost v rovině je složením nejvýše osových souměrností:



Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- ▶ $A \mapsto A' \dots$ dořešíme obrazy $B \mapsto B_1$ a $C \mapsto C_1$,
- ▶ $B_1 \mapsto B' \dots$ dořešíme obraz $C_1 \mapsto C_2$, atd.

□

\dots proto je osová souměrnost základní shodností v rovině.

Odtud klasifikace shodností v rovině:

- (a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \square o_2$,
- (b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \square o_2$,
- (c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že o_1 a o_2 jsou ,
- (d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že $o_1 \square o_2$,
- (e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,
- (f) *posunutá souměrnost* = složení os. soum.

Poznámky

Shodnost s přímkou pevných bodů je právě osová souměrnost (e).

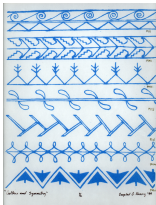
Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci), shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:

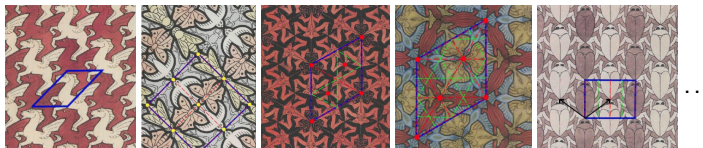


Odtud klasifikace symetrických vzorů, viz např.

- ▶ frízových vzorů⁵⁹



- ▶ tapetových vzorů⁶⁰



- ▶ atp.

⁵⁹http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

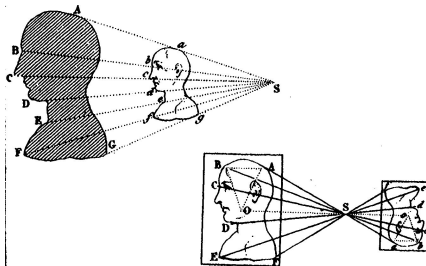
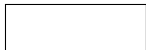
⁶⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Bodem S a nenulovým reálným číslem k .⁶¹

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží přímce SX , a to tak, že



Jaké má vlastnosti? Transformace se pevným bodem,
základní podobnost, v rovině přímá transformace, ...

⁶¹tzv. *střed* a *koeficient* = poměr škálování

Spec. pro koeficient $|k| = 1$ dostáváme shodnosti:

- ▶ , pokud $k = 1$,
- ▶ , pokud $k = -1$.

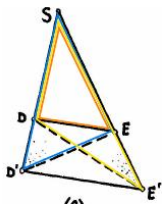
Pokud bychom připustili $k = 0$, dostaneme velmi degenerovaný případ:

- ▶ .

Základní poznatek známe ze s. 60!

Zejména, každá stejnoolehlost je

- ▶ podobné zobrazení, které
- ▶ každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.



Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

Věta

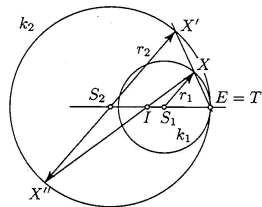
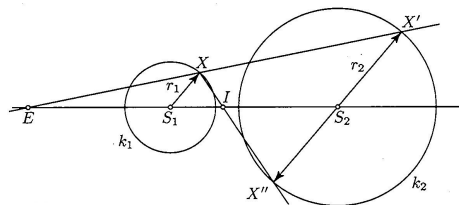
Složení dvou stejnoolehlostí se středy S_1 , resp. S_2 a koeficienty k_1 , resp. k_2 je:

- ▶ , právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 = S_2$,
- ▶ , právě když $k_1 \cdot k_2 = 1$ a $S_1 \neq S_2$,⁶²
- ▶ , právě když $k_1 \cdot k_2 \neq 1$.⁶³

⁶²... , přičemž vektor posunutí je násobkem vektoru $\overrightarrow{S_1 S_2}$

⁶³... pokud $S_1 \neq S_2$, potom střed výsledné stejnoolehlosti leží na přímce $S_1 S_2$

Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, ...



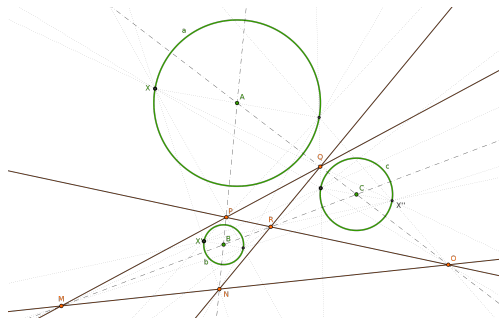
... každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, ...

... a to způsobem.

Odtud (pro zajímavost) Mongeova věta:⁶⁴

Věta

Mezi šesti středy stejnolehlostí tří kružnic jsou trojice.



Důkaz.

Plyne z věty o skládání stejnolehlostí (s. 131)... □

⁶⁴... uplatnění např. při řešení obecné Apollóniovu úlohy

Definice

Podobné zobrazení

- (a) zachová poměry vzdáleností,
tzn. pro libovolné body A, B a jejich obrazy A', B' platí

$$\frac{A'B'}{AB} = k,$$

kde $k =$ kladná konstanta, tzv. *koeficient podobnosti*.

Další vlastnosti

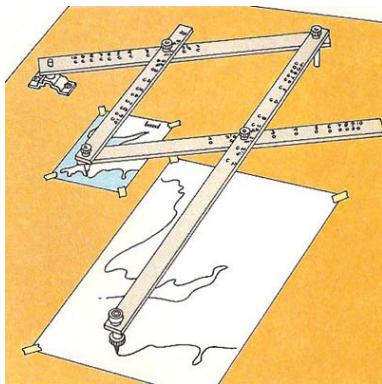
- (b) zachovává kolineárnost bodů,
(c) zachovává odchylky přímk,
(d) obsahy se mění \square -krát, resp. objemy se mění \square -krát,
(e) je prosté (injektivní).

Podobnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem $k = 1$).

Každé podobné zobrazení je složením nějaké a .

... proto je stejnolehlost základní podobností.

Pantograf⁶⁵

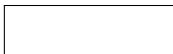
⁶⁵<http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph>

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

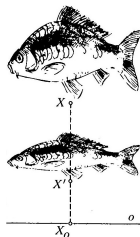
Co to je? Transformace eukleidovské roviny.

Čím je určena? Přímkou o , směrem \mathbf{s} a nenulovým reálným číslem m .⁶⁶

Jak je určena? Obraz X' lib. bodu X leží na přímce se směrem \mathbf{s} , a to tak, že



kde $X_o =$ průsečík XX' s osou o .



Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů, základní afinní transformace v rovině, přímá/nepřímá podle znaménka m , ...

⁶⁶tzv. *osa*, *směr* škálování a *modul* = poměr škálování v daném směru

Speciálními, resp. mezními případy osově afinity jsou:

- ▶ *osová souměrnost*, pokud ,
- ▶ *šikmá souměrnost*, pokud ,
- ▶ *elace* aneb *naklonění*, pokud ($\implies m = \square$),

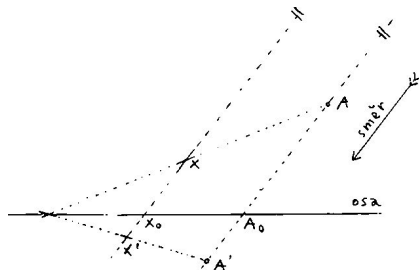


Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- ▶ do přímky o ve směru \mathbf{s} .

Osová afinita zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,
- (c) rovnoběžnost přímek.



Důkaz.

Variace na ...



Osová afinita s osou o , směrem \mathbf{s} a modulem m :

- (d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když nebo ,
- (e) je přímá, resp. nepřímá, právě když m , resp. m ,
- (f) je involutivní, právě když $m =$,
- (g) obsahy se mění -krát.

Definice

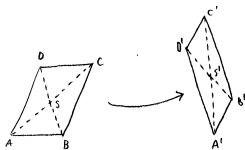
Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) z předchozí strany.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*.

Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmou souměrnost nebo elaci).

Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ...



Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) (b) a (c)...⁶⁷

⁶⁷... viz základní větu afinní geometrie (příští semestr)

Analogicky k tvrzení na s. 125 máme:

Věta

Každá afinita v rovině je složením nejvýše osových afinit.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je , volnost v realizaci □

... proto je osová afinita základní afinitou v rovině.

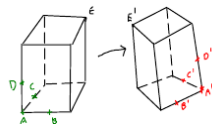
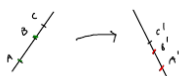
Příklad

Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:



Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy různých bodů...

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy bodů v obecné poloze...



Věta

Prosté afinní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy bodů v obecné poloze.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí a přenášení

... ⁶⁸



Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

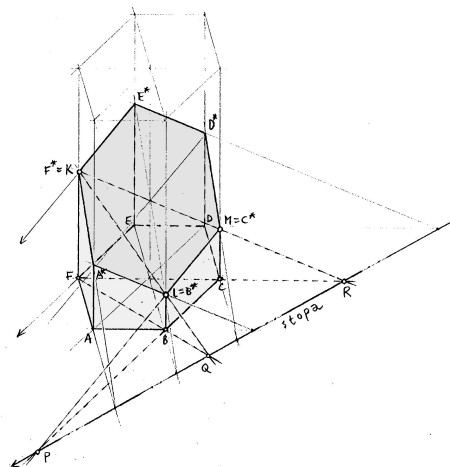
Podobné a ekviafinní zobrazení je .

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je rovnoběžné promítání do ...

Obecné afinní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ zachovává rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ být prosté (injektivní).



Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou KLM ...⁶⁹

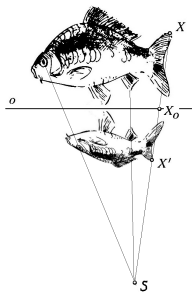
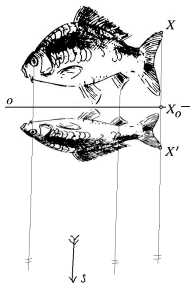
⁶⁹<http://ggbtu.be/mkvJL3iqr>

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 121):

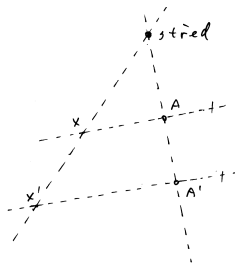
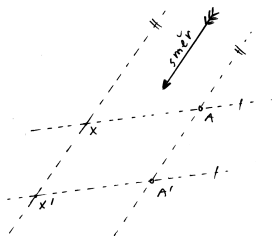
Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné. . .

. . . jako od osově afinity k osové kolineaci. . .



. . . nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému. . .

Posunutí vs. stejnolehlost:



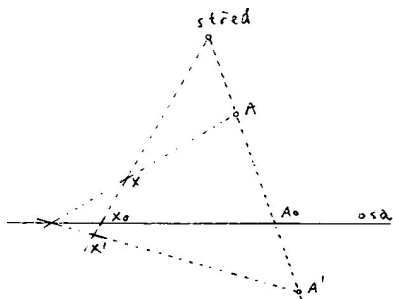
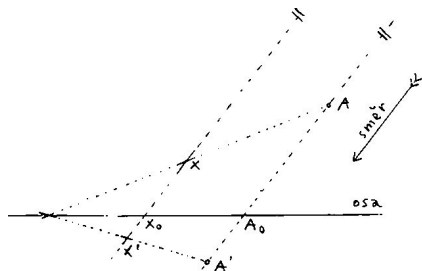
- ▶ $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr,
- ▶ $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \dots$ vektor posunutí,

$X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,

$$\frac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \dots \text{ koef. stejnolehlosti,}$$

„Posunutí = stejnolehlost se středem v .“

Osová afinita vs. osová kolineace:



▶ $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr,

$X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,

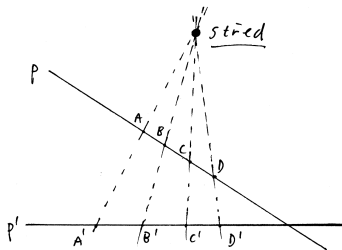
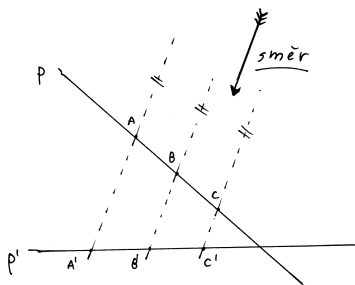
▶ $\frac{\overrightarrow{X'X_0}}{\overrightarrow{XX_0}} = \frac{\overrightarrow{A'A_0}}{\overrightarrow{AA_0}} = \dots$ modul,

???? = ???? = ... modul,⁷⁰

„Osová afinita = osová kolineace se středem v .“

⁷⁰kde ???? je nějak určeno body A, A', A_0 a S .

Rovnoběžné vs. středové promítání:



▶ $A'A \parallel B'B \parallel \dots$ směr,

$A'A \cap B'B \cap \dots$ střed,

▶ $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \dots$ zákl. invariant,

$???? = ????? = \dots$ zákl. invariant,⁷¹

„Rovnoběžné promítání = středové promítání se středem v .“

⁷¹kde ??? je nějak určeno body A, B, C a D.

Definice

Dělicí poměr trojice kolineárních bodů (A, B, C) je reálné číslo d takové, že platí $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB\ C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Dvojpoměr čtveřice kolineárních bodů (A, B, C, D) je poměr dělicích poměrů $(AB\ C) : (AB\ D)$; značíme a zapisujeme takto:

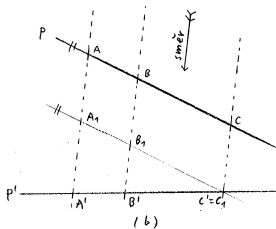
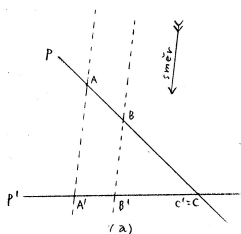
$$(AB\ CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

Poznámky

Vzhledem k tomu, že $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB\ D) = \square$, platí $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB\ CD) = \square$.

Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.⁷²



Důkaz.

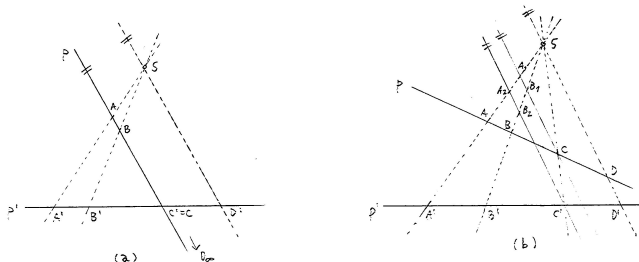
- (a) Spec. případ plyne z trojúhelníků $AA'C$ a $BB'C'$ (s. 60).
- (b) Obecný případ plyne z (a) a protilehlých stran v rovnoběžnících.



⁷²... pokud se různé body zobrazí na různé body.

Věta (Pappova)

Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.⁷³

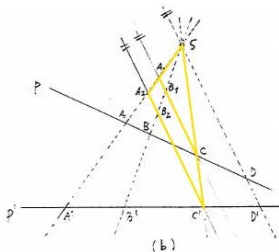


Důkaz.

(a) Spec. případ ($C = C'$ a $SD' \parallel p$) plyne z trojúhelníků (s. 60) a vztahu $(ABC) = (ABCD_\infty)$ (s. 152).

(b) Obecný případ plyne z (a) a trojúhelníků... □

⁷³... pokud se různé body zobrazí na různé body.



Doplníme rovnoběžky s přímkou SD jdoucí bodem C , resp. C' .

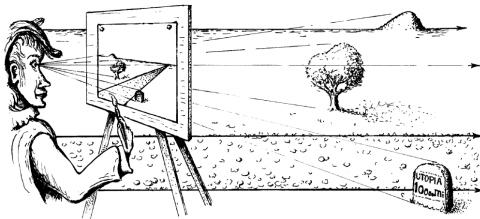
Z (a) plyne $(A_1 B_1 C) = \boxed{}$, resp. $(A_2 B_2 C') = \boxed{}$.

Ze žluté podobnosti plyne $\boxed{}$, a tedy

$$(AB|CD) = (A'B'|C'D').$$

Obecná afinní zobrazení fungují v rovině, resp. prostoru.

Při osové kolineaci či středovém promítání některé body obraz, jiné vzor; resp. jsou „“:



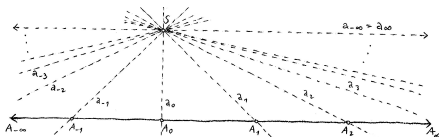
... to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor :

Eukleidovský prostor rozšířený o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* prostor.

Původní body jmenujeme *vlastní*, ty nové pak *nevlastní*.

Přesněji, body rozšířeného prostoru (A_i) ztotožňujeme s přímkami (a_i) procházejícími nějakým externím bodem (S):



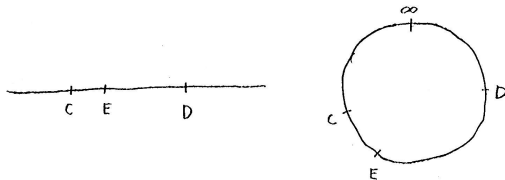
Vlastní body odpovídají , nevlastní body s původním (nerozšířeným) prostorem.

Tedy:

- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má nevlastní bod,
- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má nevlastních bodů.
- ▶ Každé dvě přímky v projektivní rovině se .⁷⁴
- ▶ Atd.

⁷⁴Rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě, různoběžky ve vlastním.

- ▶ Projektivní přímka je .
- ▶ Projektivní přímka projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.⁷⁵
- ▶ Uspořádání bodů na projektivní přímce valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

⁷⁵Vzpomeňte na diskuzi kolem věty o vnějším úhlu v trojúhelníku (s. 11).

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

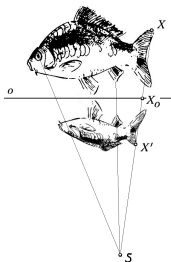
Co to je? Transformace **projektivní** roviny.

Čím je určena? Přímkou o , bodem S a nenulovým reálným číslem m .⁷⁶

Jak je určena? Obraz A' lib. bodu A leží na přímce SA , a to tak, že



kde $A_o =$ průsečík AA' s osou o .

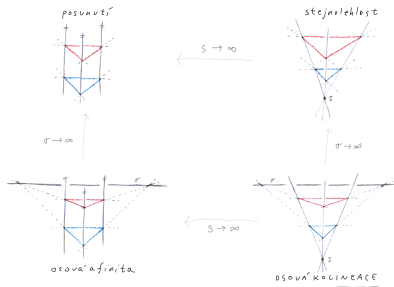


Jaké má vlastnosti? Transformace s přímkou pevných bodů,
základní projektivní transformace v rovině, ...

⁷⁶tzv. osa, střed a modul

Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- ▶ *osová afinita*, pokud S je ,
- ▶ *stejnolehlost*, pokud o je ,
- ▶ *posunutí*, pokud S i o jsou .

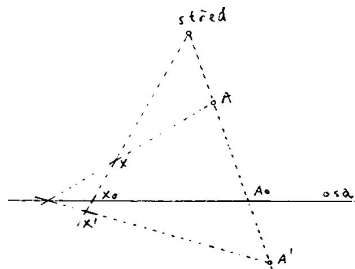


Pokud bychom připustili $m = 0$, dostaneme degenerované (neinjektivní) případy:

- ▶ *středové promítání* do přímky o z bodu S .
- ▶ *rovnoběžné promítání* do přímky o , pokud S je .

Osová kolineace zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



Důkaz.

Plyne z definice a z ...



Osová kolíneace s osou o , středem S a modulem m :

- (d) zobrazuje přímku p do sebe, právě když nebo ,
- (e) je involutivní, právě když $m =$.

Poznámky

- (f) smysl (globálně) řešit zda je přímé/nepřímé,
- (g) smysl (globálně) řešit změny obsahů.

Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) z předchozí strany.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

Poznámky

Základní vlastnosti (a) a (b) nejsou zcela nezávislé.

Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) (b)...⁷⁷

⁷⁷... viz základní větu projektivní geometrie a její důsledky (za rok)!

Analogicky k předchozím případům máme:

Věta

Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše osových kolineací.

Důkaz.

Myšlenka důkazu je , volnost v realizaci □

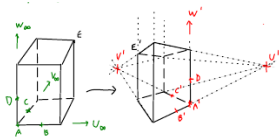
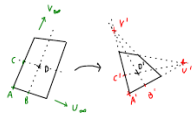
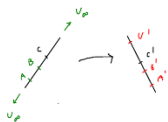
... také proto je osová kolineace základní kolineací v rovině.

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b),

- ▶ tj. obrazy různých bodů,
- ▶ tedy např. obrazy různých vlastních bodů a úběžníkem...

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- ▶ obrazy bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- ▶ nebo obrazy vlastních bodů v obecné poloze a odpovídajícími úběžníky...



Věta

Prosté projektivní zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy

vlastních bodů v obecné poloze a odpovídajícími úběžníky.

Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí a přenášení

Každé afinní zobrazení je projektivní.

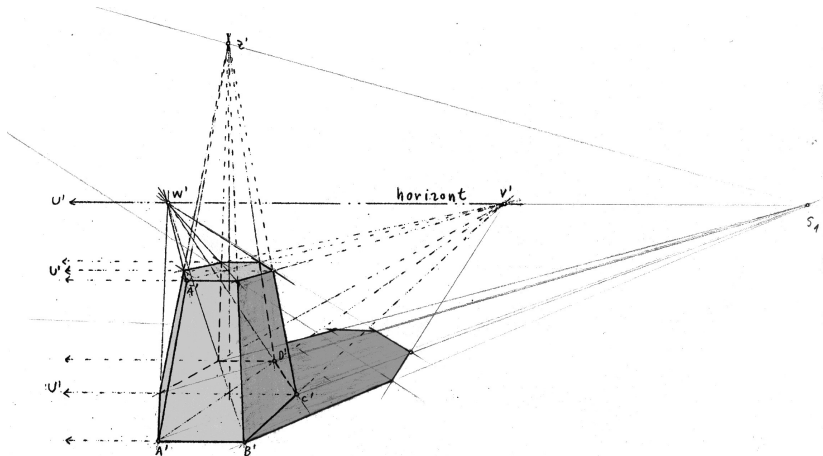
Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je .

3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je
středové promítání do ...

Obecné projektivní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ být prosté (injektivní).



Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín...

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Dilatace a kontaktní zobrazení	102
Kruhová inverze a konformní zobrazení	105
Souměrnosti a shodná zobrazení	122
Stejnolehlost a podobná zobrazení	128
Osová afinita a afinní zobrazení	137
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	147
Osová kolineace a projektivní zobrazení	160
Shrnutí a přehledy	170
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo⁷⁹

- ▶ *osu* = přímku
- ▶ *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je

Osa nebo střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní (s. 162).

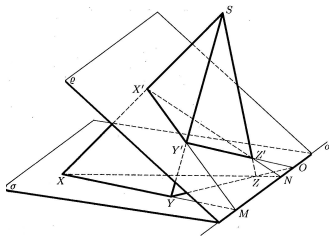
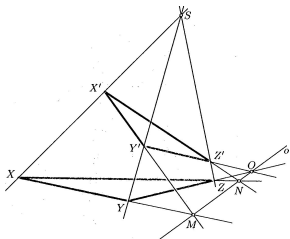
Z Desarguesovy věty (s. 172) vyplývá, že

- ▶ *projektivní transformace v rovině má osu* *má střed!*

⁷⁹<https://ggbm.at/az7e9qsC>

Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí:
 přímky XX' , YY' , ZZ' prochází jedním bodem \iff průsečíky přímek XY
 a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.⁸⁰

⁸⁰Elementární zdůvodnění problematické; jiný přístup (a zobecnění) za rok...

střed S	osa o	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(středové promítání do přímky) projektivní elace harmonická souměrnost osová kolineace
nevlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(rovnoběžné promítání do přímky) elace šikmá, resp. osová souměrnost osová afinita
vlastní	nevlastní	ne ne ne ne	0 1 -1 jinak	(promítání do bodu) identita středová souměrnost stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

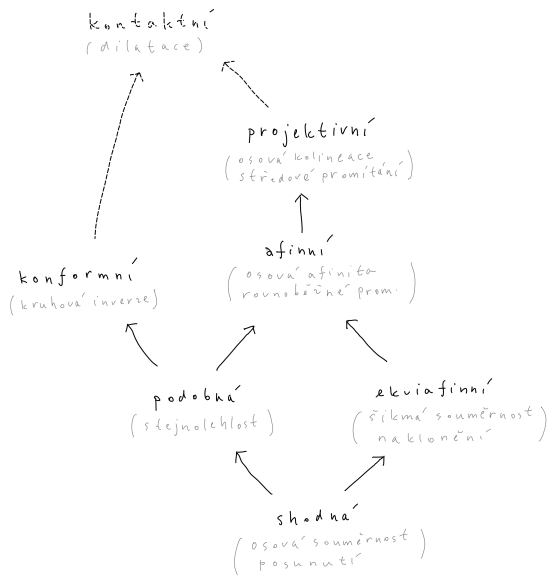
Transformace je involutivní \iff modul = .

(Degenerované případy \iff modul =)

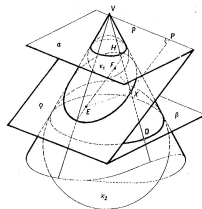
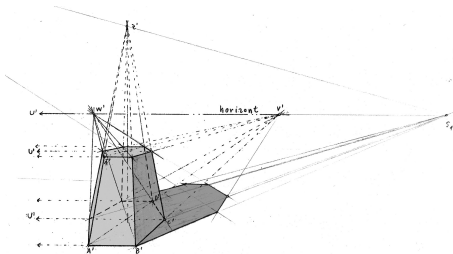
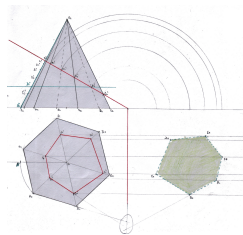
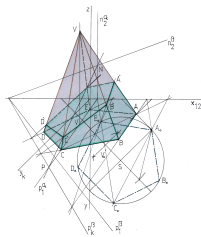
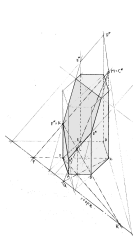
Pro afinní transformace: přímá \iff modul , nepřímá \iff modul .

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	-	-	+	-	-	-
afinní	+	-	+	+	+	-	-
ekviafinní	+	-	+	+	+	+	-
podobná	+	-	+	+	+	-	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	-	-	-	-	-	-	+

- ▶ Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je .
- ▶ Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je .
- ▶ Konformní zobrazení, které je projektivní, je .
- ▶ Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je .



Mnoho základních zobrazení můžeme (resp.) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů:



Podle způsobu promítání dělíme na:

- ▶ středové,
- ▶ rovnoběžné,
- ▶ exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- ▶ volné,⁸¹
- ▶ vázané,⁸²
- ▶ vychytané,⁸³
- ▶ analytické,⁸⁴
- ▶ exotické⁸⁵.

⁸¹... takto jsme to dělali dosud,

⁸²za chvíli,

⁸³za chvíli,

⁸⁴takto budeme dělat příští rok,

⁸⁵pro zajímavost...

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Volně	178
Vázaně	182
Analyticky	186
Exoticky	189
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Středové promítání (projekce) je modelové *projektivní* zobrazení:

- (i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.⁸⁶

Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání je *afinní* zobrazení, navíc tedy

- (iii) zachovává rovnoběžnost přímek,
- (iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.⁸⁷

⁸⁶... kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé)

⁸⁷... kdykoli to dává smysl...

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

Věta

„Nepříliš degenerované“

- (a) *afinní,*
- (b) *projektivní*

zobrazení prostoru dimenze n je jednoznačně určeno obrazy

- (a) *bodů v obecné poloze,*
- (b) *bodů v obecné poloze a odpovídajícími úběžníky.*

Základní konstrukce jsou:

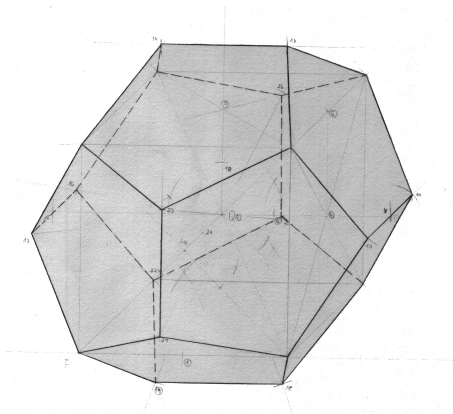
- (a) a přenášení ,
- (b) a přenášení .

Poznámka

V předpokladu věty tušíme jistý zádrhel:

Jak sestavit obraz bodu v „souřadné rovině“, která se zobrazuje do přímky?

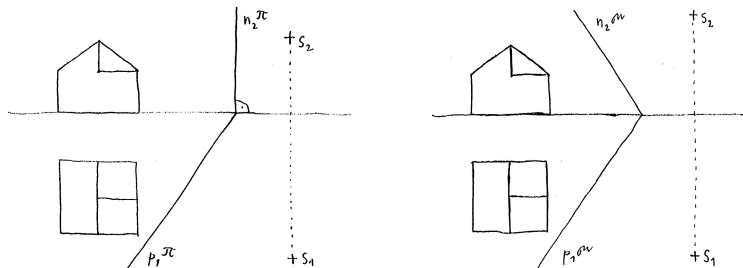
... pomocí vepsané krychle (podle s. 83):



Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Volně	178
Vázaně	182
Analyticky	186
Exoticky	189
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými *sduženými* průměty (nárys, půdorys):

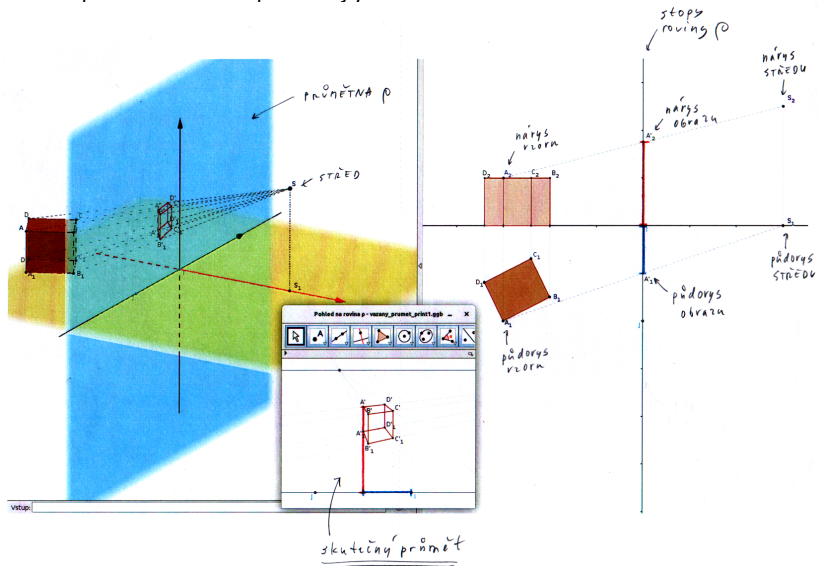


Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady!

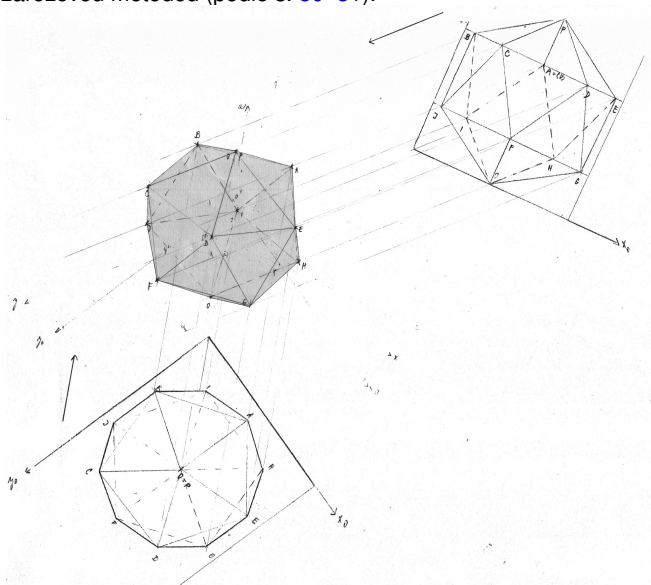
Základní konstrukční dovednosti jsou:

- ▶ přímky a roviny,
- ▶ odměřování a přenášení

... do speciálně zvolené průmětny ρ :

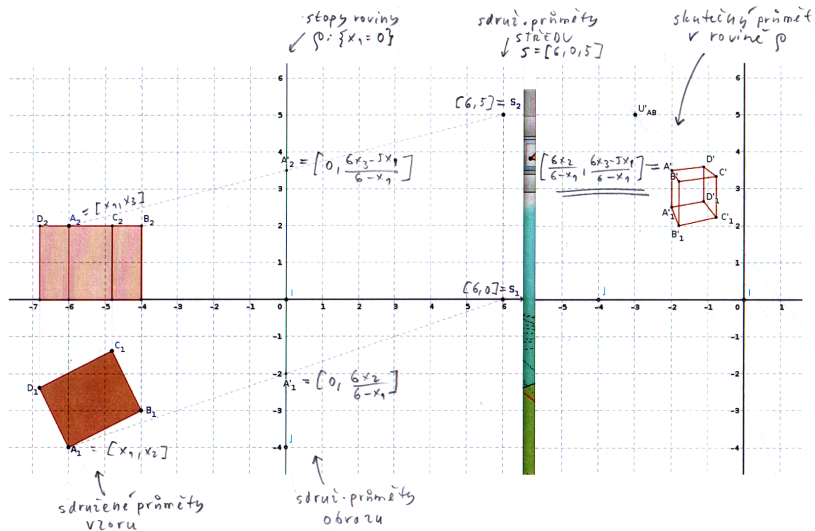


... tzv. zářezovou metodou (podle s. 80–81):



Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Volně	178
Vázaně	182
Analyticky	186
Exoticky	189
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

... vzhledem k naznačené souřadné soustavě:



Středové promítání ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{x_1 = 0\}$

- ▶ v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3-5x_1}{6-x_1} \right],$$

- ▶ v *homogenních* (rozšířených) souřadnicích:

$$(\underline{x}_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\underline{6x_0 - x_1} : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$



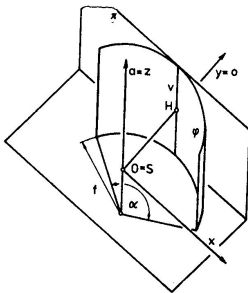
Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... viz základní větu projektivní geometrie (za rok)!

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Volně	178
Vázaně	182
Analyticky	186
Exoticky	189
Závěrečné shrnutí	195
Zdroje	201

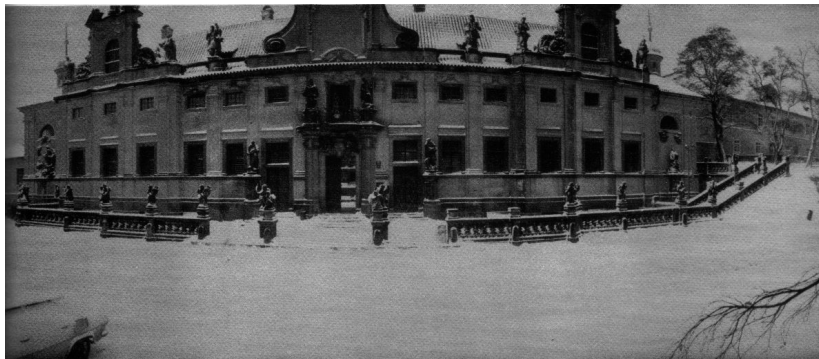
Dosud jsme uvažovali toliko zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- ▶ středového promítání na válcovou plochu
- ▶ a rozvinutí této plochy do roviny.



Některé přímky se zobrazují jako přímky, většina však ne...

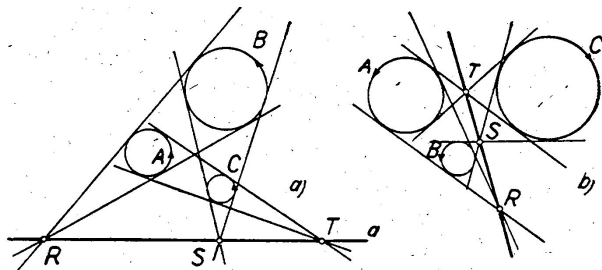
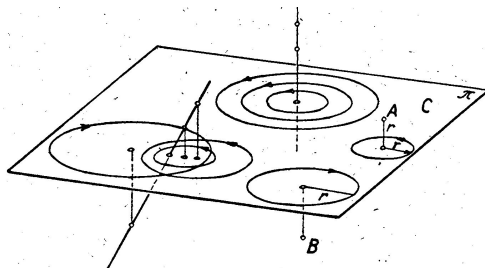
Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

- ▶ souřadnicemi $A = [x_1, x_2, x_3]$,
- ▶ sdruženými průměty, tj. půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a nárysem $A_2 = [x_1, x_3]$,
- ▶ volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.⁸⁹

Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

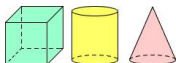
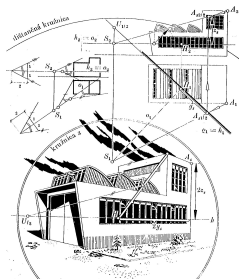
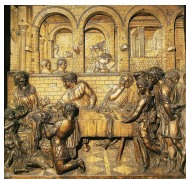
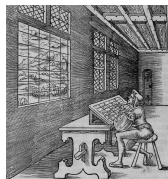
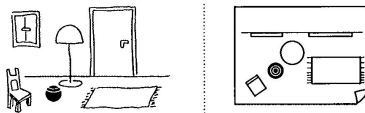
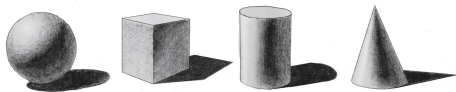
- ▶ půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a kótou (= souřadnicí x_3) \rightsquigarrow ,
- ▶ půdorysem $A_1 = [x_1, x_2]$ a cyklem (= kružnicí s poloměrem $|x_3|$ a orientací podle znaménka x_3) \rightsquigarrow

⁸⁹vrchol hranolu apod.



⁹⁰Co nám tohle jenom připomíná a k čemu by to mohlo být dobré? (viz s. 133)

Se zobrazováním prostoru do roviny mohou — — být problémy:



Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Klasická konstrukční geometrie	195
Zobrazení	198
Zdroje	201

Úvod (s. 5–8)

- ▶ primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- ▶ axiómy vyslovené, nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

Planimetrie (s. 9–70)

- ▶ základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- ▶ důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Eukl. věty o odvěsně/výšce)
- ▶ geometrická algebra (zlatý řez apod.)
- ▶ o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- ▶ pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, ...)
- ▶ teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

Sestrojitelné veličiny (s. 27–33)

- ▶ úplná charakterizace (+ - · : $\sqrt{\quad}$)
- ▶ slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

Stereometrie (s. 72–84)

- ▶ rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- ▶ analogie, resp. rozdíly k 2D (rovnoběžnostěny, resp. jehlany)
- ▶ pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20)

Dotykové úlohy (s. 87–100)

- ▶ základní úlohy (tečny)
- ▶ základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnolehlost, dilatace)
- ▶ základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

Užitek (s. 20, 43, 55, 85, 101)

- ▶ kvadratura mnohoúhelníku
- ▶ kvadratické rovnice a jejich řešení
- ▶ pravidelný 5úhelník apod.
- ▶ specifické dotykové úlohy
- ▶ celkový přehled

Základy	4
Dotykové úlohy	86
Geometrická zobrazení	102
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	177
Závěrečné shrnutí	195
Klasická konstrukční geometrie	195
Zobrazení	198
Zdroje	201

Taxonomie

- ▶ hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní) (s. 121–168)
- ▶ další typy (konformní, kontaktní) (s. 106–120)
- ▶ příklady, obecné vlastnosti a hierarchie (s. 171–175)

Obecný rámec (s. 148–168)

- ▶ projektivní rozšíření
- ▶ Pappova věta
- ▶ věta o určenosti

Základní příklady (s. 173, 179)

- ▶ regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- ▶ singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

Zobrazování prostoru do roviny (s. 177–193)

- ▶ podle promítání: středové (\implies projektivní), rovnoběžné (\implies afinní)
- ▶ podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina), ...
- ▶ základní úlohy (přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů)
- ▶ vychytávky (otočení roviny, zářezová metoda apod.)

Užitek (s. 115–120, 146, 176, 194)

- ▶ obecná Apollóniova úloha
- ▶ obecné průměty pravidelných a jiných těles
- ▶ řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti
- ▶ celkový přehled

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [DV] L. Drs, J. Všetečka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [EB] *The Elements of Euclid*, obrázkové vydání od O. Byrneho, 1847,⁹¹
- [EJ] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heath, 1908–1998,⁹²
- [EV] *Eukleidés, Základy*, české vydání podle překladu F. Servíta, 1907–2012,⁹³
- [H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996
- [M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962
- [P] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954

⁹¹<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>

⁹²<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

⁹³https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides_Servit.pdf

[A], 1, 6, 9, 10, 24–26, 32, 37–40, 42, 45, 47, 60–62, 69, 74, 80–83, 132

[DV], 191, 192

[EB], 11–14, 18, 19, 52, 59, 63

[EJ], 35, 58, 65–67, 72, 87, 91

[EV], 16, 17

[H], 31, 46, 49, 54, 106, 108, 110–113

[K], 101, 133, 139, 177

[M], 195

[P], 43

Escher, M.C., 128

Fryštáková, M., 55

Kutuzov, B.V., 194

Mišejková, B., 186

Nedvědová, K., 20

Němcová, Ž., 177

Penrose, R., 158

Pokorný, A., 128

Sekora, O., 124

Vachutková, T., 182

Velebová, I., 177

<http://caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/>, 84

<http://divisbyzero.com/>, 55

<http://en.wikipedia.org/>, 195

<http://etc.usf.edu/clipart/>, 33, 73, 88

<http://mathworld.wolfram.com/>, 98

<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/>, 195

<http://thedisorderofthings.files.wordpress.com/>, 195

<http://wellcomecollection.org/>, 195

<http://wikipedia.org/>, 64, 79

<http://www.daviddarling.info/encyclopedia/>, 137

<http://www.myddoa.com/feast-of-herod-donatello/>, 195