přednáška 03: další pravidla pro výpočet pstí: věta o součtu pstí, věta o součinu pstí, podmíněná pst

Jeden princip součtu je třetím axiomem v definici psti, a sice pro neslučitelné jevy:

Axiom 3: $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ pro navzájem neslučitelné jevy

(axiom součtu pravděpodobností konečně mnoha nebo nekonečně mnoha neslučitelných jevů)

- Musíme se ovšem zabývat ještě situací, kdy jevy A_i NEJSOU neslučitelné, tj. nějaké elementární výsledky experimentu leží v jejich průniku

Začněme obecnou situací dvou jevů:

Větička 3: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ pro libov. $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Důkaz: Pokud existují nějaké prvky v průniku obou množin, lze sjednocení $A_1 \cup A_2$ rozložit na tři disjunktní podmnožiny: $A_1 - A_2$, $A_2 - A_1$ a $A_1 \cap A_2$.

- Pak podle axiomu 3 platí:

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1)$ (ax. 3 pro tři disjmnožiny)

$P(A_1) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2)$ (ax. 3 pro dvě disjunktní množiny)

$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1)$ (ax. 3 pro dvě disjunktní množiny

Dosazením těchto tří vztahů do levé a právě strany rovnice ve větičce 3 vidíme:

$L = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1)$

$P = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) +$
$+ P(A_2 - A_1) - P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 - A_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_2 - A_1)$

Obě strany se rovnají, tvrzení platí.

Lze dozákat větu o psti sjednocení n jevů (otázka č. 11):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) -$$

$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) +$$

$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) -$$

$$\ldots$$

- $$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n)$$

pro libov. náhodné jevy $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{A}$.

(této větě se říká věta o součtu psti)

Lze dozákat větu o psti sjednocení n jevů (otázka č. 11):

a) *Důkaz pro 3 jevy: jeden obrázek*

b) *Důkaz pro 4 jevy: viz jeden obrázek, kde vzniká hvězdice vzájemných průniků každých tří množin … ale tento obrázek je zkreslený (protože budí zdání, jako by průniky dvojic množin byly čtyři, ale ono jejich šest), vhodný obrázek by byl čtyři koule se středy ve vrcholech čtyřstěnu … Vennovy diagramy zde selhávají, důkaz by byl veden pomocí charakteristického obecného prvku x*

Příklad: Elektrikář vytiskl štítky na zvonky domy se 4 byty a zapojuje je náhodně, protože jeho parťák onemocněl

Jaká je pst, že

a) Všechny zvonky zapojí ke správným bytům

b) Aspoň jeden zvonek zapojí správně?

c) Žádný zvonek nezapojí správně?

- A_1 ... zvonek k bytu č. 1 bude zapojen správně
  A_2 ... zvonek k bytu č. 2 bude zapojen správně
  A_3 ... zvonek k bytu č. 3 bude zapojen správně
  A_4 ... zvonek k bytu č. 4 bude zapojen správně

Řešení: všech možných připojení zvonků k bytům je …

(řešíme pomocí modelu klasické psti … každá varianta připojení zvonků je stejně pravděpodobná)

- a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{} =$

Řešení: všech možných připojení zvonků k bytům je 24

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{24} = 0{,}04166666\ldots$

b) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) -$

- $- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_3 \cap A_4) +$

$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \ + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$

$= \frac{1}{24}(\ \ldots\ )$

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{24} = 0{,}04166666...$

b) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4) -$

$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \dots - P(A_3 \cap A_4) +$

$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$

$= \frac{1}{24}(3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! + 1+1+1+1-1) = 0{,}625$

Jaká je pst, že

a) Všechny zvonky zapojí ke správným bytům

b) Aspoň jeden zvonek zapojí správně?

c) Žádný zvonek nezapojí správně?

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$$

Otázka 12: Stochastická nezávislost jevů

stocazomai = tuším, domnívám se, odhaduji

stocastikoj = důvtipný, bystý (o lidech)

stocastikoj = odhadovaný, náhodný

Stochastické metody = odhadové metody, přibližné metody

Definice: (Králová, Budíková, Maroš, str. 59)

jevy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}$ se naz. stochasticky nezávislé, když

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

jevy $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{A}$ se naz stochasticky nezávislé, když

(i) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ pro $1 \leq i < j \leq n$

(ii) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k)$ pro $1 \leq i < j < k \leq n$

(iii) …

(iv) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

(tedy ověřujeme celkem $2^n - n - 1$ vztahů)

Příklad: Házíme dva hody mincí, padá líc nebo rub

A … v prvním hodu padne líc

B … ve druhém hodu padne rub

C … v obou hodech padne stejná strana

Ověřte, zda jsou jevy A, B, C stochasticky nezávislé

$\Omega=\{LL, LR, RL, RR\}$ ... všechny element výsl nastávají stejně často

A ... v prvním hodu padne líc

$A=\{LL, LR\}$

B ... ve druhém hodu padne rub

$B=\{LR, RR\}$

C ... v obou hodech padne stejná strana

$C=\{LL, RR\}$

Máme ověřit čtyři vztahy:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ $\qquad$???????????????

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ $\qquad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ $\qquad 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... not OK

Tj jevy A, B, C nejsou stochasticky nezávislé

(závislost je ukryta až při interakci všech tří jevů)

Další příklad: Házíme čtyřstěnem; jsou náhodné jevy R,G,B stochasticky nezávislé?

stěna A … obarvena červeně
stěna B … obarvena zeleně
stěna C … obarvena modře
stěna D … obarvena část červeně, část zeleně, část modře

- R … padne aspoň část stěny červené ….. R $=\{A,D\}$
- G … padne aspoň část stěny zelené …. G $=\{B,D\}$
- B … padne aspoň část stěny modré ….. B $=\{C\ D\}$

$$\Omega=\{A,B,C,D\}$$

Máme ověřit čtyři vztahy:

$P(R \cap G) = P(R) \cdot P(G)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ … OK

$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ … OK

$P(G \cap B) = P(G) \cdot P(B)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ … OK

$P(R \cap G \cap B) = P(R) \cdot P(G) \cdot P(B)$ $\quad$???????????????

$P(R \cap G) = P(R) \cdot P(G)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

$P(G \cap B) = P(G) \cdot P(B)$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... OK

- $P(R \cap G \cap B) = P(R) \cdot P(G) \cdot P(B)$ $\quad \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ... not OK

Tj jevy A, B, C nejsou stochasticky nezávislé

(závislost je ukryta až při interakci všech tří jevů)

Otázka 13: podmíněná pst (označení i vzorec jsou vysvětleny na příkladu)

Příklad: Uvažujme situaci, kdy zásilkový prodejce vyřizuje objednávky zboží telefonicky, emailem nebo formulářem při osobním odběru

T … objednávka bude se děje telefonicky

E … objednávka se děje emailem

F … objednávka se děje formulářem při osobním odběru

M … objednávka je malá

S … objednávka je střední

V … objednávka je velká

H … objednávka je prioritní, HIGH PRIORITY

Jsou známa následující data z letošního roku:

Typ obj.	Malá obj.	Střední obj.	Velká obj.	Prior. obj	celkem
Telefon	1021	216	109	14	1360
Email	86	371	308	49	814
Formulář	1497	230	86	13	1826
celkem	2604	817	503	76	4000

Dvě otázky v tomto příkladu:

a) Právě volá zákazník, který si chce objednat zboží. S jakou pstí bude jeho objednávka prioritní?

b) Referentka řekla, že právě vyřídila prioritní objednávku. S jakou pstí ji vyřizovala se zákazníkem telefonicky?

Charakter otázek:

1. Je nám známá část informace – víme, že nastal jev V (podmínka)
2. Situace ještě stále obsahuje náhodnost – nevíme, zda nastal N

Chceme spočítat tzv. podmíněnou pst $P(N \mid V)$ ... pst výskytu jevu N, pokud je známo, že nastala situace V (obr. ... $N \subseteq V$)

Odpověď na první otázku:

Vzorec: $P(N|V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)}$ ... platí, pokud jev V má nenulovou pst

a) Právě volá zákazník, který si chce objednat zboží. S jakou pstí bude jeho objednávka prioritní?

Máme počítat P(H|T) ... pst, že objednávka je prioritní, pokud víme, že k ní došlo telefonicky: $P(H|T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{14}{1360} \doteq 0{,}0103$

Odpověď na druhou otázku:

Vzorec: $P(N|V) = \frac{P(N \cap V)}{P(V)}$ … platí, pokud jev V má nenulovou pst

- b) Referentka řekla, že právě vyřídila prioritní objednávku. S jakou pstí ji vyřizovala se zákazníkem telefonicky?

Máme počítat P(T|H) … pst, že objednávka je telefonická, pokud víme, že je HIGH priority: $P(T|H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \frac{14}{76} \doteq 0{,}1842$

Otázka č. 14: věta o součinu pstí

Ze vzorce pro podmíněnou pst plyne: P(V ∩ N)=P(V)·P(N | V)

Obecně pro n jevů (věta o součinu pstí):

- Pokud $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ (tj. jmenovatel posledního člene v následující rovnosti je nenulový), tak platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{n-1})$$

Příklad: Ze sady 100 výrobků je 10 zmetků. Při kontrole jakosti vybereme náhodně tři výrobky z této sady.

a) Určete pst, že první dva výrobky budou kvalitní a třetí bude zmetek (tj. záleží na pořadí zmetku). Jen tato část a) se týká podmíněné psti, naučte se v této ot.ázce 14 jen tu.
b) Určete pst, že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek. Nezáleží na pořadí zmetku. Počítejte podle věty o součinu.
c) Totéž jako b), ale počítejte pomocí klasické psti (tak nějak najednou, když nezáleží na pořadí).
d) Určete pst, že druhý výrobek bude vybrán kvalitní, bez ohledu na to, jaký byl vytažen poprvé (nevíme, jaký byl vytažen poprvé)

Příklad: Ze sady 100 výrobků je 10 zmetků. Při kontrole jakosti vybereme náhodně tři výrobky z této sady.

a) Určete pst, že první dva výrobky budou kvalitní a třetí bude zmetek (tj. záleží na pořadí zmetku).

- K_1 … první vybraný výrobek bude kvalitní

K_2 … druhý vybraný výrobek bude kvalitní

$\overline{K_3}$ … třetí vybraný výrobek bude zmetek

$P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) = P(K_1) \cdot P(K_2 \mid K_1) \cdot P(\overline{K_3} \mid K_1 \cap K_2) = \ldots$

a) Určete pst, že první dva výrobky budou kvalitní a třetí bude zmetek (tj. záleží na pořadí zmetku).

K_1 … první vybraný výrobek bude kvalitní

K_2 … druhý vybraný výrobek bude kvalitní

$\overline{K_3}$ … třetí vybraný výrobek bude zmetek

$$P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) = P(K_1) \cdot P(K_2 \mid K_1) \cdot P(\overline{K_3} \mid K_1 \cap K_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} \doteq 0{,}0826$$

b) Určete pst (jevu B), že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek. Nezáleží na pořadí zmetku.

$P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) + P(K_1 \cap \overline{K_2} \cap K_3) + P(\overline{K_1} \cap K_2 \cap K_3) = \ldots$

b) Určete pst, že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek. Nezáleží na pořadí zmetku.

$$P(K_1 \cap K_2 \cap \overline{K_3}) + P(K_1 \cap \overline{K_2} \cap K_3) + P(\overline{K_1} \cap K_2 \cap K_3) =$$

$$= \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{10}{98} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{89}{98} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \cdot \frac{89}{98} \doteq 0{,}2478$$

Některé příklady lze řešit i více způsoby:

- c) Totéž jako b): Určete pst, že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek, ale počítejte pomocí klasické psti (tak nějak najednou, když nezáleží na pořadí).

$P(B) = \frac{?}{??}$

- c) Totéž jako b): Určete pst, že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek, ale počítejte pomocí klasické psti (tak nějak najednou, když nezáleží na pořadí).

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{??}{???}$$

c) Totéž jako b): Určete pst, že ze tří vybraných výrobků budou dva kvalitní a jeden zmetek, ale počítejte pomocí klasické psti (tak nějak najednou, když nezáleží na pořadí).

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} \doteq 0{,}2478$ ... stejný výsledek!!

d) Určete pst, že druhý výrobek bude vybrán kvalitní, bez ohledu na to, jaký byl vytažen poprvé

$P(K_2) = P(K_1 K_2) + P(\overline{K_1} K_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} + \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} \doteq 0{,}9$ ... paradox!!

(bez ohledu na pořadí tahaného výrobku – pst, že vytáhneme výrobek kvalitní, je pořád stejná a rovná $\frac{90}{100}$)

Rekapitulace otázek – přednáška 3:

11. Věta o součtu pstí.
12. Stochasticky nezávislé jevy.
13. Podmíněná pst
14. Věta o součinu pstí