Algebra 2 (MA 0005)

RNDr. Břetislav Fajmon, Ph.D.

KATEDRA MATEMATIKY PEDF MUNI, BRNO – verze 2021

Obsah

Úvod

Tento text je psán jako doplněk přednášky a návrh koordinace výuky v předmětu Algebra 2 na Pedagogické fakultě MU Brno, Katedra matematiky. Závěrečný seznam otázek k ústní části zkoušky bude ještě upraven podle odučeného obsahu.

Předmět Algebra 2 (MA0005) je jakýmsi předběžným, algebraickým pohledem na geometrii. Dobrým předpokladem je absolvování předmětu Repetitorium středoškolské matematiky 2 (tj. MA0015), návazným předmětem na Algebru 2 bude Geometrie 2 (tj. MA0009).

Rád bych zde poděkoval studentce Janě Vyvialové, která pečlivě přepsala více než polovinu mého rukopisu v sázecím prostředí TEX, a tak uspíšila existenci první verze tohoto textu určitě o několik let.

Přesto text není zcela dokončen v části cvičení – jsou zde návrhy některých příkladů, ale celková koordinace a obsah cvičení je plně v kompetenci cvičících, kteří poskytnou studentům své vlastní materiály.

Břetislav Fajmon, verze září 2021

1 Týden 1

1.1 Cvičení 1: Analytická geometrie v rovině

Obecné informace ke cvičení v první polovině semestru:

Jako přednášející očekávám, že prvních 5 cvičení bude pojato jako samostatný úvod do analytické geometrie, nezávislý na přednášce. V rámci těchto pěti týdnů by se ovšem studenti mohli trochu seznámit s Gaussovou eliminací (tři různé situace počtu řešení – viz 1. přednáška) jako součást některých úloh .... Např. úloha určit vzájemnou polohu tří rovin v prostoru vede na SLR (= systém lineárních rovnic).

Zhruba plán prvních pěti cvičení[1]: Cvičení 1-2 ... vektory v rovině, cvičení 3-4 ... vektory v prostoru, cvičení 5 ... skalární a vektorový součin.

V předmětu jsou předepsány dvě prověrky po 20 bodech, z nichž každou by studenti měli splnit na 60 procent = 12 bodů. Nabízím na jejich první termín prostor přednášky v učebně 1 v šestém a třináctém týdnu semestru.

Návrh obsahu cvičení 1:

- Petáková 13.1: Kartézská soustava souřadnic v aritmetickém vektorovém prostoru R^n, pojem vektoru a jeho souřadnice (zatím pouze středoškolsky) – příklady 3,4.
- Petáková 13.2: sčítání a odčítání vektorů, násobek vektoru – příklady 5, 6a, 7a.
- Petáková 13.3: Lineární kombinace vektorů: příklady 8,9,10,12. U př. 9 se už řeší systém lineárních rovnic (SLR) – lze nechat ještě na později, až po cvičení 2, kde se budou řešit dvě rovnice o dvou neznámých (a začněte něco o přímce, ze cvičení 2).
- Petáková 13.4: lze přeskočit-vynechat, protože zjišťování, zda jsou nějaké vektory nezávislé, budou studenti spíše dělat tak, že je vloží do řádků matice a upraví matici na schodový tvar. Můžete na př. 15 vysvětlit pojem lineární závislosti, ale také lze nechat do foroty jako začátek složitějších příkladů ve druhé polovině semestru.

Poznámka: pokuste se prosím co nejvíce zapisovat vektory sloupcově, začne to hrát roli u parametrických rovnic přímky či roviny, a ve druhé polovině semestru u lineárních zobrazení reprezentovaných maticí – aby studenti dokázali ověřit, že součin vektoru a matice je proveditelný a navykli si na maticový zápis zobrazení. Důsledně bychom tak měli psát celý semestr, ovšem např. Horák sbírka používá též řádkový zápis vektorů.

[1] Nechám na cvičícím, pokud postupuje podle Petákové, zda bude chtít nejprve probrat geometrii v rovině, a pak geometrii v prostoru. Např. Petáková 13.1, příklad 3 je v rovině, příklad 4 v prostoru

1.2 Přednáška 1: Determinant a jeho vlastnosti, Cramerovo pravidlo

Algebra je věda o řešení rovnic a speciálně Algebra 2 = lineární algebra se zabývá řešením systému lineárních rovnic. Začněme dvěma rovnicemi o dvou neznámých.

1. metoda - Cramerovo pravidlo - najde totální vzorec, který platí vždy:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 / \cdot a_{22}, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 / \cdot (-a_{12}). \end{aligned}$$

Vynásobme první rovnici číslem a_{22}, druhou číslem $(-a_{12})$ a obě rovnice sečtěme. Ve výsledné rovnici se vyruší neznámá x_2, a pak z ní vyjádříme x_1:

$$x_1 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}},$$

kde čitatel $b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}$ označíme jako $|A_1|$ a jmenovatel $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ označíme $|A|$.

Podobně provedeme násobení takovými konstantami, aby při sečtení obou rovnic vypadla neznámá x_1, a z výsledné rovnice pak vyjádříme x_2:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 &= b_1 / \cdot (-a_{21}), \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 &= b_2 / \cdot a_{11}. \end{aligned}$$

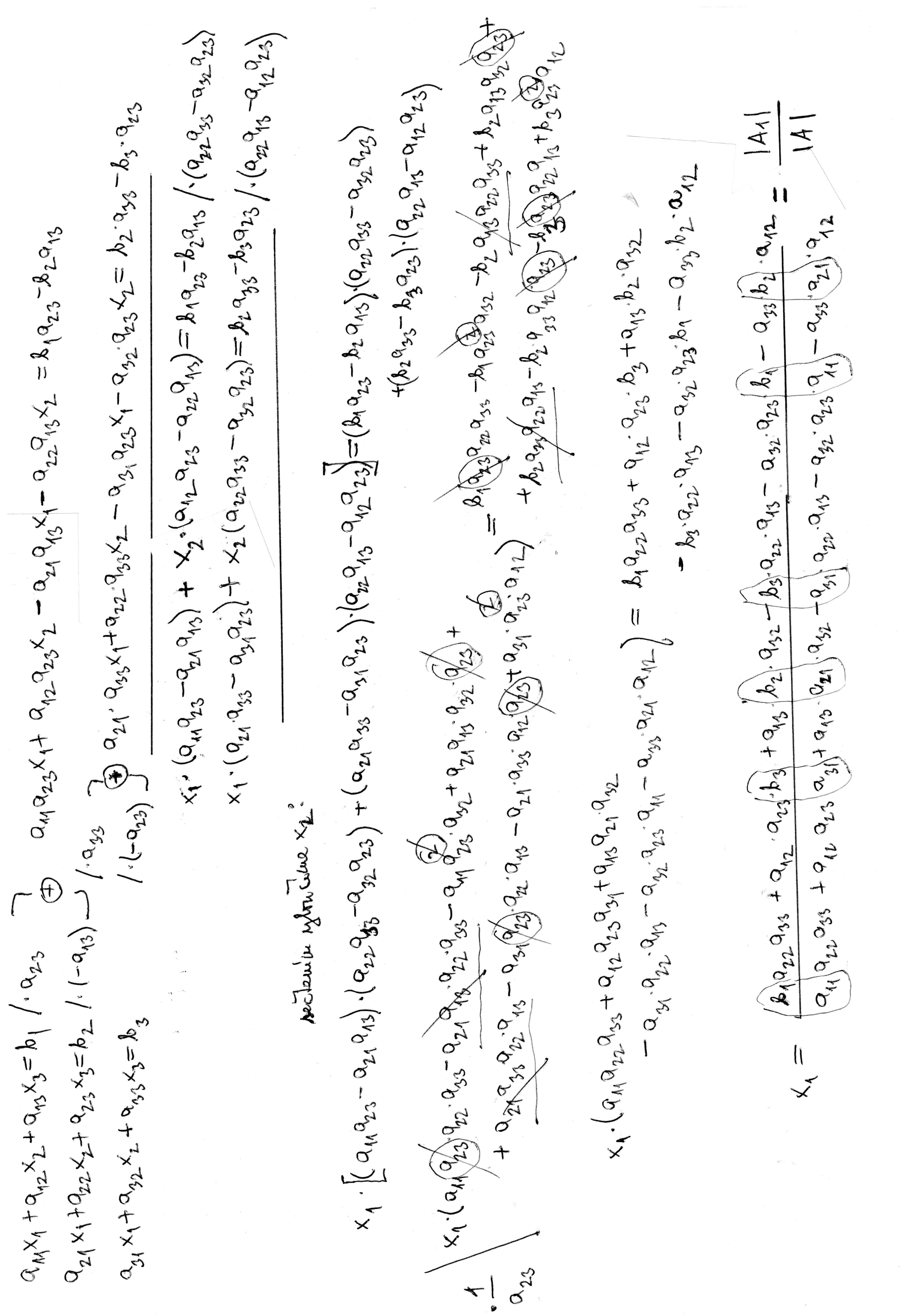
$$x_2 \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}},$$

kde čitatel $b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}$ označíme jako $|A_2|$ a jmenovatel $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ je opět $|A|$.

Podobné totální vzorce lze najít i pro systém tří lineárních rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 &= b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 &= b_2, \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_3 + a_{33} \cdot x_3 &= b_3. \end{aligned}$$



Zase násobíme rovnice čísly a sčítáme, proces je trochu složitější (viz obrázek): jedná se v podstatě o eliminaci proměnné x_3 z prvních dvou rovnic a ze druhé a třetí rovnice, dostaneme dvě rovnice – z nich eliminujeme další neznámou x_2, a výslednou rovnici pro neznámou x_1 ještě vydělíme a_{23}, protože jsme si všimli, že se vyskytuje ve všech sčítancích na obou stranách rovnice. Všimněte si, že ve výsledném zlomku se vyskytuje v čitateli b_i přesně na tom místě, kde ve jmenovateli se vyskytuje a_{i1} – to je přesně rozdíl mezi výpočtem $|A_1|$ a $|A|$. Kdybychom podobné odvození celé provedli tak, že jako poslední neznámá by nám zůstala x_2, respektive x_3, dostaneme tři vzorce:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},$$

kde

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{13}\cdot a_{31}-a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21} =$$

= výsledkem je číslo

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

(Determinanty $|A_1|, |A_2|, |A_3|$ se spočítají obdobným způsobem jako $|A|$, pouze j-tý sloupec $\vec{a_j}$matice A je nahrazen sloupcem pravých stran $\vec{b}$)

Poznámka: Všimněte si, že při výpočtu $|A|$ vytvářejí permutace indexů všechny prvky grupy $(S_3, \circ)$.

Definice 1 *Čtvercové nebo obdélníkové schéma čísel se nazývá* **matice typu** m/n*, kde* m *značí počet řádků a* n *počet sloupců matice.*

(Tedy A, A_1, A_2, A_3 jsou matice typu $3/3$ = matice řádu 3.)

Definice 2 Determinant čtvercové matice A *je číslo, které čtvercové matici přiřadíme podle vzorce*

$$|A| = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}^{n} (-1)^{\pi(j_1,j_2,\ldots,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,j_n}$$

(tj. suma přes všechny možné permutace $(j_1, j_2, ..., j_n)$ *sloupcových indexů z množiny* $1, 2, ..., n$*, v každém členu je* (-1) *umocněno na počet inverzí v dané permutaci.*

Součin n *prvků* $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ *je součin prvků vybraných ze čtvercové matice tak, aby z každého řádku a každého sloupce byl vybrán právě jeden činitel.*

Počet všech permutací = součinů = členů v dané sumě je právě $n!$*)*

Příklad 1 *Vyřešte Cramerovým pravidlem (metodou determinantů) systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ 3x_1 \qquad - 3x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení: Vypočteme jednotlivé determinanty:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1+6+0-0-(-9)-(-4) = 20 \\
|A_1| &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9+6+0-0-(-16)-(-9) = 40 \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{40}{20} = 2 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8+27+18-3-(-18)-72 = -20 \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-20}{20} = -1 \\
|A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3+48+0-0-12-(-27) = 60 \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{60}{20} = 3
\end{aligned}
$$

Poznámka: Slabina Cramerovy metody: Pokud $|A| = 0$, nelze metodu použít (nelze dělit nulou).

Příklad 2 *Pomocí Cramerovy metody determinantů vyřešte systém lineárních rovnic:*

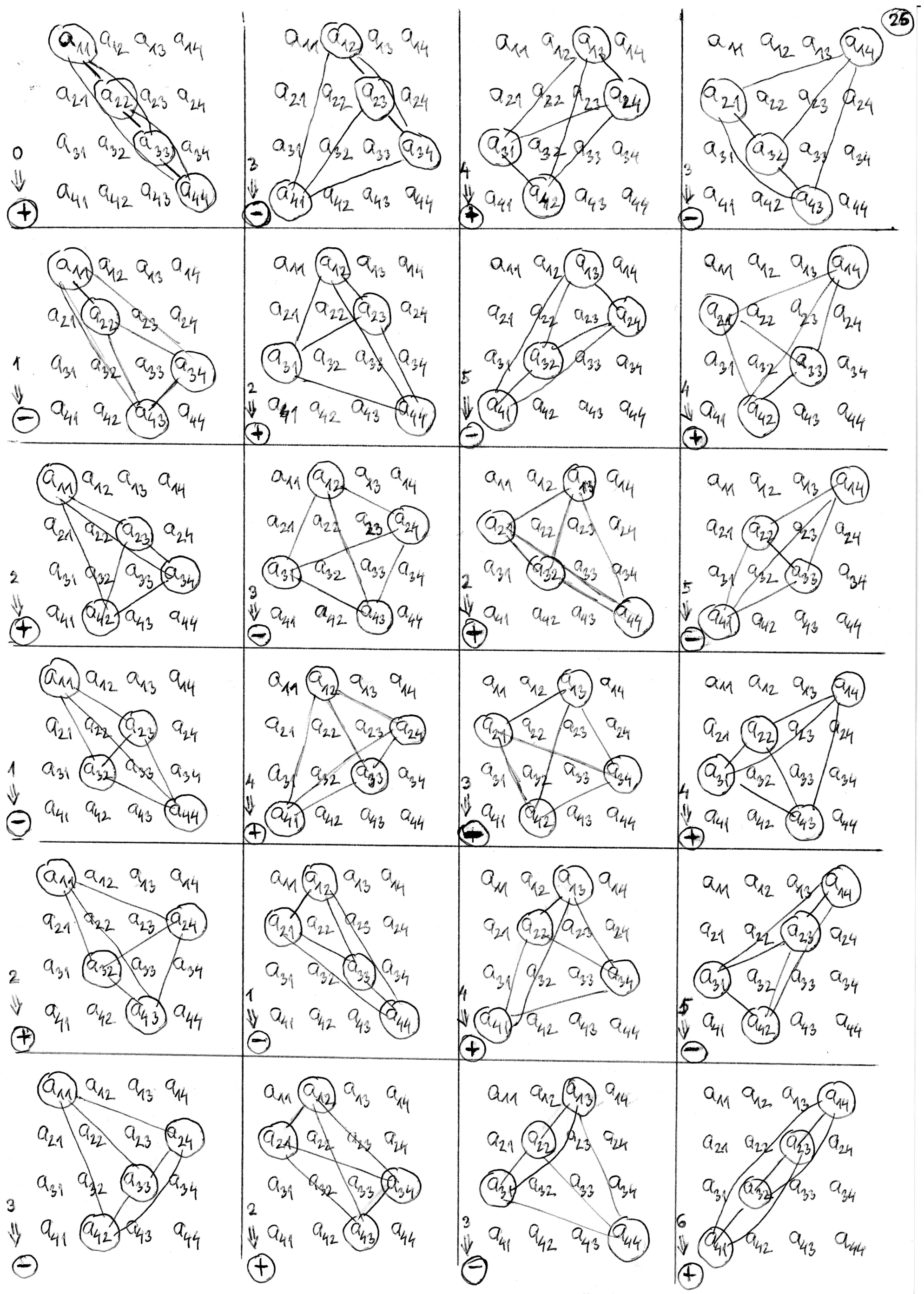
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1, \\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1, \\
x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3.
\end{aligned}
$$

Řešení: Napišme si nejdříve vzorec pro determinant čtvercové matice řádu 4:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44} +
$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{43} - a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{41} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44} - \\
&- a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{43} + a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{44} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43} + \\
&+ a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31} \cdot a_{42} - a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} + \\
&+ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{41} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{44} - a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{43} + a_{14} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \cdot a_{42} - \\
&- a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41} + a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot a_{43} - a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} + a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že v rozvoji determinantu řádu n se vyskytuje $n!$ sčítanců, protože ve čtvercové matici A existuje právě $n!$ možných výběrů n-tic prvků, kdy je v dané n-tici vybrán prvek v každém řádku i v každém sloupci:

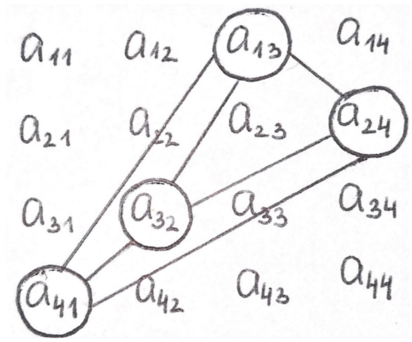


Vezměme si například součin $a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{32} \cdot a_{41}$. Znaménko před tímto součinem určíme:

a) Podle počtu inverzí v permutaci sloupců $(3, 4, 2, 1)$...inverze je vztah mezi dvěma prvky v daném pořadí, kdy větší prvek se vyskytuje před menším prvkem.

Musíme projít všech $\binom{n}{2}$ vztahů mezi dvojicemi prvků a zjišťujeme, že počet inverzí je 5, tj. znaménko je MÍNUS.

b) Z grafického nákresu:



Spojíme všechny dvojice dané zvolené n-tice, dostaneme $\binom{n}{2}$ spojů:

Větší sloupcový index stojí před menším v takové dvojici, kdy v reprezentaci grafu daná hrana má sklon zleva níže než doprava výše – takových sklonů je 5, tj. znaménko je MÍNUS.

(Hlavní diagonála: prvky $a_{11} - a_{44}$, vedlejší diagonála: prvky $a_{14} - a_{41}$. Inverze je určena sklonem příbuzným k vedlejší diagonále.)

Definice 3 *Hlavní diagonála čtvercové matice A je diagonála spojující prvky $a_{11} - a_{nn}$. Vedlejší diagonála čtvercové matice A je diagonála spojující prvky $a_{1n} - a_{n1}$.*

Definice 4 *Inverzi ve vztahu mezi dvěma prvky v permutaci určujeme:*

a) *Algebraicky: větší číslo se vyskytuje před menším;*

b) *Graficky: hrana spojující dané dva prvky v matici má sklon příbuzný vedlejší diagonále.*

Prozkoumání definice determinantu nás stále neuklidnilo, řešit příklad 2 výpočtem determinantu z definice je stále dosti komplikované.

Ve větě 2 se podíváme na některé další vlastnosti determinantu, které usnadňují jeho výpočet.

Věta 1 Cramerovo pravidlo: *Pokud platí, že $|A| \neq 0$ a $m = n$, tak:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

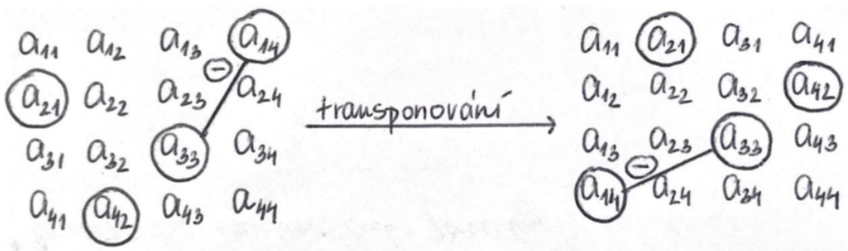
Věta 2 Vlastnosti D1 až D6 determinantu čtvercové matice:

D1. $|A| = |A^T|$*...determinant se nezmění transponováním matice.*

Definice 5 Matice A^T transponovaná k matici *A je matice vzniklá z A záměnou řádků za sloupce.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důkaz vlastnosti D1: Transponováním matice ji „překlopíme“ symetricky vzhledem k hlavní diagonále, n-tice prvků vybraná pro $|A|$ zůstane n-ticí, která se vyskytuje i v $|A^T|$.
Počet inverzí v permutaci určené touto n-ticí se transponováním nezmění (směr příbuzný vedlejší diagonále se překlopením vzhledem k hlavní diagonále nemění, tj. stále je příbuzný vedlejší diagonále), tj. nemění se ani znaménko před tímto součinem.



Z vlastnosti $D1$ plyne, že všechny další vlastnosti, které vyslovíme pro řádky čtvercové matice, platí (lze je přeformulovat) i pro sloupce.

Poznámka: Pokud se díváme na řádky matice A jako na vektory, tedy:

$$\vec{a_1} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), \vec{a_2} = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., \vec{a_n} = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

lze determinant $|A| = det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ chápat jako zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které přiřadí n vektorům v daném pořadí číslo

$$det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}) := \sum_{j_1, j_2, ..., j_n} (-1)^{\pi(j_1, j_2, ..., j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot ... \cdot a_{n,j_n}$$

D2. Při předchozím označení je zobrazení $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ antisymetrické, tj. záměnou 2 různých řádků v matici se změní znaménko determinantu:
$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) = -det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n})$.

Důkaz: Záměnou dvou indexů se jedna inverze v permutaci přidá nebo ubere, tj. před každým součinem n prvků bude v sumě opačné znaménko. Tedy i před celým determinantem bude opačné znaménko.

Důsledek vlastnosti $D2$: Determinant matice A se dvěma stejnými řádky je roven 0.
Důkaz: Když zaměníme tyto stejné řádky, s maticí se nic nestane, čili platí $det|A| = -det|A| \Rightarrow det|A| = 0$, protože jen 0 splňuje danou rovnost.

Definice 6 *Pokud $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ jsou vektory, tak vektor*

$$\vec{v} := \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}$$

je <u>lineární kombinací vektorů</u> $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$.
(Lineární kombinace vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$ je jakýkoli součet násobků těchto vektorů.)

D3. $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ je zobrazení lineární v každé složce, tj. pokud na k-tém řádku se vyskytuje lienární kombinace dvou vektorů $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, tak determinant lze upravit na lineární kombinaci dvou determinantů:

$$det(\vec{a_1}, ..., \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, ..., \vec{a_n}) = \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{u}, ..., \vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{v}, ...\vec{a_n})$$

Důkaz:

$$\sum (-1)^{\pi(j_1,...,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot ... \cdot (\alpha \cdot u_{jk} + \beta \cdot v_{jk}) \cdot ... \cdot a_{n,j_n}$$

$$= \text{vytkneme } \alpha, \beta \text{ a rozdělíme na dva součty} =$$

$$\alpha \cdot \sum (-1)^{\pi(j_1,...,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot ... \cdot u_{j_k} \cdot ... \cdot a_{n,j_n} + \beta \cdot \sum (-1)^{\pi(j_1,...,j_n)} \cdot a_{1,j_1} \cdot ... \cdot v_{j_k} \cdot ... \cdot a_{n,j_n} =$$

$$= \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{u}, ..., \vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{v}, ..., \vec{a_n})$$

Poznámka: Vlastnost $D3$ lze přirozeně rozšířit tak, že k-tý vektor není lineární kombinací pouze dvou vektorů, ale l vektorů ($l > 2$).

Důsledek vlastnosti $D3$: Vynásobením k-tého řádku matice A se stejným číslem vynásobí i celý determinant této matice.
(Plyne z $D3$: $\alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{k}, ..., \vec{a_n}) = det(\vec{a_1}, ..., \alpha \cdot \vec{k}, ..., \vec{a_n})$.)

Další důsledek vlastnosti $D3$: Je-li některý řádek matice A řádek samých nul, pak platí $|A| = 0$.
(Z $D3$: $det(\vec{a_1}, ..., 0 \cdot \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}) = 0 \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{k}, ..., \vec{a_n}) = 0$. Nebo z definice determinantu: v každém součinu v determinantu je vybrána jedna $0 \Rightarrow |A| = 0$.)

D4. Determinant matice A se nezmění, pokud k řádku $\vec{a_k}$ přičteme nenulový násobek jiného řádku, například řádku $\vec{a_l}$:

$$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) \quad = \quad det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k} + \alpha \cdot \vec{a_l}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n})$$

Důkaz: Rozepišme si pravou stranu této rovnosti:

$$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k} + \alpha \cdot \vec{a_l}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) \quad = \quad det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) + \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n})$$

Z důsledku vlastnosti $D2$ víme, že $det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) = 0$, jelikož se jedná o determinant matice se dvěma stejnými řádky, důkaz je hotov.

Vlastnost $D4$ nám poskytuje dobrý nástroj pro výpočet determinantu: snažíme se k nějakému řádku přičíst násobek jiného řádku, abychom v matici tímto způsobem vytvářeli nuly – čím více nul, tím méně součinů je nenulových.

Definice 7 Schodový tvar matice A = *takové obsazení matice A čísly, že v každém dalším řádku matice je zleva více nul než v tom předchozím, nebo se už jedná o řádek samých nul.*

Ad příklad 2. Nyní se můžeme vrátit k příkladu 2 a pokusit se vypočítat determinanty $|A|, |A_1|, |A_2||A_3|, |A_4|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot r_2 \\ +r_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +r_3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 3 = -9$$

Pokud se nám pomocí $D1$ až $D4$ podaří upravit matici na schodový tvar, její determinant je roven pouze součinu prvků na hlavní diagonále (ve všech dalších součinech musíme vybrat alespoň jednu nulu pod diagonálou, tj. zbývajících 23 součinů je rovno 0).

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot r_1 \\ +r_1 \\ +3\cdot r_3 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \\ \\ \end{matrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -9\cdot r_3 \end{matrix} =$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -24$$

D5. Laplaceův rozvoj determinantu podle k-tého řádku nebo l-tého sloupce. Tento rozvoj převádí výpočet determinantu řádu n na n determinantů řádu $n-1$:

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |A_{kj}|$$

kde A_{kj} jsou matice vzniklé z A vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |A_{il}|$$

kde $|A_{il}|$ jsou matice vzniklé z A vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Důkaz: Plyne z definice determinantu pouhým rozepsáním:

Např. pro řádkový rozvoj: a_{kj} se vyskytuje v $(n-1)!$ součinech; když $(-1)^{k+j}\cdot a_{kj}$ z těchto součinů vytkneme, v závorce se objeví $|A_{kj}|$ jako součet součinů $n-1$ prvků, tj. determinant řádu o 1 menšího.

Ad příklad 25. Vypočtěme $|A_2|, |A_3|, |A_4|$ kombinací vlastností $D1-D5$:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme např. podle řádku 3 (přitom $|A_{kj}|$ je determinant matice, která vznikne z A vynecháním k- tého řádku a j-tého sloupce matice A, tj. vynecháním právě toho řádku a sloupce, kde se vyskytuje prvek a_{kj}):

$$= (-1)^{3+1}\cdot\mathbf{0}\cdot|A_{31}|+(-1)^{3+2}\cdot(\mathbf{-3})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot\mathbf{1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot\mathbf{0}\cdot|A_{34}| =$$

$$= 3\cdot(-2+0+0-2-0-0)+(-1+0+0-1-0-0) = -14$$

Tj[2]. nejen že převádíme na determinanty nižších řádů, ale využíváme přitom výběr takového řádku nebo sloupce, který obsahuje větší počet nul.

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Rozvoj podle 1. sloupce:

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+0-2-(-6)-0-2 = -1$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2\cdot r_2 \\ -2\cdot r_2 \end{matrix} \quad = \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

Rozvoj podle 2. sloupce:

$$= (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}+0+0 = -0-9+0+0-(-30)-0-0 = 21$$

[2] Například $a_{32} = -3$ se vyskytuje ve třetím řádku a v druhém sloupci naší matice řádu 4, tj. $|A_{32}|$ je determinant matice z ní vzniklé vynecháním třetího řádku a druhého sloupce. Číslo (-1) je umocněno na $(3+2)$, což je součet indexů (pozic v řádku a sloupci) prvku a_{32}.

Můžeme psát odpověď:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-24}{-9} = \frac{8}{3}; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{14}{9}; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{9}; x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{21}{-9} = \frac{-7}{3}.$$

Řešení je jediné, vektorovým zápisem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{14}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{3} \end{pmatrix}.$$

D6. Pokud některý řádek, např. l-tý je lineární kombinací jiných řádků, např. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}$, tak $|A| = 0$.

Důkaz: Velmi podobný důkazu $D4$: Jestliže:

$$\vec{a_l} = \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}$$

pak:

$$det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k}, ..., \vec{a_n}) =$$

$$= \alpha_1 \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_1}, ..., \vec{a_n}) + \alpha_2 \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}) + ... + \alpha_k \cdot det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n})$$

protože každý z těchto determinantů se rovná 0 díky dvěma stejným řádkům (důsledek $D2$).

Příklad 3 *Ověřte, že:*

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

2 Týden 2

2.1 Cvičení 2: Analytická geometrie v rovině II

- Petáková 14.1: rovnice přímky (analytická a parametrická, a vlastně i směrnicová) – příklady 1 až 5.
- Petáková 14.3: vzájemná poloha dvou přímek v rovině – příklady 30, 31, 32.
- Petáková 14.6. Zobrazení[3] v analytické geometrii ... kromě příkladu 84 (stejnolehlost zatím ne) jsou všechny zajímavé a prověřují základní práci studenta s přímkami v rovině: napsat rovnici přímky kolmé či rovnoběžné s nějakým směrem, zjistit, zda nějaký bod na přímce leží či neleží, prostě elementární práce s přímkou ... žádné vzorce, jen práce s přímkou, body a vektory.

Studentům lze za domácí úkol zadat příklady v rovině, které byly součástí prověrky-a v minulém roce (jsou v podstatě vzaty zhruba z obou probraných cvičení):

Úloha 2.1 *Určete*[4] *souřadnice bodu* A'*, který je obrazem bodu* $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ *v osové souměrnosti s osou* $o:\ 2x - y + 7 = 0$ *(určitě tušíte, že budete potřebovat najít jistou přímku kolmou na osu* o*).*

Úloha 2.2 *Určete*[5] *souřadnice bodu* C'*, který je obrazem bodu* $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ *v osové souměrnosti s osou* $\overleftrightarrow{AB}$ *pro* $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *(určitě tušíte, že budete potřebovat najít jistou přímku kolmou na osu).*

Úloha 2.3 *Je dána přímka* $p: 5x - 2y - 3 = 0$ *a bod* $M = [0, 4]$*. Napište*

- *parametrické rovnice přímky* p*;*
- *parametrické rovnice přímky* q *kolmé na přímku* p *a procházející bodem* M*;*
- *obecnou rovnici přímky* r *rovnoběžné s přímkou* p *a procházející bodem* M*.*

Úloha 2.4 *Jsou dány body* $A[x; -2], B[6; 4]$*.*

a) Určete souřadnici x *bodu* A *tak, aby střed úsečky* AB *měl souřadnice* $S[4; 1]$*.*

b) Napište parametrické rovnice přímky p *dané body* A, B*.*

[3] Další oddílky Petákové 14 necháme s úctou do předmětu Geometrie 2: úsečky, polopřímky, poloroviny nás nebudou v tomto předmětu tolik zajímat.

[4] Petáková 14.6, příklad 80. Výsledek najdete na konci Petákové, nebo lze i provést zkoušku – jak?

[5] Petáková 14.6, příklad 81. Výsledek najdete na konci Petákové, nebo lze i provést zkoušku: Střed úsečky CC' musí totiž ležet na ose souměrnosti, že ano? A dokonce je střed úsečky CC' současně i patou kolmice vedené z bodu C na přímku $\overleftrightarrow{AB}$.

c) Zjistěte, v jakých bodech protíná přímka p osu x a osu y.

Úloha 2.5 *Jsou dány body $A[-1;1], B[2;0], C[1,3]$.*

a) Ověřte početně, že body A, B, C tvoří trojúhelník (za 1 bod).

b) Napište obecnou rovnici přímky p dané body A, B (za 1 bod).

c) Napište parametrické rovnice těžnice[6] t_c vycházející z bodu C (za 2 body).

[6]Těžnice trojúhelníka je úsečka spojující jeho vrchol se středem jeho protější strany.

2.2 Přednáška 2: Pojem vektorového prostoru, Gaussova eliminace

Základní pojmem, kterým se v tomto předmětu budeme zabývat, je pojem vektoru. Vektor je zobecněním pojmu reálné číslo – reálné číslo je určené svou velikostí, vektor je určený velikostí a směrem[7].

Začněme dnes u této představy vektoru jako „orientované úsečky“, u které je důležitý její směr a její délka, a pokusíme se tuto představu vektoru nějak matematicky popsat, čili zpřesnit.

Příklad 4 *Uvažujme množinu V všech orientovaných úseček v rovině. Dvě orientované úsečky o stejné velikosti a směru budeme považovat za tentýž vektor (v analytické geometrii takovému pojetí vektoru v rovině říkáme „volný vektor“ ... můžeme vektorem v rovině rovnoběžně posouvat – pokud zůstává zachován jeho směr a velikost, jedná se pořád o tentýž vektor).*

Na této množině V definujme operaci sčítání vektorů následovně: vektor $\vec{a}+\vec{b}$ určíme tak, že ke koncovému bodu vektoru $\vec{a}$ rovnoběžně posuneme počáteční bod vektoru $\vec{b}$, pak vektor $\vec{c} := \vec{a}+\vec{b}$ je takový, že jeho počáteční bod je stejný jako počáteční bod $\vec{a}$ a jeho koncový bod je roven koncovému bodu $\vec{b}$.

Podobně definujme násobení vektoru reálným číslem $r \in R$ takto: Pokud $r = 0$, je $r \cdot \vec{a}$ roven nulovému vektoru., tj. úsečce nulové délky a jakéhokoli směru. Pokud $r > 0$, tak směr vektoru $r \cdot \vec{a}$ je stejný jako směr $\vec{a}$ a jeho velikost je r-násobkem velikosti vektoru $\vec{a}$. Pokud $r < 0$, tak směr vektoru $r \cdot \vec{a}$ je opačný ke směru $\vec{a}$ (při zachování rovnoběžnosti) a jeho velikost je $|r|$-násobkem velikosti vektoru $\vec{a}$.

Takto definovaná množina vektorů společně s takto definovanými operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem (jehož výsledkem je vektor) tvoří strukturu, kterou budeme nazývat vektorovým prostorem. Vlastnosti vektorového prostoru odvodíme z vlastností uvedených dvou operací na množině orientovaných úseček v rovině:

Definice 8 *Množina $(V,+)$ se nazývá* **vektorový prostor nad tělesem**[8] **skalárů** *$(T,+,\cdot)$ (její prvky $\vec{v} \in V$ se nazývají* **vektory***, prvky tělesa T se nazývají* **skaláry***), jestliže*

a) *Struktura $(V,+)$ je komutativní grupa, tj.*

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ \vec{u}+\vec{v} \in V$ *(uzavřenost operace + na V),*
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \ : \ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(asociativita operace +),*
3. $\exists \vec{o} \in V \ : \ \vec{u}+\vec{o} = \vec{o}+\vec{u} \ \ \forall \vec{u} \in V$ *(existence neutrálního prvku),*
4. $\forall \vec{u} \in V \ \exists\, (-\vec{u} \in V \ : \ \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$ *(existence inverzí vzhledem k operaci +),*

[7] Vektor jako „šipka“ charakteristická velikostí a směrem slouží k popisu například a) posunutí v rovině, b) síly působící na těleso, c) rychlosti a směru pohybu objektu v prostoru – zkrátka řady veličin známých z různých oborů; tyto veličiny označujeme jako vektorové veličiny.

[8] Těleso T je zde důležité proto, že pomocí něj za chvíli budeme vyjadřovat souřadnice vektorů. Např. Pokud $T = R$, souřadnicemi budou reálná čísla; pro $T = Q$ budou souřadnicemi racionální čísla.

5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(komutativita operace + na V).*

b) *Zobrazení · množiny $T \times V$ do V (= násobení SKALÁR KRÁT VEKTOR) splňuje vlastnosti „příbuzné“*[9] *vlastnostem operace na monoidu:*

"1" $\forall\, t \in T,\ \vec{v} \in V \ : \ t \cdot \vec{v} \in V$ *(uzavřenost součinu skalár krát vektor),*

"2" $\forall\, s, t \in T,\ \vec{v} \in V \ : \ s \cdot (t \cdot \vec{v}) = (s \cdot t) \cdot \vec{v}$ *(pro jednoduchost označujeme součin mezi skaláry a součin skalár krát vektor stejným symbolem),*

"3" $\exists\ 1 \in T \ : \ 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \ \ \forall\ v \in V$ *(existence jednotkového skaláru vzhledem k násobení skalár krát vektor).*

c) *Souhra operace + a operace skalár krát vektor splňuje vlastnosti*[10]*:*

"6a" $\forall\, s, t \in T,\ \vec{v} \in V \ : \ (s + t) \cdot \vec{v} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{v},$

"6b" $\forall\, t \in T,\ \vec{u}, \vec{v} \in V \ : \ t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}.$

Poznámka. Jak si dobře zapamatovat druhých pět z deseti vlastností definice: v žádné z těchto vlastností se nevyskytuje součin dvou vektorů (skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se v definici vektorového prostoru nevyskytuje), pouze součin dvou skalárů nebo součin skalár krát vektor. Definici skalárního součinu vektorů (násobíme dva vektory, výsledkem je skalár) uvedeme v některé z následujících kapitol.

Ad příklad 4. V je množina volných vektorů v rovině nad tělesem R. Uvedených deset vlastností vektorů jsme vlastně z příkladu volných vektorů v rovině odvodili, tj. všechny vlastnosti lze dokázat-reprezentovat obrázky:

1. Vlastnosti 1 až 5 jsme už zkoumali v algebře 1 – tyto vlastnosti platí i pro operaci sčítání vektorů. Součtem dvou volných vektorů v rovině je také vektor (viz obr.).

2. (viz obr.) důkaz asociativity sčítání volných vektorů je proveden graficky.

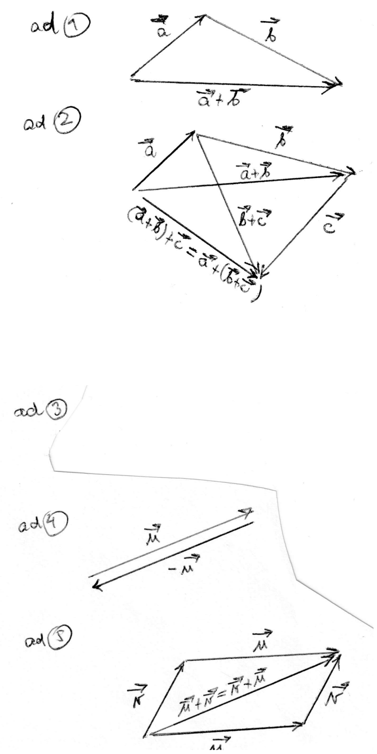
3. Nulový vektor má nulovou velikost (a jeho směr je libovolný), proto jej na obrázku nevidíte.

4. Opačný vektor (= inverzní vektor vzhledem k operaci sčítání) má stejnou velikost, ale opačný směr.

5. Sčítání volných vektorů splňuje komutativní zákon.

[9] S tím rozdílem, že se nejedná o operaci na jedné množině, ale o součin prvků ze dvou různých množin – součin skaláru s vektorem.

[10] S trochou fantazie bychom je mohli nazvat "distributivní zákony" okruhu, ale uvozovky jsou důležité, protože se nejedná o dvě operace na stejné množině, ale o jednu operaci na množině a o zobrazení $T \times V \to V$ (což by bylo možné algebraicky nazvat jako akci tělesa na grupě: prvky z tělesa násobíme prvky grupy, a dostáváme jiné prvky grupy); a distributivní zákony v okruhu jsou sice dva, ale liší se jen díky nekomutativnímu násobení – zde u vektorového prostoru jsou "distributivní zákony" z jiných důvodů (v jednom zákonu sčítáme skaláry, ve druhém sčítáme vektory).



"1" Právě uvedené vlastnosti 1 až 5 lze popsat tím, že V je vzhledem ke sčítání komutativní grupa. Ovšem tato a další čtyři vlastnosti jsou pro vektory specifické a ještě jsme se jimi v algebře nezabývali. Vlastnost "1" tvrdí, že s každým vektorem $\vec{u}$ obsahuje prostor volných vektorů i nekonečně[11] mnoho dalších vektorů, které vzniknou jako reálné násobky vektoru $\vec{u}$.

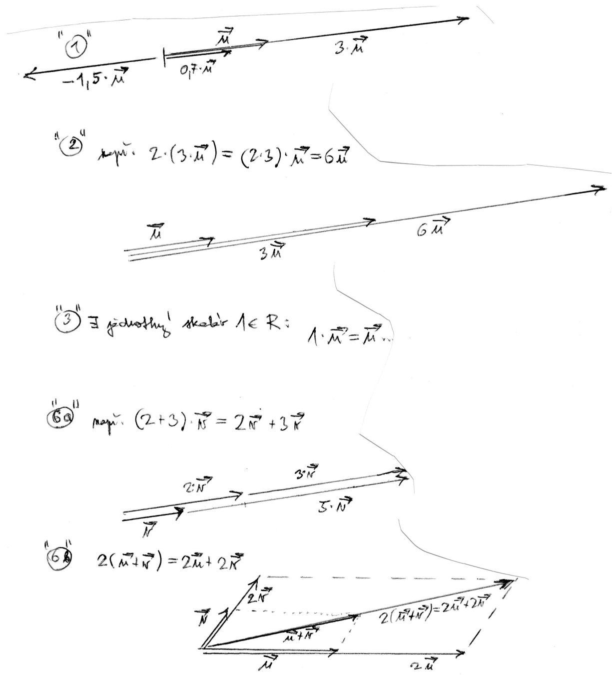
"2" Nezáleží na tom, zda nejdříve vynásobíme dva skaláry, a pak jimi vynásobíme vektor, nebo zda násobení vektoru provedeme postupně dvěma skaláry – výsledek je stejný.

"3" Existuje jednotkový skalár – vynásobením volného vektoru $\vec{u}$ konstantou 1 se nezmění jeho velikost ani směr.

"6a" Nezáleží na tom, zda nejprve sečteme skaláry, a výsledkem vynásobíme vektor, nebo zda nejprve provedeme dvojí násobení skalár krát vektor, a výsledné vektory sečteme.

"6b" To, že nejprve sečteme vektory, a pak až vynásobíme skalárem je totéž, jako bychom oba vektory nejdříve vynásobili skalárem, a pak je sečetli.

[11] To bude hrát roli u množiny generátorů vektorového prostoru, kterou budeme studovat podobně jako množiny generátorů grupy. Vzhledem k povaze (nekonečnosti) tělesa R jeden nenulový vektor generátor svými násobky skalárem vygeneruje nekonečně mnoho dalších vektorů.



Příklad 5 *Dalším příkladem prostoru vektorového je* $(R_3[x], +, \cdot)$ *... množina všech polynomů stupně nejvýše* 3 *nad tělesem* R. *Přesný důkaz bychom mohli provést pro obecně označené skaláry* s, t *a obecně značené polynomy*

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_3 \cdot x^3 + u_2 \cdot x^2 + u_1 \cdot x + u_0, \\
\vec{v} &= v_3 \cdot x^3 + v_2 \cdot x^2 + v_1 \cdot x + v_0, \\
\vec{w} &= w_3 \cdot x^3 + w_2 \cdot x^2 + w_1 \cdot x + w_0.
\end{aligned}$$

Ale zkusme místo důkazu tyto vlastnosti raději jen ilustrovat na třech konkrétních polynomech

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= 2x^3 + x^2 - 5x + 1, \\
\vec{v} &= 3x^3 + 5x^2 + x - 2, \\
\vec{w} &= 2x^3 + x^2 - 3x + 3.
\end{aligned}$$

1. $\vec{u} + \vec{v} = 5x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ *je opět polynomem stupně nejvýše 3.*

2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = 7x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

3. *Neutrálním polynomem je* $\vec{o} = 0$, *jeho přičtením k libovolnému polynomu se ten nezmění.*

4. *Opačným vektorem je* $-\vec{u} = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$, $-\vec{v} = -3x^3 - 5x^2 - x + 2$, *atd.*

5. *Evidentně platí* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, *ať už pro naše dva zvolené vektory, nebo jakékoliv dva vektory.*

"1" Násobení polynomu reálným skalárem se realizuje vynásobením každého koeficientu zvlášť, jak jsme zvyklí násobit polynom reálným číslem. Například

$$2 \cdot \vec{u} = 4x^3 + 2x^2 - 10x + 2.$$

Důležité je, že násobením polynomu jakýmkoli reálným číslem se nezmění fakt, že výsledek je (kromě násobení nulou) polynom třetího stupně, tj. množina $(R_3[x], +)$ *je uzavřená na násobky reálnými čísly.*

"2" Například $(2 \cdot 3) \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3 \cdot \vec{u}) = 12x^3 + 6x^2 - 30x + 6$.

"3" $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ *pro jakýkoli prvek* $\vec{u}$ *dané množiny.*

"6a" Například $(2 + 3) \cdot \vec{u} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{u} = 10x^3 + 5x^2 - 25x + 5$, *a je vidět, že rovnost platí pro libovolné prvky daných typů.*

"6b" Například

$$2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = 10x^3 + 12x^2 - 8x - 2,$$

a je snad vidět, že rovnost platí pro libovolné prvky daných typů.

Příklad 6 *Množina* $(C\langle a; b\rangle, +, \cdot)$ *spojitých reálných funkcí na intervalu* $\langle a; b\rangle$, *s přirozeně definovanými operacemi součtu funkcí a vynásobení funkce reálný skalárem, je vektorovým prostorem!! Tento příklad je důležitý, neboť vidíme, že pojem vektoru je jak zobecněním pojmu číslo, tak zobecněním pojmu spojitá funkce. Opět se zde objevují ambice algebry hledat společné či stejné vlastnosti mezi různými strukturami – řada vlastností, které známe hlavně u prvků aritmetického vektorového prostoru (což je vlastně příklad 1, ale ještě na prostoru volných vektorů v příkladu 1 musíme zavést souřadnice), je stejných jako vlastnosti funkcí spojitých na intervalu.*

1. *Definujeme součet funkcí* $\forall f(x), g(x) \in C\langle a; b\rangle$: $f(x) + g(x)$ *je opět spojitou funkcí na* $\langle a; b\rangle$.
2. $\forall f(x), g(x), h(x) \in C\langle a; b\rangle \ : \ (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) \ \ \forall x \in \langle a; b\rangle$, *což plyne z asociativity sčítání reálných čísel.*
3. *Neutrálním prvkem je funkce* $e(x) = 0 \ \ \forall x \in \langle a; b\rangle$, *protože* $f(x)+e(x) = f(x) \ \ \forall x \in \langle a; b\rangle$.
4. $\forall f(x) \in C\langle a; b\rangle \ \ \exists(-f(x)) \in C\langle a; b\rangle$: $f(x) + (-f(x)) = e(x) = 0$.
5. $\forall f(x), g(x) \in C\langle a; b\rangle : \ \ f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

"1" $\forall s \in R, \ \ f(x) \in C\langle a; b\rangle : \ \ s \cdot f(x) \in C\langle a; b\rangle$.

"2" $\forall r, s \in R, \ \ f(x) \in C\langle a; b\rangle : \ \ (r \cdot s) \cdot f(x) = r \cdot (s \cdot f(x))$.

"3" $\exists \ 1 \in R : \ \ 1 \cdot f(x) = f(x) \ \ \forall f(x) \in C\langle a; b\rangle$.

"6a" $\forall r, s \in R, \ \ f(x) \in C\langle a; b\rangle : \ \ (r + s) \cdot f(x) = r \cdot f(x) + s \cdot f(x)$.

"6b" $\forall r \in R,\ \ f(x), g(x) \in C\langle a; b\rangle : \ \ r \cdot (f(x) + g(x)) = r \cdot f(x) + r \cdot g(x).$

Příklad 7 *$V = \{\vec{o}\}$ ... nejmenší možný vektorový prostor je prostor, který obsahuje pouze nulový vektor.*

Klíčovou konstrukcí či výpočtem bude při naší práci s vektory zjišťování, zda je určitý vektor lineární kombinací (= součtem násobků) jiných vektorů.

Definice 9 **a)** *Lineární kombinací vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_{k-1}}$ je vektor*

$$\vec{a_k} = \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} + \cdots + \alpha_{k-1} \cdot \vec{a_{k-1}},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{k-1}$ jsou nějaké skaláry z tělesa T.

b) *Posloupnost vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ je lineárně závislá, když některý z vektorů je lineární kombinací těch ostatních vektorů. V opačném případě je posloupnost vektorů $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ lineárně nezávislá.*

Poznámka. U rovnosti a) v předchozí definici také říkáme, že vektor $\vec{a_k}$ je lineárně závislý na vektorech $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_{k-1}}$.

Podobně jako při studiu grup a okruhů, i u vektorových prostorů se budeme zabývat množinou vektorů, která generuje (= vytváří jistým přesně popsaným způsobem) celý vektorový prostor. Pokud uvážíme, že vynásobení vektoru skalárem vygeneruje nekonečně mnoho dalších vektorů různých délek, asi se často budeme setkávat se situací, kdy i pro nekonečnou množinu V bude množina generátorů (co do počtu prvků) celkem málo početná. Těmto množinám generátorů budeme říkat báze.

Definice 10 *Uvažujme vektorový prostor $(V, +)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Posloupnost vektorů $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k})$ nazveme* **bází vektorového prostoru**$(V, +)$*, pokud platí obě z podmínek*

a) *tato posloupnost vektorů je lineárně nezávislá (žádný z vektorů nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních);*

b) *každý vektor $\vec{v} \in V$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci,*

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + \cdot + \alpha_k \cdot \vec{u_k},$$

tj. vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ generují celý prostor[12].

Dále **dimenze vektorového prostoru** *$(V, +)$ znamená počet vektorů nějaké jeho báze. A navíc, čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{v}$ pomocí vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k}$ nazveme* **souřadnicemi vektoru** *$\vec{v}$ vzhledem k bázi $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_k})$.*

[12]Alternativní vyjádření obou podmínek: ad b) dané vektory generují celý prostor, ad a) a žádný z nich není nadbytečný v tom smyslu, že by byl lineární kombinací těch ostatních.

Příklad 8 *Tři otázky pro vektory z aritmetického vektorového prostoru R^3 uspořádaných trojic reálných čísel.*

a) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

b) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

c) *Jsou vektory* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *lineárně závislé?*

Řešení:

ad a) Ano, nulový vektor je vždy lineárně závislý na ostatních vektorech, protože je jejich 0-násobek: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ad b) Nejsou, protože neexistuje reálné číslo α, že $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ad c) Nejsou, protože (postupujeme krok za krokem)

- $\vec{u_1}$ je nenulový,
- $\vec{u_2}$ není reálným násobkem vektoru $\vec{u_1}$,
- a $\vec{u_3}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ – protože neexistují reálná čísla α_1, α_2 tak, aby
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(v rovnici $1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0$ sestavené ze třetích souřadnic předchozí vektorové rovnice žádná vhodná reálná čísla α_1, α_2 jako její řešení nenajdeme).

Z řešení příkladu 5c) plyne obecný postup při sestavování báze nějakého vektorového prostoru:

- $\vec{u_1}$ ... zvolíme jakýkoliv nenulový vektor z V;
- $\vec{u_2}$ ... zvolíme takový vektor z V, který není násobkem vektoru $\vec{u_1}$;
- $\vec{u_3}$ ... zvolíme takový vektor z V, který není lineární kombinací vektorů $u - 1$, u_2.
- atd.

Příklad 9 a) *Bází prostoru R^3 je například posloupnost vektorů*

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(říkáme jí standardní báze – jedná se o bázi, kterou běžně volíme v Kartézské souřadné soustavě ve třídimenzionálním aritmetickém vektorovém prostoru R^3).

b) *Bází prostoru R^n je nějaká (jakákoli) posloupnost n nezávislých vektorů, dimenze R^n je rovna n.*

c) *Bází prostoru $(R_n[x], +, \cdot)$ všech polynomů stupně nejvýše n je nap59klad posloupnost polynomů $(1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n)$, tj. dimenze $R_n[x]$ je rovna $(n+1)$.*

d) *Bází prostoru $(C\langle a; b\rangle, +, \cdot$ všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$ je například nekonečná posloupnost funkcí $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$, nebo nekonečná posloupnost $(1 \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots)$. Jinými slovy, dimenze $C\langle a; b\rangle = \infty$.*

Příklad 10 *Je posloupnost vektorů* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *bází prostoru R^3?*

Ano, každý prostor má řadu různých bází, které mají stejný počet prvků – tato báze je bází stejného prostoru jako báze v příkladu 6a.

Příklad 11 *Vyjádřete souřadnice vektoru* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *v bázi*

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Řešení: ad a) ve standardní bázi jsou už hodnoty 1,2,3 přímo souřadnicemi. ad b) řešení příkladu je zde ponecháno na čtenáři, je potřeba vyřešit systém tří rovnic o třech neznámých.

V tomto předmětu budeme řešit řadu systémů lineárních rovnic, jako např. po rozepsání do souřadnic systém tří rovnic o třech neznámých v příkladu 8b. Studenti znají možná ze střední školy tzv. dosazovací metodu, kdy vyjádřením jedné neznámé z jedné rovnice a dosazením do všech ostatních rovnic se sníží počrt neznámých o jednu, atd. Ale takto v tomto předmětu rovnice řešit nebudeme, namísto toho se naučíme tři další metody řešení těchto systémů rovnic. První z metod se nazývá **Gaussova eliminační metoda**. Vysvětlíme ji na příkladu:

Příklad 12 *Na množině reálných čísel řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 9 \\ 2x-y+z &= 8 \\ 3x \qquad -z &= 3. \end{aligned}$$

Tento systém lineárních rovnic si přepíšeme do tzv. **matice**, což je schéma čísel, z nichž každé má přesně zadanou svou pozici. Tuto matici pomocí tzv. řádkových elementárních úprav převedeme na tzv. schodový (některé učebnice: schodovitý) tvar = v každém následujícím řádku matice je už více nul směrem zleva než v tom předchozím, popřípadě už je celý další řádek nulový.

Tento způsob řešení není až zas tak docela studentům neznámý, pravděpodobně jím řešili systém dvou rovnic tzv. sčítací metodou. Jediná novinka spočívá nyní v tom, že celý momentální stav sčítací metody máme neustále před očima v našem maticovém schématu.

Naší první úpravou schématu tří rovnic bude: a) první rovnici necháme beze změny; b) od druhé rovnice odečteme dvojnásobek první rovnice; c) od třetí rovnice odečteme trojnásobek první rovnice. Tímto způsobem eliminujeme z první i druhé rovnice neznámou x.

Druhou úpravou schématu bude jen jisté kosmetické zjednodušení: druhou rovnici vydělíme minus pěti (tj. vynásobíme číslem $\frac{-1}{5}$), druhou vydělíme minus dvěma (tj. vynásobíme číslem $\frac{-1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1 \\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\left(\frac{-1}{5}\right) \\ \cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \end{array} \sim$$

(znak $\sim$ tedy představuje takovou úpravu systému rovnic, která nemění jeho řešení, pouze k jedné rovnici přičteme násobek druhé, nebo rovnici vynásobíme nenulovým číslem; ještě bychom mohli také přehodit pořadí řádků, protože na pořadí rovnic, jak je zapíšeme, nezáleží).

Následující úprava systému rovnic bude spočívat v tom, že první dvě rovnice necháme beze změny a od třetí rovnice odečteme trojnásobek druhé rovnice – tím pádem se na druhé pozici třetího řádku objeví nula, neboli ze třetí rovnice eliminujeme proměnnou y:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Dospěli jsme ke tvaru označovanému jako schodový tvar – v každém dalším řádku je více nul zleva než v tom předchozím. Nyní se opět vrátíme k významům řádků jako rovnic, tj. první sloupec odpovídá koeficientům u proměnné x, druhý sloupec koeficientům u proměnné y, třetí sloupec koeficientům u proměnné z.

Nasaďme při hledání řešení něco jako „zpětný chod“, tj. při výpočtu řešení začneme s posledním řádkem matice, který představuje nejjednodušší rovnici: $2z = 6$, odtud $z = 3$. Jdeme „o patro výš“, do rovnice $y + z = 2$ dosadíme právě vypočtené $z = 3$ a dostaneme

$y=-1$. A nakonec obě dosud vypočtené proměnné dosaďme do první rovnice $x+2y+3z=9$ a dostaneme $x=2$. Řešení našeho systému lineárních rovnic (SLR) je jediné[13] (!!), je jím trojice hodnot $x=2$, $y=-1$, $z=3$.

Příklad 13 *Podívejme se na další příklad, ve kterém dojde k tomu, že možných řešení bude nekonečně mnoho. I tak se je budeme snažit matematicky popsat, tj. vypsat množinu všech možných řešení. Na množině reálných čísel řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x+y+2z-5w &= 3, \\ 2x+5y-z-9w &= -3, \\ 2x+y-z+3w &= -11, \\ x-3y+2z+7w &= -5 \end{aligned}$$

$$.$$

Použijme opět na předchozím příkladu vyloženou Gaussovu eliminaci, tj. přepišme si koeficienty i pravé strany rovnic do matice a upravme ji, jako i v předchozím příkladu, na schodový tvar[14]:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2\cdot r_1 \\ -2\cdot r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \text{ a výměna se 2. řádkem} \\ \\ \end{array}$$

(vyměníme druhý a třetí řádek, protože na pozici 22, tj. na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce, bude číslo 1, pomocí něhož lépe odečteme hodnoty 3 a -4 ve druhém sloupci, které se v dalším kroku snažíme vhodným přičtením násobku druhého řádku vynulovat)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ -3\cdot r_2 \\ +4\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -60 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{(-1)}{20} \\ +r_3 \end{array} \sim$$

a je vidět, že přičtením třetího řádku ke čtvrtému dostaneme ve schodovém tvaru řádek samých nul:

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nenulových řádků ve schodovém tvaru je méně než počet neznámých, řešení našeho **systému lineárních rovnic (SLR)** bude nekonečně mnoho. Výsledek bude obsahovat

[13] Nemluvíme o třech řešeních, ale bodu řešení nebo vktoru řešení, které je jediné.

[14] V angličtině: schodový tvar = echelon form; to není typicky anglické slovo, spíše francouzské :-)

tzv. parametr nebo parametry (= proměnné, za které můžeme dosadit libovolné reálné číslo), jejich počet je roven

$$\begin{aligned} \textbf{počet parametrů} &= \textbf{počet neznámých MINUS počet nenulových řádků ve schodovém tvaru} \\ 1 &= 4 - 3, \end{aligned}$$

řešení v našem příkladu bude obsahovat jeden parametr $p \in R$. Nasadíme nyní „zpětný chod“ dosazování do rovnic a pro poslední řádek schodového tvaru máme rovnici

$$z - 2w = 3.$$

Jednu z neznámých v této rovnici, například w, položíme rovnu parametru p, tj. $w = p$. Druhou vyjádříme: $z = 3 + 2p$. Obě takto vyjádřené neznámé w, z dosadíme do rovnice „o patro výš“ a dostaneme vyjádření pro y:

$$y + 5 \cdot (3 + 2p) - 13p = 17 \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 3p.$$

A konečně všechny dosud vyjádřené neznámé y, z, w dosadíme do rovnice v prvním řádku schodového tvaru a dostaneme vyjádření neznámé x:

$$x + (2 + 3p) + 2 \cdot (3 + 20) - 5p = 3 \quad \Rightarrow \quad x = -5 - 2p.$$

Zbývá přehledně zapsat odpověď: daný systém lineárních rovnic (SLR) má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2p, \\ y &= 2 + 3p, \\ z &= 3 + 2p, \\ w &= p, \qquad \text{kde } p \in R \quad \text{je parametr.} \end{aligned}$$

Pokud bychom se už s předstihem pokusili o vektorový zápis, vidíme, že množinou řešení je přímka ve čtyřrozměrném prostoru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad p \in R.$$

(tato přímka prochází bodem $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ a má směrový vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Příklad 14 *V dalším našem příkladu se při zápisu řešení SLR bude vyskytovat více než jeden parametr*[15]*: Řešte v oboru reálných čísel systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 + x_5 \qquad\quad &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9. \end{aligned}$$

Upravme náš systém čtyř rovnic o šesti neznámých na schodový tvar a dostaneme:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ \\ -r_2 - r_3 \end{array} \sim$$

(po odečtení druhého a třetího řádku najednou od řádku čtvrtého se čtvrtý řádek vynuluje)

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Podle stejného pohledu jako v předchozím příkladě vidíme, že

$$\begin{aligned} \textbf{počet parametrů} &= \textbf{počet neznámých MINUS počet nenulových řádků ve schodovém tvaru} \\ 3 &= 6 - 3, \end{aligned}$$

budeme tedy potřebovat tři reálné proměnné r, s, t jako parametry. Nyní při zpětném chodu si ovšem musíme dát pozor, které neznámé zvolit jako proměnné. Například když začneme poslední nenulovou rovnicí zdola

$$x_5 + x_6 = 2,$$

nelze jako neznámý parametr volit obě tyto proměnné, ale pouze jednu ($x_6 = t$), protože druhou proměnnou x_5 právě v závislosti na proměnné x_6 z rovnice vyjádříme: $x_5 = 2 - t$.

„O patro výše“ máme rovnici

$$x_3 + 2x_6 = 1,$$

do které dosadíme vyjádření $x_6 = t$ a dostaneme vyjádření proměnné x_3. Vidíme, že $x_3 = 1 - 2t$.

A v nejvyšším patře, na prvním řádku matice, máme rovnici, do které dosadíme už vyjádřené neznámé x_3, x_5, x_6, a protože rovnice obsahuje ještě tři další proměnné, dvě

[15] Velmi důležitý příklad, ze kterého je vidět, kterým proměnným hodnoty parametrů vlastně přiřazujeme. Vděčím za něj svému bývalému kolegovi doc. Marinu Kovárovi (Kovár: Maticový a tenzorový počet, skriptum VUT Brno).

z nich položíve rovny našim připraveným parametrům r, s (věděli jsme ze schodového tvaru, že ještě dva parametry využijeme)

$$x_1 + 2x_2 + 0 \cdot (1 - 2t) - 3x_4 + (2 - t) + 0 \cdot t = 2.$$

Volíme například $x_2 = r$, $x_4 = s$ a dostaneme $x_1 = t - 2r + 3s$. Sestavíme přehledně odpověď našeho příkladu:

$$\begin{aligned}
x_1 &= t - 2r + 3s,\\
x_2 &= r,\\
x_3 &= 1 - 2t,\\
x_4 &= s,\\
x_5 &= 2 - t,\\
x_6 &= t, \qquad\qquad \text{kde } r, s, t \in R \quad \text{jsou parametry.}
\end{aligned}$$

Při vektorovém zápisu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pro} \quad r, s, t \in R.$$

vidíme, že množina řešení SLR je určena bodem a lineární kombinací tří vektorů, kterou přičítáme k danému bodu.

Příklad 15 *Ne vždy existuje řešení systému lineárních rovnic: Při řešení SLR*

$$\begin{aligned}
x + 2y + 3z + 4w &= 5,\\
x + 3y + 5z + 7w &= 11,\\
x \qquad - z - 2w &= -6
\end{aligned}$$

dostaneme úpravou na schodový tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +2r_2 \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Poslední rovnice schodového tvaru je tedy

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = 1,$$

a tato rovnice, a tím ani celý SLR nemá řešení.

Poznámka. Uvedené úpravy rovnic musí mít nějaká pravidla: snažíme se o takové úpravy řádků neboli rovnic, které jsou povoleny v tom smyslu, že nemění množinu řešení danéh systému. Musíme si dát pozor, abychom neprovedli takovou úpravu, ve které by se ztratila informace uchovávaná v některé z rovnic. Jak k tomu může dojít. Následující úprava systému rovnic není povolena:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_3 \\ -r_2 \end{array}$$

Právě uvedený systém dvou úprav je nesprávný v tom smyslu, že vlastně tutéž úpravu děláme dvakrát (až na znaménko) a napíšeme ji do dvou různých řádků. To vede na **nesprávný schodový tvar a nesprávný výpočet řešení**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = 2-p \\ x_2 = -1 \\ x_3 = p \end{array}$$

Nejedná se o ekvivalentní úpravu, protože jsme ztratili informace obsažené v původní třetí rovnici, která není lineárně závislá na druhé rovnici. Ke správnému řešení vede kaskáda úprav

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2\cdot r_1 \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot(-1) \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

nebo tzv. série úprav pomocí jednoho řádku, tzv. pivotového řádku (pivotový řádek je jediným řádkem, jehož násobky odečítáme od ostatních řádků v jednom kroku)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -2\cdot r_1 \\ -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot(-1) \\ -2\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Pozor tedy na „zacyklenou“ úpravu v úvodu této poznámky, kterou není povoleno provést v jednom kroku úprav dané matice.

2.3 Dodatky 02: Vektorový podprostor (= VPP), generátory vektorového podprostoru, báze a dimenze VPP, průnik a součet VPP

Tyto dodatky jsou důležité a studenti je musí absolvovat Zabývejme se nyní chvíli otázkou příbuznou otázce z teorie grup (viz Algebra 1): Co musí splňovat podmnožina S vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$, aby už $(S,+,\cdot)$ byl vektorový prostor?

Definice 11 Vektorový podprostor *prostoru* $(V,+,\cdot)$ *nad tělesem* $(T,+,\cdot)$ *je taková podmnožina* S *tohoto prostoru, která je uzavřená vzhledem k operacím* $+$ *(sčítání vektorů) a* $\cdot$ *(násobení vektorů skalárem), tj. je uzavřená na lineární kombinace vektorů z* S*:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in S, \forall \alpha, \beta \in T : \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S$$

Poznámka: Zbylé vlastnosti z definice vektorového prostoru plynou automaticky z toho, že $S \subseteq V$.

Zbývá ověřit, že platí vlastnosti:

3. pro libovolné $\vec{u} \in S$: podle vlastností $1 +$ "1":

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{u} &\in S \\ \vec{o} &\in S \end{aligned}$$

...platí vlastnost 3

4. pro libovolné $\vec{u} \in S$: podle vlastností $1 +$ "1":

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u} &\in S \\ -\vec{u} &\in S \end{aligned}$$

...platí vlastnost 4

Příklad 16 $V = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*...aritmetický vektorový prostor.*

Podívejme se na některé příklady vektorových podprostorů:

a) *Každý vektorový prostor* $(V,+,\cdot)$ *má dva triviální podprostory,*

- *prostor* $\{\vec{o}\}$*...nejmenší možný podprostor,*

- *celý prostor* V *je podprostorem.*

b) *Body na přímce* p *procházející počátkem tvoří vektorový podprostor celé roviny* $\mathbb{R}^2$*,*

- *body na přímce* q *neprocházející počátkem netvoří vektorový podprostor roviny* $\mathbb{R}^2$*, protože neobsahují nulový vektor, resp. bod* $[0;0]$*.*

c) *Body v rovině α procházející počátkem tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$.*

- *body v rovině α neprocházející počátkem netvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$, protože neobsahují nulový vektor, resp. bod $[0;0;0]$.*

Věta 3 a) *Průnik dvou podprostorů S_1, S_2 prostoru $(V, +, \cdot)$ je vektorovým podprostorem.*

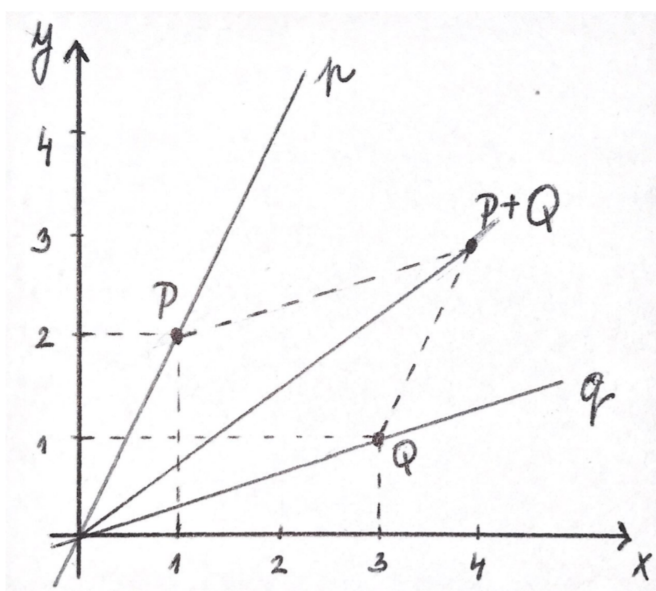
Důkaz:

$$\vec{u}, \vec{v} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \begin{array}{lll} \vec{u}, \vec{v} \in S_1 & \Rightarrow & \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_1 \\ \vec{u}, \vec{v} \in S_2 & \Rightarrow & \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_2 \end{array} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \in S_1 \cap S_2$$

Příklad 17 *Průnikem dvou rovin α, β, různoběžných a procházejících počátkem, je přímka p, která leží v jejich průniku (tato přímka tedy také prochází počátkem). Tato přímka je také vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^3$.*

Věta 3 b) *Sjednocení dvou podprostorů S_1, S_2 nemusí být vektorovým podprostorem.*

Důkaz: $S_1 = [x; y] \in p, S_2 = [x; y] \in q$



Příklad 18 *Např. bod $1 \cdot [1;2] + 1 \cdot [3;1] = [4;3] \notin p \cup q$, tedy $P + Q \notin p \cup q$.*

Protože sjednocení vektorových podprostorů nemusí být vektorovým podprostorem, přidáme ke sjednocení nějaké další vektory, abychom vektorový podprostor „vyrobili“:

Definice 12 $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$ *je posloupnost vektorů, ne nutně nezávislých, ve vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$.*

Lineární obal množiny $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$ *(značíme $L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$) definujeme jako:*

$$L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) = \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_k \cdot \vec{v_k}; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k})$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$.
Značíme $L(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) = \langle\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}\}\rangle$.

Definice 13 **Součet podprostorů** *S_1, S_2 prostoru $(V, +, \cdot)$ je:*

$$L(S_1 \cup S_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}; \vec{u} \in S_1, \vec{v} \in S_2\}$$

(Součet podprostorů S_1, S_2 je podprostor, který vznikne jako lineární obal jejich sjednocení.)

Ad příklad 18. *$L(S_1 \cup S_2) = \mathbb{R}^2$...lineární obal bodů na obou přímkách je celá rovina. (Alternativní zápis: $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \mathbb{R}^2$.)*

Jak souvisí pojem lineární nezávislosti vektorů s pojmem lineárního obalu či množiny generátorů, uvedeme v následující větě (část ($4b$) je pouze zobecněním části ($4a$) na větší počet vektorů než dva).

Věta 4 a) *Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ vektory $\vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \beta \neq 0$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz: $\vec{u}, \vec{v}$ jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ oba jsou nenulové a $\vec{v}$ není násobkem vektoru $\vec{u}$:

$$\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o} \wedge \vec{v} \neq k \cdot \vec{u}; \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u} \neq \vec{o}, \vec{v} \neq \vec{o} \wedge \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \neq \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot k \cdot \vec{u}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \text{ jsou lineárně nezávislé vektory.}$$

Věta 4 b) *$\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}}, \vec{u_k} + \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz: $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou lin. nezávislé $\Leftrightarrow$ $\vec{u_1}, ..., \vec{u_{k-1}}$ jsou nezávislé a navíc:

$$\vec{o} \neq \vec{u_k} \neq l_1 \cdot \vec{u_1} + l_2 \cdot \vec{u_2} + ... + l_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$$

(pro žádnou kombinaci $l_1, ..., l_{k-1}$, z nichž aspoň jedno číslo je nenulové).

To nastane právě tehdy, když $\vec{u_1}, ..., \vec{u_{k-1}}$ jsou nezávislé a navíc:

$$\vec{u_k} + \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}} \neq \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}} + l_1 \cdot \vec{u_1} + ... + l_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{u_1}, ..., \vec{u_{k-1}}, \vec{u_k} + \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$$

jsou lin. nezávislé.

Poznámka:

1) Nezávislost vektorů se nemění, podobně jako výsledek determinantu (vlastnost $D4$), když k jednomu vektoru přičteme lineární kombinaci vektorů ostatních.

Z toho plyne i postup, jak zjišťujeme, zda posloupnost vektorů je lineárně nezávislá: vložíme vektory jako řádky do matice a tu převedeme na schodový tvar pomocí úpravy $D4$.

Tím se nemění závislost/nezávislost těchto vektorů.

Když v průběhu úprav dostaneme z řádku $\vec{a_l}$ řádek samých nul ($\vec{a_l} + \alpha_1 \cdot \vec{a_1} + ... + \alpha_k \cdot \vec{a_k} = \vec{o}$), znamená to, že $\vec{a_l} = -\alpha_1 \cdot \vec{a_1} - ... - \alpha_k \cdot \vec{a_k}$, tj. $\vec{a_l}$ je lineární kombinací některých jiných řádků $\Leftrightarrow$ původní řádky matice byly lineárně závislé.

b) Víme dokonce víc: ten řádek, ze kterého pomocí úpravy $D4$ vyjde řádek samých nul, je lineárně závislý na ostatních řádcích, tj. když hledáme minimální množinu generátorů (=bázi) daného podprostoru, můžeme tento vektor vypustit.

Příklad 19 *(Zlatoš 104, př. 45a)*

a) *Vyberte ze zadaných vektorů lineárně nezávislé vektory, které generují tentýž vektorový podprostor jako původní vektory:*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) *Zjistěte, zda vektor* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *patří do* $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Řešení:

ad a) Dejme vektory do řádků matice a upravme ji na schodový tvar pomocí úpravy $D4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 \cdot r_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{3} \cdot r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí vektor lze vypustit, protože je závislý na prvních dvou vektorech:

$\rightarrow$ posloupnost $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ je bází vektorového podprostoru $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

ad b) $L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$:

Hledejme α_1, α_2 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, tj. rozepsáním do souřadnic řešíme systém lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \\ 2 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3} \\ -1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

Nemůže nastat, systém rovnic nemá řešení, tedy $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \notin L(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Příklad 20 *(Zlatoš 119, 5.3a) Doplňte vektory* $g(x) = 1 + 2x + 7x^2, h(x) = 1 + x$ *na bázi prostoru všech polynomů stupně nejvýš* 2 *s reálnými koeficienty (nad tělesem* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*).*

Řešení: Polynom stupně 2 má tři koeficienty, tj. $dim(\mathbb{R}^2[x], +, \cdot) = 3$. Zbývá doplnit bázi jedním vektorem:

$$g(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, h(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{,...např. } i(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tj. } i(x) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...příslušný schodový tvar neobsahuje nulový řádek, tedy žádný vektor není závislý na těch ostatních.

Příklad 21 *(Zlatoš 099, př. 4.5.1) Zjistěte, zda patří vektory*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

do lineárního obalu vektorů

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{x_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$\vec{y} \in \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$**?** Řešíme systém linárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha_1 + 3\alpha_3, \\ 5 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ -2 &= -\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_4, \\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4. \end{aligned}$$

Systém lineárních rovnic má alespoň jedno řešení, tedy $\vec{y} \in \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$.

$\vec{z} \in \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$**?** Řešíme systém lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rozepíšeme do souřadnic:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 + 3\alpha_3, \\ 1 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \\ 1 &= -\alpha_1 - 3\alpha_3 + \alpha_4, \\ 1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4. \end{aligned}$$

Systém lineárních rovnic nemá řešení, tedy $\vec{z} \notin \langle \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4} \rangle$.

Definice 14 *Při řešení systému lineárních rovnic (SLR):*

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m. \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $x_i \in \mathbb{R}$ jsou neznámé, jsou následující úpravy označovány za **elementární řádkové úpravy***:*

a) *vynásobení některé rovnice nenulovým reálným číslem,*

b) *záměna pořadí dvou rovnic,*

c) *k dané rovnici přičteme lineární kombinaci jiných rovnic.*

Věta 5 *Elementární řádkové úpravy SLR nemění množinu řešení tohoto systému.*

Důkaz:

a) Jasné - rovnici lze vynásobit nenulovým reálným číslem, aniž se zění její řešení,

b) Jasné - na pořadí rovnic v systému nezáleží,

c) k-tou rovnici vynásobíme α_k a přičteme k l-té rovnici:

$$\begin{array}{rcl} a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + ... + a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\ a_{l1}\cdot x_1 + a_{l2}\cdot x_2 + ... + a_{ln}\cdot x_n & = & b_l / + \alpha_k \cdot r_k \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rcl} a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + ... + a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\ (a_{l1} + \alpha_k\cdot a_{k1})\cdot x_1 + ... + (a_{ln} + \alpha_k \cdot a_{kn})\cdot x_n & = & b_l + \alpha_k \cdot b_k \end{array}$$

Přičtení α_k-násobku k-té rovnice k l-té rovnici nemění množinu řešení.

Věta 6 *(Zlatoš 111) Pokud S, T jsou konečněrozměrné podprostory (= s konečnou dimenzí) vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, tak platí:*

$$dim(S+T) = dimS + dimT - dim(S\cap T)$$

Důkaz: Označme

- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$...nějaká báze prostoru $S\cap T$ $(dim(S\cap T) = k)$,
- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{m-k}}$...doplnění báze $S\cap T$ na bázi S $(dimS = m)$,
- $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_{n-k}}$...doplnění báze $S\cap T$ na bázi T $(dimT = n)$.

Nedá moc práce si uvědomit, že:

$$(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{m-k}}, \vec{w_1}, \vec{w_2}, ..., \vec{w_{n-k}})$$

je bází $(S+T)$, a dále:

- $\vec{v_i}$ jsou nezávislé na $\vec{u_i}$...plyne z konstrukce báze S,
- $\vec{w_i}$ jsou nezávislé na $\vec{u_i}$...plyne z konstrukce báze T,
- $\vec{v_i}$ jsou nezávislé na $\vec{w_i}$ (pokud by některý vektor $\vec{v_i}$ byl lineární kombinací některých vektorů $\vec{w_i}$, ležel by v $S\cap T$, což je ve sporu s označením $\vec{v_i} \rightarrow$ jedná se o vektory, které už v průniku $S\cap T$ neleží).

Pak rovnost ve větě plyne z definice dimenze jako počtu vektorů báze daného prostoru.

Příklad 22 *Jsou zadány podprostory:*

$$U_1 = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle; U_2 = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle$$

Určete bázi a dimenzi prostoru:

a) U_1,

b) U_2,

c) $U_1 + U_2$,

d) $U_1 \cap U_2$.

Řešení: $a), b), c)$ řešíme podobně: napíšeme dané vektory do řádků matice a upravujeme elementárními řádkovými úpravami na schodový tvar.

Pokud se některý řádek vynuluje, z báze ho vyhodíme - dimenzi pak určíme jako počet vektorů dané báze.

$d)$ řešíme jinak: dimenzi $U_1 \cap U_2$ lze určit pomocí $a), b), c)$ a věty 7.

Bázi průniku $U_1 \cap U_2$ hledáme následujícím způsobem: Uvažujme obecně vektor $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$. Pak je $\vec{v}$ lineární kombinací generátorů U_1 a současně lineární kombinací generátorů U_2:

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Napišme tento systém lineárních rovnic do matice, jen s tou úpravou, že vše převedeme na levou stranu rovnic a napravo zůstanou nuly:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ \\ -r_1 \\ -2 \cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -3 \cdot r_2 \\ -2 \cdot r_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -2 \cdot r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -\frac{1}{2} \cdot r_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nyní si zjednodušené rovnice přepíšeme:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 - \beta_2 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ 2\beta_3 &= 0 \Rightarrow \beta_3 = 0 \end{aligned}$$

Nyní si obecný vektor $\vec{v}$ z průniku přepíšeme jen pomocí první části, tj. pomocí α_i:

$$\vec{v} = (\beta_1+\beta_2)\cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + (\beta_1-\beta_2)\cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix} = \beta_1\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}\right) + \beta_2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\\0\end{pmatrix}\right) = \beta_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix} + \beta_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ dimenze $U_1 \cap U_2 = 2$, báze $U_1 \cap U_2$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$.

3 Týden 3

3.1 Cvičení 3: Analytická geometrie v prostoru

- Petáková 15.1. Přímka v prostoru – příklady 2, 3a, 4a, 5, 6a, 6d, 7, 8, 9, 10.
- Petáková 15.2. Vzájemná poloha přímek v prostoru – 11a, 11b, 11c, 11d, 12.
- Petáková 15.3. Parametrické a obecné zadání roviny – 16b napište rovnici roviny parametrickou i obecnou (s využitím převodu param na obecnou pomocí vektorového součinu, včetně výpočtu vektorového součinu pomocí determinantu), 20a podobně, 21 podobně. Převod některého z předchozích obecných zápisů roviny na parametrický.

3.2 Přednáška 3: Pojem afinního prostoru a afinního podprostoru

Pokud uvažujeme množinu bodů na přímce (chápeme tyto body jako vektory), která neprochází počátkem souřadné soustavy, tu nelze popsat jako vektorový podprostor aritmetického vektorového prostoru (například proto, že neobsahuje nulový vektor, a také proto, že není uzavřená vzhledem k součtu vektorů). Matematika tedy ještě musí dodat další pojmy pro popis některých lineárních útvarů: musí rozlišit body od vektorů.

Definice 15 *Nechť je $\mathcal{A}$ množina bodů, V vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R};+;\cdot)$, a $\rightarrow$ zobrazení $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\rightarrow V$, které přiřadí dvěma bodům vektor (počáteční a koncový bod), takové, že:*

a) $\forall A\in\mathcal{A},\vec{u}\in V:\exists! B\in\mathcal{A}:\vec{AB}=\vec{u},$

b) $\forall A,B,C\in\mathcal{A}:\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}.$

Potom se uspořádaná trojice $(\mathcal{A};V;\rightarrow)$ nazývá **afinní prostor se zaměřením** V.
Báze afinního prostoru = *jeho zaměření* V.
Dimenze afinního prostoru = *dimenze jeho zaměření* V.

Příklad 23 **a)** $\mathcal{A}=$ *body v rovině,* $V=$ *všechny vektory v rovině.*

$$\forall A\in\mathcal{A},\vec{u}\in V:\exists! B\in\mathcal{A}:B=A+\vec{u}$$

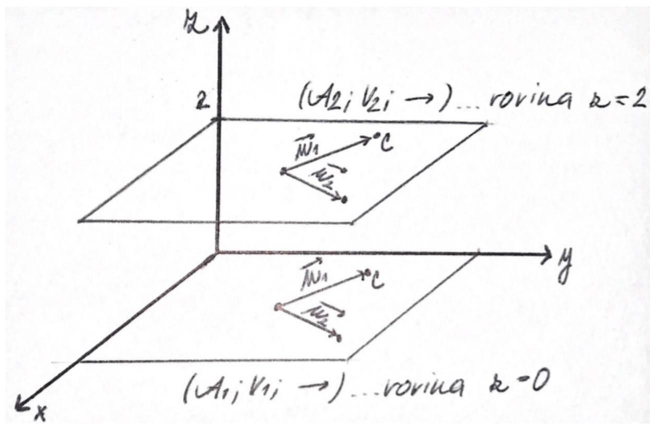
b) $\mathcal{A}=\mathbb{R}^n$, $V=\mathbb{R}^n\Rightarrow$ *body* = *vektory* $\Rightarrow(\mathcal{A};V;\rightarrow)=$ **KANONICKÝ AFINNÍ PROSTOR**.

Definice 16 *Afinní prostor* $(\mathcal{B}, W, \rightarrow)$ *se nazývá* **podprostor afinního prostoru** $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$*, jestliže:*

1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,

2) $W = \{\vec{BC} : B, C \in \mathcal{B}\}$ *je vektorovým podprostorem celého velkého velktorového prostoru* V.

Příklad 24 $(\mathcal{A}_1, V_1, \rightarrow), (\mathcal{A}_2, V_2, \rightarrow)$:



Zaměření podprostorů $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *jsou stejná, tedy* $V_1 = V_2$*, tedy i* $dim(\mathcal{A}_1) = dim(\mathcal{A}_2)$.

Definice 17 *Nechť* $\mathcal{B}$ *je podprostor afinního prostoru* $(\mathcal{A}, V, \rightarrow)$*. Pak:*

a) $dim(\mathcal{B}) = 0 \ldots \mathcal{B}$ *je bod,*

b) $dim(\mathcal{B}) = 1 \ldots \mathcal{B}$ *je přímka,*

c) $dim(\mathcal{B}) = 2 \ldots \mathcal{B}$ *je rovina,*

d) $dim(\mathcal{B}) = dim(\mathcal{A}) - 1 \ldots \mathcal{B}$ *je nadrovina.*

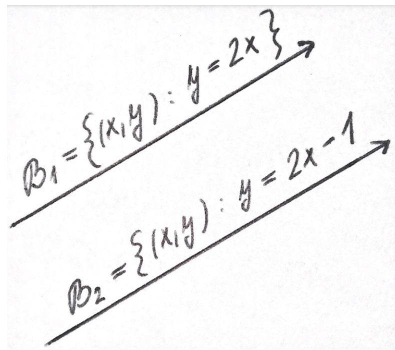
Nadrovina *afinního prostoru* $\mathcal{A}$ *je takový afinní podprostor* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$*, který má dimenzi o* 1 *menší než prostor* $\mathcal{A}$.

Příklad 25 *Pojem NADROVINA se na SŠ nezavádí, patrně však:*

- *nadrovinou roviny je přímka,*
- *nadrovinou prostoru je rovina,*
- *nadrovinou* 4*dim prostoru je každý afinní prostor dimenze* 3.

Poznámka: Máme-li afinní prostory $(\mathcal{B}_1, W, \rightarrow), (\mathcal{B}_2, W, \rightarrow)$, které mají stejná zaměření W, a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, pak $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

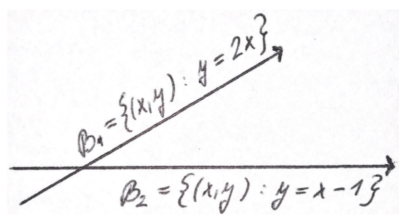
Příklad 26 a) *APP* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$*:*



Tyto AP mají stejná zaměření – W = vektory ve směru obou přímek (reálné násobky vektoru (1,2)).

$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset \Rightarrow \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *jsou rovnoběžné.*

b) *APP* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$*:*



$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$*, ale tyto AP mají různá zaměření –* W_1 *= násobky* $(1,2)$*,* W_2 *= násobky* $(1,1)$.

Definice 18 *Nechť* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ *jsou afinními podprostory afinního prostoru* $\mathcal{A}$*.*

a) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$*...podprostory se neprotínají,*

b) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$*...podprostory se protínají,*

c) *Bod* $A \in \mathcal{B}_1$*...řekneme, že podprostor* $\mathcal{B}_1$ *prochází bodem A.*

Připomínka k def. 12: Lineární obal množiny vektorů ve vektorovém prostoru $L(\vec{u}, \vec{v})$ = vektorový podprostor generovaný množinou $\vec{u}, \vec{v}$.

Označujeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo $L(\vec{u}, \vec{v})$.

Definice 19 *Nechť* $\mathcal{M}$ *je množina bodů v AP* $(\mathcal{A}, V, \to)$*, tedy* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$*.*

Afinní obal množiny $\mathcal{M}$ *je nejmenší možný APP, který obsahuje* $\mathcal{M}$*. Říkáme, že* $\mathcal{M}$ *generuje APP* $\langle \mathcal{M} \rangle$ *= AP generovaný množinou* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{M} \rangle$*.*

Body $A_0, A_1, ..., A_k$ *jsou body v obecné poloze, pokud:* $\langle A_0, A_1, ..., A_k \rangle$ *= AP jimi generovaný je k-rozměrný.*

Příklad 27 - *Body A_1, A_2, A_3 ležící na přímce v $\mathbb{R}^2$...nejsou v obecné poloze,*

- *Body A_1, A_2, A_3, A_4 v jedné rovině v $\mathbb{R}^3$...nejsou v obecné poloze, generují jen rovinu, nikoli celý $\mathbb{R}^3$.*

Věta 7 Afinní: *Nechť $\mathcal{B} = (A_0, W, \to)$ je afinní prostor a platí $X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}$.*

$$X = A_0 \cdot t_1 \cdot \vec{u_1} + t_2 \cdot \vec{u_2} + ... + t_k \cdot \vec{u_k}$$

je parametrické vyjádření APP.

Věta 7 barycentrická: *Nechť $A_0, ..., A_k$ jsou body v obecné poloze, $\mathcal{B} = \langle A_0, ..., A_k \rangle$ a*

$$X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists t_1, ..., t_k :$$

$$X = A_0 + t_1 \cdot (A_1 - A_0) + t_2 \cdot (A_2 - A_0) + ... + t_k \cdot (A_k - A_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X - A_0) = t_1 \cdot (A_1 - A_0) + t_2 \cdot (A_2 - A_0) + ... + t_k \cdot (A_k - A_0)$$

Pak:

$$X = (1 - t_1 - t_2 - ... - t_k) \cdot A_0 + t_1 \cdot A_1 + t_2 \cdot A_2 + ... + t_k \cdot A_k$$

Definice 20 *Afinní souřadnice bodu $X = t_1, ..., t_k$ z vyjádření:*

$$X = A_0 + t_1 \cdot \vec{u_1} + t_2 \cdot \vec{u_2} + ... + t_k \cdot \vec{u_k}$$

Barycentrické souřadnice bodu $X = t_0, t_1, ..., t_k$ (kde $t_0 = (1 - t_1 - t_2 - ... - t_k)$) z vyjádření:

$$X = (1 - t_1 - t_2 - ... - t_k) \cdot A_0 + t_1 \cdot A_1 + t_2 \cdot A_2 + ... + t_k \cdot A_k$$

(Viz věta 7.)

Příklad 28 *$\mathcal{A}$...trojrozměrný afinní prostor (kanonický). Podprostor $\mathcal{B}$ = přímka dána body $A = [2; -1; 1], B = [-1; 0; 1]$.*

Afinní souřadnice:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pro $t \in \mathbb{R}$.

Barycentrické souřadnice:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1 - t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde $(1 - t) = t_1, t = t_2$, tedy platí $t_1 + t_2 = 1$.

Věta 8 a) *Množina řešení každého SLR je afinní podprostor $\mathcal{B}$ kanonického afinního prostoru $\to \mathcal{B} = (P, \vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$, kde bod P je jedno konkrétní řešení tohoto SLR.*

b) *Pokud $\mathcal{B}$ zadané repérem $(P, \vec{u_1}, ..., \vec{u_k})$ je afinní podprostor, tak existuje SLR, jehož množinou řešení je $\mathcal{B}$.*

Příklad 29 *Najděte obecné rovnice přímky procházející body* $A = [2; -1; 1], B = [-1; 0; 1]$.

Řešení: Afinní podprostor $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right); t \in \mathbb{R}$.

a) Najdeme množinu $W^\perp$ vektorů ortogonálních neboli kolmých na směrový vektor přímky $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jako řešení SLR, kde řádky matice systému jsou vektory zaměření afinního podprostoru $\mathcal{B}$, v našem případě tedy SLR má jedinou rovnici, protože směrový vektor je jeden (a na pravé straně rovnice bude nula jako výsledek skalárního součinu vektoru $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ s vektorem $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$, který hledáme):

Rovnice $-3x+y+0z = 0$ má řešení (volíme dva parametry, protože tento jednoduchý SLR má jednu rovnici, ale tři neznámé):

$$\begin{array}{rcl} z & = & t \\ y & = & s \\ x & = & \frac{1}{3}s \end{array} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Čili $W^\perp = L\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. A z celé konstrukce plyne tedy to, že každý vektor množiny W je kolmý ke každému vektoru množiny $W^\perp$.

Tedy celou věc lze říci i naopak, a kvůli tomu jsme to dělali: zaměření W je množina vektorů kolmých na množinu $W^\perp$, tedy ve W jsou vektory, které jsou množinou řešení SLR-hom.:

$$\frac{1}{3}x + y + 0 \cdot z = 0 \tag{3.1}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \tag{3.2}$$

b) Zbývá dodat do našich úvah kromě vektorů ještě body afinního podprostoru $\mathcal{B}$: aby počátek $[2; -1; 1]$ afinního podprostoru $\mathcal{B}$ byl řešením systému (3.1),(3.2) změníme jeho nulové pravé strany:

Dosaďme do levých stran tohoto systému rovnic bod $[2;-1;1]$: na pravých stranách dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\cdot 2+(-1) &= -\frac{1}{3} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Tedy náš hledaný systém dvou rovnic, který je vyjádřením podprostoru $\mathcal{B}$, má tvar:

$$\frac{1}{3}x+y = -\frac{1}{3} \tag{3.3}$$

$$z = 1 \tag{3.4}$$

(od (3.1),(3.2) se systém (3.3),(3.4)liší pouze nově dodanými pravými stranami).

(každá z rovnic (3.3),(3.4) je rovnicí roviny, přímka AB je tedy určena jako průnik těchto dvou rovin)[16].

Příklad 30

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

je parametrické vyjádření afinního podprostoru $\mathcal{B}$*.*

$$W^{\perp}: \begin{aligned} x_1-x_4 &= 0 \\ -x_2-x_3+2x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_4 &= t \\ x_1 &= t \\ x_2 &= 2t-s \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zaměření...prostor W*:*

$$\begin{aligned} -x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+2x_2+x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Prostor $\mathcal{B}$*...dosadíme bod* $[1;2;-2;0]$*:*

$$\begin{aligned} -x_2+x_3 &= -4 \\ x_1+2x_2+x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Rovina ve čtyřrozměrném prostoru je průnikem dvou nadrovin.

[16] Z analytické geometrie víme, že jediná obecná rovnice přímky bodů v prostoru neexistuje, tj. od počátku jsme vlastně věděli, že hledáme rovnice dvě – přímku bodů v prostoru pomocí jedné obecné (neparametrické) rovnice vyjádřit nelze, ale pomocí dvou obecných rovnic ano. Zcela stejný algoritmus užijeme v následujícím příkladu – platí totiž, že bodový APP dimenze k v celém AP dimenze n lze vyjádřit pomocí $(n-k)$ obecných rovnic. V příkladu 29 platí $k=1$, $n=3$, tedy hledali jsme rovnice dvě, v příkladu 30 platí $k=2$, $n=4$, tj. hledané obecné rovnice budou opět dvě.

Poznámka: Pro dobré pochopení příkladů 29, 30 by se hodila předběžná definice skalárního součinu vektorů a definice kolmosti vektorů, protožeto právě využíváme při konstrukci tzv. ortogonálního doplňku $W^{\perp}$. Je dobré, že studenti už úvahy o skalárním součinu a kolmosti znají ze cvičení. A pojem velikosti vektoru je snad čtenáři též známý.

Příklad 31 *Afinní podprostor je zadán obecnými rovnicemi. Určete jeho parametrické vyjádření:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_4 & = & 6 \\ x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Řešení: Vyřešíme systém rovnic – množina řešení SLR je totiž vždy afinním prostorem. A množina řešení tohoto SLR je tedy hledaným parametrickým vyjádřením našeho APP.

4 Týden 4

4.1 Cvičení 4: Analytická geometrie v prostoru II

- Petáková 15.4: Vzájemná poloha přímky a roviny – příklady 32, 34.
- Petáková 15.5: Vzájemná poloha dvou rovin – příklady 37, 38.
- Petáková 15.6: Vzájemná poloha tří rovin – příklad 40 – zde nejpozději proberte Gaussovu eliminaci, tři možné typy počtu řešení SLR tří rovnic o třech neznámých.

Studentům lze za domácí úkol zadat příklady v rovině, které byly součástí prověrky v minulém roce (jsou v podstatě vzaty zhruba z kapitolek Petákové třetího a čtvrtého cvičení):

Úloha 4.1 **a)** *Gaussovou eliminační metodou vyřešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x+3y-5z &= 1; \\ y+2z &= 3; \\ 4x+2y-12z &= -1. \end{aligned}$$

b) *Interpretujte zadání i výsledek z části (a) geometricky.*

Úloha 4.2 **a)** *Gaussovou eliminační metodou vyřešte následující systém lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x+4y+2z &= -3; \\ 3x+2y+5z &= 0; \\ 10y+z &= -6. \end{aligned}$$

b) *Interpretujte zadání i výsledek z části (a) geometricky.*

Úloha 4.3 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}$$

a) Vyřešte systém v oboru reálných čísel,

b) interpretujte zadání i výsledek z a) geometricky.

Úloha 4.4 *Je dán následující systém tří rovnic o čtyřech neznámých:*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Vyřešte systém v oboru reálných čísel pomocí Gaussovy eliminační metody.

Úloha 4.5 a) *(za 1 bod) Dokažte, že přímka* $p = \{[1+t; 2-2t; 0], t \in R\}$ *a bod* $A = [1; 0; 3]$ *určují rovinu.*

b) *(za 2 body) Napište rovnici roviny z bodu (a) – můžete si vybrat, zda ve tvaru obecném nebo parametrickém.*

Úloha 4.6 a) *(za 1 bod) Dokažte, že přímky* $p = \{[\frac{5}{2}; 2+t; 0], t \in R\}$, $q = \{[3; 1+k; 2], k \in R$ *určují rovinu.*

b) *(za 2 body) Napište rovnici roviny z bodu (a) – můžete si vybrat, zda ve tvaru obecném nebo parametrickém.*

Úloha 4.7 a) *(za 1 bod) Jaká je vzájemná poloha přímky*
$p = \{[2s; 4+s; -1], s \in R\}$ *a roviny* $\rho:\ x - 2y - 3z + 5 = 0$*?*

b) *(za 2 body) Napište rovnici nějaké kolmice na rovinu* ρ*, která protíná přímku* p*.*

Úloha 4.8 a) *(za 2 body) Jaká je vzájemná poloha přímky* $q = \{[2+t; 3t; 1-t], t \in R\}$ *a roviny*
$\rho = \{[1+s+2r; 3s+3r; 1-s-3r], s, r \in R$*?*

b) *(za 1 bod) Napište rovnici nějaké kolmice na rovinu* ρ*, která protíná přímku* q*.*

Úloha 4.9 a) *(za 1 bod) Napište (v parametrickém nebo obecném tvaru) rovnici roviny* ρ*, ve které leží body* $A = [2; 3; 0]$*,* $B = [-1; 2; 2]$ *a která je kolmá k rovině* $\sigma:\ 3x - 2y + z + 6 = 0$.

b) *(za 2 body) Vyjádřete parametrickými rovnicemi průnik obou rovin z bodu (a).*

Úloha 4.10 *Je zadán bod* $A = [3; -2; 2]$*, a rovina* $\rho:\ 2x - y + 3z = 0$*. Najděte souřadnice bodu* A'*, jenž získáme jako obraz bodu* A *v rovinné souměrnosti vzhledem k rovině* ρ*.*

4.2 Přednáška 4: Vzájemná poloha podprostorů – vektorových i afinních

Vzájemná poloha podprostorů:

a) Součet a průnik vektorových podprostorů,

- průnik VPP je VPP,
- sjednocení VPP nemusí být VPP – $\langle U \cup V \rangle$ = nejmenší možný VPP obsahující $dim(W_1 + W_2)$ = prostor lineárních kombinací vektorů z U, V,
- součet VPP je VPP – $U + V = L(U \cup V)$.

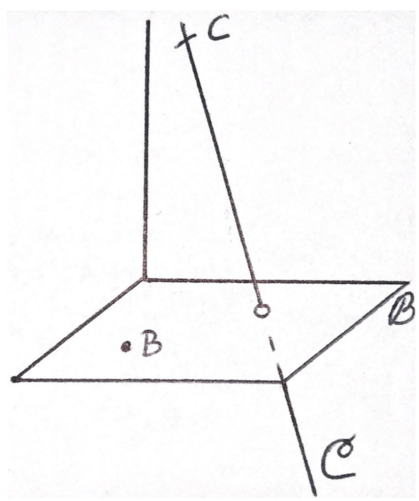
b) Součet a průnik afinních podprostorů,

- průnik APP je APP,
- sjednocení APP nemusí být APP.

c) Vzájemná poloha podprostorů.

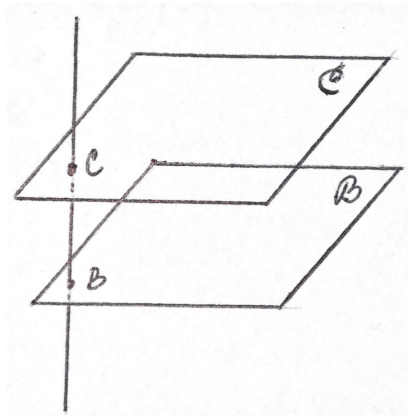
Definice 21 *Součet afinních podprostorů je afinní obal jejich sjednocení, tedy $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.*

Příklad 32 *Sjednocení APP není obecně APP, umíme ale přidat k bodům vektory z nich vytvořené: těch může být více.*



Prostor $(B; W_1 + W_2)$ má dimenzi $dim(W_1 + W_2) = 3$. Zároveň $dim(\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle) = 3$.

Příklad 33 *Podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:*



Prostor $(B; W_1 + W_2 + L(B; C))$, tedy dimenze $dim(W_1 + W_2) + 1 = 3$ – (třetí rozměr dimenze dosadíme přímku $\vec{BC}$).

Definice 22 *APP mohou být: různoběžné, rovnoběžné, mimoběžné.*

Věta 9 *Vzájemná poloha APP – podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou:*

a) *<u>Incidentní</u>, rovnoběžné v inkluzi, když:*

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \;\; nebo \;\; \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow (W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1) \wedge \vec{BC} \in W_1 + W_2$$

b) *<u>Rovnoběžné</u> různé, když:*

$$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C} \wedge \mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Leftrightarrow (W_1 \subseteq W_2 \vee W_2 \subseteq W_1) \wedge \vec{BC} \notin W_1 + W_2$$

c) *<u>Různoběžné</u>, když:*

$$\mathcal{B}, \mathcal{C} \;\; různoběžné \;\; \Leftrightarrow (W_1 \not\subseteq W_2) \wedge (W_2 \not\subseteq W_1) \wedge \vec{BC} \in W_1 + W_2$$

d) *<u>Mimoběžné</u>, když:*

$$\mathcal{B}, \mathcal{C} \;\; mimoběžné \;\; \Leftrightarrow (W_1 \not\subseteq W_2) \wedge (W_2 \not\subseteq W_1) \wedge \vec{BC} \notin W_1 + W_2$$

Pokud mimoběžné prostory spojujeme příčkou, máme zde dva typy úloh:

a) Nalezněte příčku rovnoběžnou s daným <u>směrem</u> – nemá řešení, pokud směr leží v $W_1 + W_2$,

b) Nalezněte příčku procházející daným <u>bodem</u>.

Příklad 34 - *Hanyška, Horák, úloha 6.1, str. 38*

Příklad 35 - *Hanyška, Horák, úloha 6.2, str. 39*

Příklad 36 - *Hanyška, Horák, úloha 6.3, str. 40*

Příklad 37 - *Hanyška, Horák, úloha 6.4, str. 40*

Poznámka: Tato kapitola by si zasluhovala i předběžnou definici vektorového součinu (představený středoškolsky, ale též pomocí determinantu), protože bude použita ve čtvrtém či pátém týdnu na cvičení.

5 Týden 5

5.1 Cvičení 5: Skalární a vektorový součin vektorů

Poznámka pro cvičícího: celé cvičení 5 je v podstatě do foroty, pokud vám zbývá čas – lze je celé vypustit, popřípadě udělat jen jeho část, protože k podobným výpočtům se pak studenti vrátí v předmětu Geometrie 2. Soustřeďte se tedy na projití prvních čtyř cvičení pečlivě.

- Petáková 13.6. – připomínka výpočtu velikosti vektoru v aritmetickém vektorovém prostoru z Pythagorovy věty, příklady 24 (dvojí výpočet skalárního součinu vektorů), 28, 29, 34, 35, 36, 37.

- Speciální příklad týkající se skalárního součinu a ortogonálního vektorů: Najděte kolmý průmět vektoru $\vec{u} = (2, 1, 0)$ do směru vektoru $\vec{v} = (1, -1, \sqrt{2})$ pomocí běžných nástrojů kolmice a průsečíku dvou přímek (lze pak porovnat výsledek skalárního součinu zadaných vektorů a) pomocí vektoru průmětu, b) pomocí klasického vzorce skalárního součinu v aritmetickém vektorovém prostoru ze souřadnic vektorů.

- Najděte kolmý průmět zadaného vektoru do zadané roviny.

- Petáková 13.7: vektorový součin vektorů (příklady 46,47,48, 54), plus příklad na hledání osy mimoběžek pomocí vektorového součinu.

5.2 Přednáška 5: Homogenní a nehomogenní SLR, princip superpozice

Tato přednáška konečně shrnuje základní pojmy teorie řešení SLR, které už vlastně byly skoro všechny probrány na cvičení pří praktickém počítání, tj. jedná se o odpočinkovou přednášku – nebo čas pro dohnání restů minulých čtyř přednášek?

Řada úloh lineární algebry vede na řešení systému lineárních rovnic. Dále se s nimi setkáváme v elektrotechnice (Kirchhoffovy zákony), v ekonomii (tzv. úloha lineárního programování) a v dalších oborech.

Definice 23 **Hodnost matice** *A (typu m/n) = počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne z matice A elementárními řádkovými úpravami.*

Poznámka:

1) Na základě věty 4 (elementární řádkové úpravy nemění lineární závislost/nezávislost řádků) můžeme definici hodnosti matice A vyslovit i jinak: <u>hodnost matice A</u> = dimenze vektorového prostoru generovaného jejími řádky.

2) Protože z řádků matice A lze vybrat bázi podprostoru těmito řádky generovaného (tak, že vyřadíme řádky lineárně závislé na jiných řádcích), v příslušném schodovém tvaru budou nebázické řádky právě řádky samých nul.

Definice 24 *Uvažujme obecný SLR. Pak:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ se nazývá } \textbf{matice systému},$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ se nazývá } \textbf{rozšířená matice systému } SLR.$$

Věta 10 *$h(A) = h(A^T)$...hodnost matice A je stejná jako hodnost matice transponované A^T.*

Důkaz: Důkaz nebudeme provádět, ale věta je tak zajímavá, že je dobré ji na tomto místě zmínit.

Poznámka. Věta 10 vlastně říká, že maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného řádky) je stejné číslo, jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A (tj. dimenze podprostoru generovaného sloupci), a to bez ohledu na typ matice.

Např. pokud je A typu $3/7$ a $h(A) = 2$, znamená to, že dimenze podprostoru generovaného sloupci je také 2, a při hledání báze podprostoru generovaného sloupci máme 5 sloupců vyloučit.

Věta 11 Frobenius-Kronecker-Capelli: *SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení* $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A|b)$.

Důkaz: SLR má řešení $[A_1, A_2, ..., A_n]$ (ta n-tice je jen jedno řešení, nikoli n řešení). Pak:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\cdot t_1 + a_{12}\cdot t_2 + ... + a_{1n}\cdot t_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot t_1 + a_{22}\cdot t_2 + ... + a_{2n}\cdot t_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1}\cdot t_1 + a_{m2}\cdot t_2 + ... + a_{mn}\cdot t_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot A_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot A_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot A_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

tj. sloupec béček je linární kombinace sloupců áček, tj. přidáním vektorů béček se nezmění sloupcová hodnost $\Leftrightarrow h(A) = h(A|b)$, protože podle věty 8 je sloupcová hodnost totéž co řádková hodnost.

Na základě příkladů 12, 13, 14, 15 lze tedy uzavřít: SLR

a) Nemá žádné řešení, pokud $h(A) < h(A|b)$,

b) Má právě jedno řešení, pokud $h(A) = h(A|b) = n$,

c) Má nekonečně mnoho řešení, pokud $h(A) = h(A|b) < n$. kde n je počet neznámých SLR.

Zabývejme se nyní ještě chviličku tzv. homogenním SLR, protože ten má zajímavé vlastnosti z hlediska pojmu vektorový prostor:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\cdot t_1 + a_{12}\cdot t_2 + ... + a_{1n}\cdot t_n & = & 0 \\ a_{21}\cdot t_1 + a_{22}\cdot t_2 + ... + a_{2n}\cdot t_n & = & 0 \\ & ... & \\ a_{m1}\cdot t_1 + a_{m2}\cdot t_2 + ... + a_{mn}\cdot t_n & = & 0 \end{array}$$

Za prvé, n-tice $[0; 0; ...; 0]$ je vždy řešením SLR-hom., po dosazení je 0 na pravé i levé straně rovnic.

Věta 12 *Množina řešení SLR-hom. tvoří vektorový prostor dimenze $n - h(A)$, kde n je počet neznámých a $h(A)$ hodnost příslušné matice systému.*

Důkaz: Pro důkaz vektorového podprostoru stačí ukázat, že pro dvě řešení:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ ... \\ s_n \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ ... \\ t_n \end{pmatrix}$$

je i každá jejich lineární kombinace $\alpha \cdot \vec{s} + \beta \cdot \vec{t}$ také řešením SLR-hom:
$\vec{s}$ je řešením:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \vec{s_1} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \vec{s_2} + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \vec{s_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{t}$ je řešením:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \vec{t_1} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \vec{t_2} + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \vec{t_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ pak $\alpha \cdot \vec{s} + \beta \cdot \vec{t}$ je řešením SLR-hom:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot (\alpha \cdot s_1 + \beta \cdot t_1) + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot (\alpha \cdot s_n + \beta \cdot t_n) = \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot s_1 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot s_n + \right) +$$

$$+\beta \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot t_1 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot t_n \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 38 *Najděte všechna řešení SLR-hom:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_5 &= 0 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Matice systému už je ve schodovém tvaru, tj. jen sestavíme množinu řešení.

Protože $h(A) < 5 = n$, víme, že řešení bude nekonečně mnoho. Dále víme, že počet parametrů, za které lze dosadit jakékoli reálné číslo, je $n - h(A) = 5 - 3 = 2$...dvě neznámé označíme jako parametry, například:

$x_5 = t$

x_4...nemůžeme volit jako parametr, protože ze třetí rovnice vyjádříme v závislosti na x_5:

$$x_4 = 2x_5 = 2t$$

x_3...nemůžeme volit jako parametr, protože ze druhé rovnice vyjádříme v závislosti na x_5:

$$x_3 = -\frac{1}{2}, x_5 = -\frac{1}{2}t$$

$x_2 = s$

x_1 vyjádříme z první rovnice:

$$x_1 = -2x_2 + \frac{1}{3}, x_5 = -2s + \frac{1}{3}t$$

Celkem množina řešení:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} -2s + \frac{1}{3}t \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$n - h(A)$ nezávislých vektorů tvoří tzv. <u>fundamentální systém řešení</u>. Jejich lineární kombinace:

$$s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá <u>obecné řešení SLR-hom.</u>

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je řešení, které dostaneme volbou parametrů $s = 1, t = 0$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je řešení, které dostaneme volbou $s = 0, t = 1$.

Touto nezávislou volbou parametrů (jeden je roven jedné, druhý je roven nule) dostaneme tzv. fundamentální řešení, které vytváří bázi prostoru K všech řešení SLR-hom.

Definice 25 Obecné řešení SLR, SLR-hom...*řešení, ve kterém se vyskytují parametry.*

Partikulární řešení SLR, SLR-hom...*jedno řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.*

Jaký je vztah mezi obecným řešením SLR a obecným řešením SLR-hom? Podívejme se na konkrétní příklad, a souvislost pak zapíšeme do věty 13.

Příklad 39 *Vyřeště SLR a SLR-hom pro stejnou matici A levých stran rovnic a prozkoumejte souvislosti mezi množinami řešení:*

$$(SLR): \begin{array}{rcl} x+y+2z+3w &=& 13 \\ x-2y+z+w &=& 8 \\ 3x+y+z-w &=& 1 \end{array}$$

$$(SLR-hom): \begin{array}{rcl} x+y+2z+3w &=& 0 \\ x-2y+z+w &=& 0 \\ 3x+y+z-w &=& 0 \end{array}$$

Řešení: Nejprve SLR – zapišme systém do matice a řešme Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ -r_1 \\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -38 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -6 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & 6 & 15 & 30 & 114 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ +r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & 104 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ \cdot\frac{1}{13} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Počet parametrů: $n - h(A) = 4 - 3 = 1$.
Zpětný chod:

$x_4 = t$...parametr

$x_3 = 8 - 2t$

$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (5 - x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3} \cdot (5 - 8 + 2t - 2t) = -1$

$x_1 = 13 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 13 + 1 - 16 + 4t - 3t = -2 + t$

$$\Rightarrow \text{Obecné řešení SLR: } K = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

SLR-hom – úpravy jsou stejné, jen sloupec pravých stran jsou nuly:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Počet parametrů: $n - h(A) = 4 - 3 = 1$.
Zpětný chod:

$x_4 = t$...parametr

$x_3 = -2t$

$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (-x_3 - 2x_4) = \frac{1}{3} \cdot (2t - 2t) = 0$

$x_1 = -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4t - 3t = t$

$\Rightarrow$ Obecné řešení SLR-hom: $K_h = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Porovnání SLR a SLR-hom:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je jedno konkrétní řešení SLR volbou $t = 0$, nazveme ho partikulární řešení = jedno konkrétní řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametru či parametrů.

Věta 13 Princip superpozice: *Obecné řešení SLR = partikulární řešení SLR + obecné řešení SLR-hom.*

Maticové operace, maticová metoda řešení SLR:

Tato metoda je třetí možnou metodou řešení SLR (po Cramerově metodě v první kapitole a Gaussově eliminaci ve druhé kapitole):

Kdybychom dokázali nějak definovat násobení matic či násobení matice krát vektor, lze SLR psát v maticovém zápisu: $m = n$...VRAŤME SE K SITUACI ČTVERCOVÉ MATICE:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} / \cdot A^{-1} (\text{zleva}) \\ A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ E \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Jak víme z algebry 1, pokud by existovalo něco jako inverzní matice vzhledem k násobení, mohli bychom řešení $\vec{x}$ spočítat právě pomocí A^{-1}. Pak by se součin matice A a matice k ní inverzní A^{-1} rovnal jednotkové matici E, kterou bychom díky vlastnosti jednotkového (= neutrálního prvku) mohli z výpočtu zcela vypustit.

Podívejme se tedy na operace sčítání matic a násobení matic, v jakém smyslu je možné tyto operace definovat, a jaké vlastnosti splňují:

Definice 26 *Nechť jsou A, B matice typu m/n stejného typu. Pak součet matic $A + B$ definujeme jako matici, která vznikne sčítáním po složkách:*

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jaké vlastnosti bychom mohli u takto definovaného sčítání matic očekávat?

Věta 14 $(M_{m\times n}, +)$ *je komutativní grupa.*

Důkaz:

(1) Uzavřenost operace: výsledkem součtu je opět matice stejného typu m/n,

(2) Asociativita: $(A+B)+C = A+(B+C)$...plyne z asociativity sčítání reálných čísel,

(3) Neutrální prvek vzhledem ke sčítání je matice samých nul typu m/n,

(4) Inverzní k A je matice $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

(5) Komutativita plyne z komutativity sčítání reálných čísel.

Se zkoumáním maticového násobení a maticovou metodou řešení SLR budeme pokračovat v následující přednášce, tedy v přednášce 7, pokud doba příští přednášky bude věnována napsání prověrky ze cvičení.

6 Týden 6

6.1 Cvičení 6: prověrka-a

Prověrka-a na témata určená cvičícím.

6.2 Přednáška 6: Prověrka ze cvičení, bude-li potřeba poskytnout dobu a učebnu přednášky

7 Týden 7

7.1 Cvičení 7: Cramerovo pravidlo, výpočet determinantů

- Výpočet determinantu řádu 2, řádu 3, řádu 4 (u řádu 4 připomeňte definici determinantu).
- Laplaceův rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce, úprava determinantu na schodový tvar, výpočet několika determinantů na základě všech možných vlastností a úprav.
- Cramerovo pravidlo při řešení SLR.

Příklady z prověrky 2019:

Úloha 7.1 a) *(za 2 body) Pomocí Laplaceova rozvoje 5.řádku zjednodušte výpočet determinantu řádu 5 pomocí několika determinantů řádu 4. Výsledek nedopočítávejte, proveďte jen dosazení do Laplaceova rozvoje:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) *(za 2 body) Zdůvodněte, jaké znaménko je při výpočtu determinantu řádu šest matice A u součinu*

$$a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{65}.$$

Úloha 7.2 a) *(za 2 body) Pomocí Laplaceova rozvoje 2.sloupce zjednodušte výpočet determinantu řádu 5 pomocí několika determinantů řádu 4. Výsledek nedopočítávejte, proveďte jen dosazení do Laplaceova rozvoje:*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) *(za 2 body) Zdůvodněte, jaké znaménko je při výpočtu determinantu řádu šest matice A u součinu*

$$a_{14} \cdot a_{25} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{51} \cdot a_{66}.$$

Úloha 7.3 *Vypočtěte hodnotu determinantu*

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Úloha 7.4 *Je dána matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) *Vypočítejte determinant matice A (za 3 body).*

b) *Jaké znaménko by měl při výpočtu determinantu matice A součin $a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$, pokud byste použili vzorec z definice determinantu (za 2 body)?*

Úloha 7.5 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -3x & + & 4y & - & 5z & = & 1 \end{array}$$

a) *Uveďte důvod, proč zadaný systém nelze řešit Cramerovým pravidlem (za 1 bod).*

b) *Vyřešte systém v oboru reálných čísel pomocí Gaussovy eliminační metody (za 3 body).*

Úloha 7.6 *Je dán následující systém tří rovnic o třech neznámých:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 12 \end{array}$$

a) *Ověřte, že zadaný systém lze řešit Cramerovým pravidlem (za 1 bod).*

b) *Vyřešte systém v oboru reálných čísel pomocí Cramerova pravidla (za 3 body).*

Úloha 7.7 *Vypočtěte hodnotu následujícího determinantu.*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

7.2 Přednáška 7: Operace s maticemi, inverzní matice, maticová metoda řešení SLR

Definice 27 *Nechť A je matice typu m/k a B je matice typu k/n. Pak lze definovat* <u>*součin matic*</u> *$C = A \cdot B$ jako matici typu m/n, kterou získáme pomocí vzorce:*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ik} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1j} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2j} & b_{2n} \\ ... & & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kj} & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1k} \cdot b_{k1} & ... & a_{11} \cdot b_{1n} + a_{12} \cdot b_{2n} + ... + a_{1k} \cdot b_{kn} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + ... + a_{2k} \cdot b_{k1} & ... & a_{21} \cdot b_{1n} + a_{22} \cdot b_{2n} + ... + a_{2k} \cdot b_{kn} \\ ... & c_{ij} & ... \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + ... + a_{mk} \cdot b_{k1} & ... & a_{m1} \cdot b_{1n} + a_{m2} \cdot b_{2n} + ... + a_{mk} \cdot b_{kn} \end{pmatrix}$$

Poznámka: Pokud trochu předběhneme pojem skalárního součinu, na pozici (i, j) výsledné matice se vyskytuje skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B, jak jej známe možná z analytické geometrie SŠ:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

(Složky obou vektorů na odpovídajících pozicích vynásobíme, všechny tyto součiny sečteme). Z toho také plyne, že násobení matic lze provést jen tehdy, když počet sloupců matice první je roven počtu řádků matice druhé v daném pořadí (skalární součin aritmetických vektorů o různém počtu souřadnic totiž nemá smysl).

Příklad 40 *Pro matice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ *typu* $3/4$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ *typu* $4/2$ *je součinem* $C = A \cdot B$ *matice typu* $3/2$, *kde:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 + (-7) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-7) \cdot (-3) \\ -8 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) & -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-5) \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1;2;-1;0)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (1;2;-1;0)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \\ (0;1;-1;-7)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (0;1;-1;-7)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \\ (-8;0;0;-5)\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\-2\end{pmatrix} & (-8;0;0;-5)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-3\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & 22 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

Při násobení matic tedy podstatně záleží na jejich pořadí – počet sloupců první matice musí být stejný jako počet řádků druhé matice.

Abychom mohli vůbec realizovat násobení matic bez ohledu na jejich pořadí a snažit se hledat inverzní matici A^{-1} k matici A bez ohledu na pořadí, ve kterém tyto dvě matice násobíme, musíme se omezit na čtvercové matice typu n/n neboli čtvercové matice řádu n.

Definice 28 *Čtvercová matice A řádu n je:*

a) **singulární**, *jestliže $h(A) < n$,*

b) **regulární**, *jestliže $h(A) = n$.*

Věta 15 *Množina $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ čtvercových matic řádu n je nekomutativní okruh, který obsahuje netriviální dělitele nuly.*

Důkaz: Už jsme a) dokázali ve větě 14, že $(M_{nn}, +)$ je komutativní grupa, zbývá tedy b) dokázat (ukázat) vlastnosti, které se týkají operace násobení, a pak c) vlastnosti týkající se souhry obou operací (viz definice okruhu z Algebry 1):

(1) Vynásobením dvou čtvercových matic řádu n vznikne čtvercová matice řádu n...to plyne z definice násobení matic,

(2) Násobení matic je asociativní: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$...důkaz rozepsáním součinu na každé pozici matic na obou stranách rovnosti,

(3) Vzhledem k násobení čtvercových matic $\exists$ neutrální prvek, tzv. jednotková matice:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

...jedničky má pouze na hlavní diagonále, jinak jsou všude nuly,

(4a) Inverzní matice A^{-1} k matici A – existuje jen někdy, a sice právě tehdy, když A je regulární (důkaz plyne z diskuze u metody výpočtu inverzní matice, viz dále); obecně tedy inverzní matice nemusí existovat,

(4b) Množina obsahuje tzv. netriviální dělitele nuly, tj. nenulové matice, jejichž součinem je nulová matice – například pro $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

...matice A, B jsou netriviální dělitelé nuly (nula = neutrální prvek vzhledem ke sčítání, nikoli k násobení – viz Algebra 1!!!).

(5) Násobení matic není obecně komutativní – buď v opačné pořadí matice vůbec nelze násobit, nebo u čtvercových matic dostáváme často různé výsledky.

Vezmeme-li například uvedené dělitele nuly pro $n = 3$ (tj. $A \cdot B = O$) a vynásobíme je v opačném pořadí, dostaneme:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Co se týká operace násobení čtercových matic, $(M_{n \times n}, \cdot)$ je tedy nekomutativní monoid, protože (ještě bude na příkladech potvrzeno) inverze vzhledem k násobení existují jenom někdy.

(6) A zbývá ověřit vzájemnou souhru operací, tj. distributivní pravidla:

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ (B + C) \cdot A &= B \cdot A + C \cdot A \end{aligned}$$

...lze dokázat rozepsáním výsledku na pozici i, j.

Tedy celkem, podtrženo a sečteno, $(M_{n \times n}, +, \cdot)$ je nekomutativní okruh (který není oborem integrity jednak díky nekomutativitě operace násobení, jednak díky existenci nenulových dělitelů nuly). Důkaz je hotov. $\square$

Rýsuje se nám tedy odpověď na otázku, kdy lze řešit SLR maticovou metodou: jen tehdy, když A je čtvercová $(m = n)$ a regulární $(h(A) = n)$.

Maticová metoda řešení SLR (pokračování ze závěru přednášky 5):

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= \vec{b} / \cdot A^{-1} zleva \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Popíšeme nejprve na příkladu tzv. Gaussovu-Jordanovu metodu výpočtu inverzní matice, a potom ve větách 16, 17 ukážeme, že tento postup je oprávněný a vede k cíli vždy, když A^{-1} existuje.

Příklad 41 *Pro* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *nalezněte inverzní matici* A^{-1} *tak, aby:*

$$A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\, A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Začneme tak, že napíšeme matici A, a za ní doprava matici E, tj $(A|E)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dále elementárními řádkovými úpravami upravíme tuto matici typu 3/6 na schodový tvar Gaussovou metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \cdot r_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +3 \cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot \frac{1}{2} \end{array} \sim$$

Vynásobením řádků zajistíme, aby na hlavní diagonále byly hodnoty 1.

Zde by končila Gaussova metoda u systému rovnic.

My ovšem pokračujeme dále a "vyrábíme"nuly také nad hlavní diagonálou tak, abychom neporušili nuly pod diagonálou – budeme pokračovat tak dlouho, až na levé straně vytvoříme jednotkovou matici.

Při úpravách r_2 použijeme násobek řádku r_3, který neporuší hodnoty $a_{21} = 0, a_{22} = 1$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \cdot r_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \cdot r_2 - 3 \cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

a v pravé části schématu jsme dostali matici $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$.

Lze provést zkoušku:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= E \\ A^{-1} \cdot A &= E \end{aligned}$$

Věta 16 *Každou EŘÚ matice A (přičtění násobku jiného řádku, vynásobení řádku nenulovým číslem, výměna dvou řádků) lze reprezentovat obnásobením matice A jistou regulární maticí zleva.*

Důkaz: Ukážeme na příkladu, ve kterém použijeme všechny typy elementárních řádkových úprav:

Ad příklad 41:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad -2 \cdot r_1 \text{ ... úprava } P_1$$

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ... úprava } P_2 = \text{ výměna } r_2, r_3$$

$$P_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad +3 \cdot r_2 \text{ ... úprava } P_3$$

$$P_3: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \cdot\tfrac{1}{2} \text{ ... úprava } P_4$$

$$P_4: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -2 \cdot r_3 \text{ ... úprava } P_5$$

$$P_5: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -2 \cdot r_2 - 3 \cdot r_3 \text{ ... úprava } P_6$$

$$P_6: \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provedli jsme celkem výpočet $P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = E_3$. Každý z typů EŘÚ jsme realizovali vynásobením jistou maticí P_i. Všimněte si také, že všechny matice P_i jsou regulární, tj. jejich hodnost je maximální možná. □

Věta 17 **Gaussova-Jordanova metoda**: *$(A|E) \sim$ EŘÚ $\sim (E|A^{-1})$ najde vždy inverzní matici A^{-1}, pokud A^{-1} existuje.*

Důkaz: Ad důkaz věty 16 na příkladu 41: Jak je možné, že pomocí EŘÚ matice A lze spočítat A^{-1}, když tytéž EŘÚ použijeme na matici E_3?

To plyne z faktu, že EŘÚ představují vynásobení maticemi P_i: $P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A = E_3$ podle věty 4 z textu Algebra 1 (základní vlastnosti v každé grupě): pokud součin dvou matic je roven neutrálnímu prvku, pak tyto matice jsou si navzájem inverzní.

A navíc lze psát:

$$P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot \quad = \quad P_6 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot E_3,$$

kde E_3 je neutrální prvek vzhledem k operaci násobení a součin na pravé straně rovnosti znamená, že na jednotkovou matici E_3 použijeme EŘÚ, kterými jsme převáděli A na E_3.

(K přímému důkazu věty 17 bychom potřebovali dokázat i vztah:

$$A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 = E$$

kde $Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 \cdot Q_5 \cdot Q_6 = A^{-1}$, protože násobení je obecně nekomutativní.

Obnásobení maticí Q_i zprava představuje sloupcové úpravy, a matici A^{-1} bychom získali tak, že bychom vytvořili matici typu 6/3, $(\frac{A}{E})$ (jednotkovou matici bychom napsali pod matici A), a prováděli Gaussovu eliminaci pro sloupce, nikoli pro řádky. Tento odstaveček není povinnou částí důkazu, doplňuje pouze celkový obraz: řádkové úpravy matic lze reprezentovat obnásobením jistou regulární maticí zleva, sloupcové úpravy matic lze reprezentovat obnásobením regulární maticí zprava.) $\square$

Poznámka: Také je z postupu pro výpočet A^{-1} při úpravách schématu $(A|E)$ jasné, proč tato inverze existuje jen někdy: pokud ve schodovém tvaru vzniklém z matice A pomocí EŘÚ je některý řádek v levé části schématu nulový (některý prvek na hlavní diagonále schodového tvaru je roven nule), tj. to znamená, že aspoň jeden řádek matice A je závislý na těch ostatních, tak potom žadnými EŘÚ nelze regulérně „vyrobit“ z tohoto řádku řádek nezávislý na těch ostatních, protože EŘÚ zachovávají závislost/nezávislost řádků matice A. Tedy v takovém případě pomocí EŘÚ nelze převést A na jednotkovou matici, ve které jsou všechny řádky lineárně nezávislé.
(V takovém případě A^{-1} neexistuje, protože matice A je singulární.)

Ad příklad 21 Vyřešme metodou A^{-1} systém lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \qquad + 3\alpha_3 \qquad &= 3\\
\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \qquad &= 5\\
-\alpha_1 \qquad - 3\alpha_3 + \alpha_4 &= -2\\
-\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 1
\end{aligned}$$

Řešení: Přepišme si systém maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 5\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} / \cdot A^{-1}(\text{zleva})$$

Najdeme matici A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -r_1\\ +r_1\\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\frac{1}{2}\cdot r_4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3\cdot r_3 \\ +2\cdot r_3 - 2\cdot r_4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\vec{\alpha} = A^{-1}\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj.:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

neboli $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in L(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \vec{x_4})$.

8 Týden 8

8.1 Cvičení 8: Vzájemná poloha vektorových podprostorů, dimenze a báze součtu a průniku vektorových podprostorů.

Obsah tohoto cvičení urychlete tak, abyste ve druhé polovině se věnovali úloze najít dimenzi a bázi součtu a průniku podprostorů.

- Definice vektorového prostoru (jen stručně – odkažte na přednášku číslo 1). Dimenze, báze a souřadnice.
- Příklady vektorových prostorů: aritmetický vektorový prostor R^n, prostor polynomů $R_n[x]$ stupně nejvýše n, prostor spojitých reálných funkcí.
- Vektorový podprostor, součet a průnik vektorových podprostorů, vzájemná poloha vektorových podprostorů (úloha určení dimenze a báze součtu a průniku podprostorů).

Příklady z prověrky 2019:

Úloha 8.1 *Určete, zda W je vektorový podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3: rovina W je zadaná rovnicí*

$$2x + y - 3z + 6 = 0.$$

Úloha 8.2 *Určete, zda W je vektorový podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3: rovina W je zadaná rovnicí*

$$2x + y - z = 0.$$

Úloha 8.3 *Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 4, -1)$, $\vec{w} = (-1, 3, 2)$. Rozhodněte, zda generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$. Své rozhodnutí zdůvodněte výpočtem.*

Úloha 8.4 *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány vektorové prostory $U = L(u_1, u_2)$ a $V = L(v_1, v_2)$, přičemž*

$$u_1 = (3, 4, 2), \quad u_2 = (0, 1, 3)$$
$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (3, 2, 2)$$

Určete dimenzi a bázi

a) součtu $U + V$ a

b) průniku $U \cap V$.

Úloha 8.5 *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou zadány vektorové prostory $U = L(u_1, u_2)$ a $V = L(v_1, v_2)$, přičemž*

$$u_1 = (1, 0, 3), \quad u_2 = (-2, 1, 0),$$
$$v_1 = (-1, 1, 3), \quad v_2 = (3, -1, 3).$$

Určete dimenzi a bázi

a) součtu $U + V$ *a*

b) průniku $U \cap V$.

Úloha 8.6 *Ve vektorovém prostoru* $\mathbb{R}^4$ *je podprostor* W *zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi* α_W *podprostoru* W.

$$\vec{u_1} = (2,1,1,4); \vec{u_2} = (0,1,0,7); \vec{u_3} = (1,2,2,3); \vec{u_4} = (4,1,2,1).$$

8.2 Přednáška 8: Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory, jádro a obor hodnot.

V algebře 1 jsme se zabývali pojmem homomorfismus mezi grupami a jeho vlastnostmi; nyní v algebře 2, teorii prostorů, se budeme též zabývat zobrazením mezi vektorovými prostory, které zachovává výsledky operace – u vektorových prostorů je ovšem kromě grupové operace součtu definována ještě operace vynásobení vektoru skalárem, tj. lineární zobrazení bude zachovávat také výsledek součinu (skalár krát vektor).

Definice 29 *Nechť jsou $(V,+,\cdot),(V',+,\cdot)$ vektorové prostory nad stejný číselným tělesem $(T,+,\cdot)$.*

Lineární zobrazení *$f: V \to V'$ je takové zobrazení, pro které platí vlastnosti:*

a) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V : \varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$*...podmínky zachování grupové operace,*

b) $\forall \vec{u} \in V, \alpha \in T : \varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$*...podmínka zachování výsledku součinu (skalár krát vektor).*

Obě podmínky lze současně vyjádřit v jedné:

$$\forall \vec{u},\vec{v} \in V, \alpha,\beta \in T : \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$$

Obraz lineární kombinace = lineární kombinace obrazů dílčích vektorů.

Poznámka: Zadání lineárního zobrazení – bude vysvětleno na příkladě (Horák, str. 85).

Budeme označovat $dimV = n$, báze $V = (\vec{e_1},\vec{e_2},...,\vec{e_n})$ a $dimV' = m$, báze $V' = (\vec{f_1},\vec{f_2},...,\vec{f_m})$. Vzhledem k těmto zvoleným bázím lze lineární zobrazení zadat:

a) Pomocí předpisu mezi souřadnicemi $\vec{v} \in V$ a $\varphi(\vec{v}) \in V'$,

b) Pomocí matice A typu $m/n : \varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$...jedná se o další využití pojmu matice,

c) Pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}),\varphi(\vec{e_2}),...,\varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů.

Příklad 42 *Uvažujme $V = \mathbb{R}^3$ s bází $\vec{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ a $V' = \mathbb{R}^2$ s bází $\vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.*

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ lze zadat:

ad a) *Vzorcem = předpisem:*

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2v_1+v_3\\v_1-v_2-v_3\end{pmatrix}$$

ad b) *Maticí A zobrazení φ v zadaných bázích:*

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(Matici A vytvoříme na základě koeficientů u souřadnic v_i ze vzorce (a), naopak ze zadané matice A lze snadno vytvořit vzorec pro φ doplněním neznámých, tj. roznásobením součinu $A \cdot \vec{v}$).

Rozměr matice A si lze pamatovat či zkontrolovat také z faktu, že:

$$\varphi(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

...maticové násobení (v tomto případě násobení matice krát vektor) musí být proveditelné! Právě zde je důležité si pamatovat, že vektor $\vec{v}$ musí být zadáván jako sloupcový vektor!!!!

ad c) *Pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})$: například ze vzorce (a) či z matice (b) lze psát:*

$$\varphi(\vec{e_1}) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_2}) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{e_3}) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obrazy základní báze jsou sloupce matice A – naopak tedy, pokud máme celé lineární zobrazení zadáno pomocí obrazů základní báze:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underline{e}} \to \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\underline{f}} ,$$

můžeme uspořádáním těchto obrazů do sloupců jednoduše vytvořit matici A.

Příklad 43 *(Horák, str. 85)*

a) *Zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované jako:*

$$\psi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + 1 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix}$$

není lineární, protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \psi(2\vec{u} + 3\vec{v}) &= \psi \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\neq \\ 2 \cdot \psi(\vec{u}) + 3 \cdot \psi(\vec{v}) &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 1 - 1 - 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \\ 1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Problematické je přičítání jedničky v první souřadnici.)

b) *Zobrazení* $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definované jako:*

$$\delta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_2 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{pmatrix}$$

není lineární, protože např. pro $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \delta(2\vec{u} + 3\vec{v}) &= \delta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\neq \\ 2 \cdot \delta(\vec{u}) + 3 \cdot \delta(\vec{v}) &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \\ 1 - 1 - 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 1 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Problematický je součin $v_1 \cdot v_2$ *v první souřadnici.)*

Poznámka:

1, Z příkladu 43 plyne poučení, že ve vzorci lineárního zobrazení se nemůže vyskytovat ani konstanta, ani nelinearita typu $v_1 \cdot v_2, v_1^2$ apod.

Ve vzorci lineárního zobrazení se tedy mohou vyskytovat právě jen <u>lineární kombinace souřadnic zobrazovaného vektoru $\vec{v}$</u>.

2, Všimněme si vztahu mezi rozměry matice A (m/n) a dimenzemi obou prostorů $m = dim(V'), n = dim(V)$.

Lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

Řada lineárních zobrazení v rovině je zobrazeními, na které jsme (snad) už zvyklí ze ZŠ/SŠ:

Příklad 44 a) *Hezké zobrazení je identita, která nedělá nic: vektor $\vec{v}$ se zobrazí na sebe sama. Maticí tohoto zobrazení je:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b) *Do třídy těchto lineárních zobrazení bychom mohli zařadit ještě projekci vektoru na osu x. Maticí zobrazení je:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

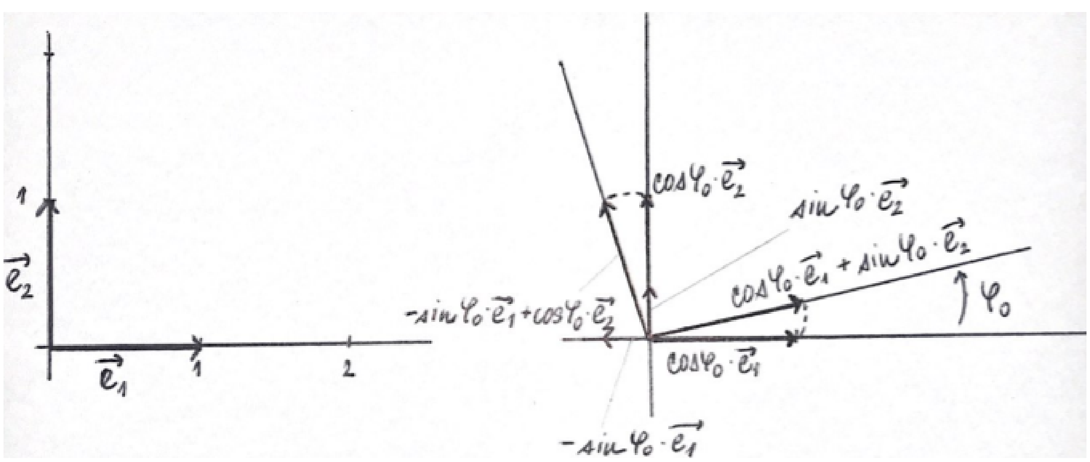
Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to B \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$*...vektor ve směru osy x.*

c) *A podobně projekce vektoru na osu y. Maticí zobrazení je:*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Např. pro $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \to C \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$*...vektor ve směru osy y.*

Příklad 45 *O něco náročnější je lineární zobrazení, které představuje otočení roviny o úhel φ_0 se středem otáčení v počátku. Odvodíme matici tohoto lin. zobrazení:*



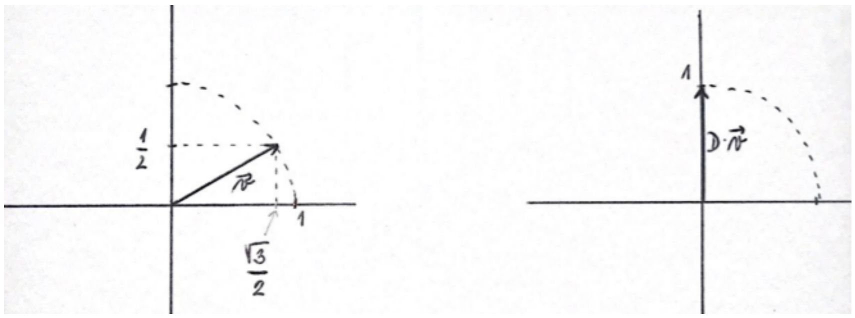
$$\textit{Obecně tedy } \varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Například pro $\varphi_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$ má matice D konkrétně tvar

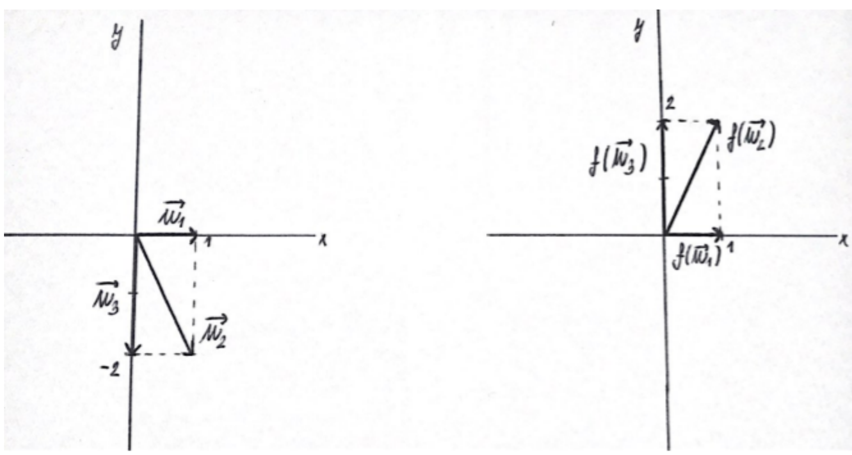
$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a v tomto pootočení se vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *zobrazí na vektor:*

$$D \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{(viz obrázek na násl. straně).}$$



Příklad 46 *Podívejme se na osovou souměrnost vzhledem k např. k ose x:*



- vektor $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se zobrazí na sebe sama, protože leží na ose souměrnosti: $f(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- vektor $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ se „překlopí“ vzhledem k ose x a zobrazí se osovou souměrností na vektor $f(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Najděme nyní matici F tohoto zobrazení:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pomocí zadání obrazů báze jsme schopni najít matici zobrazení:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1, c = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a - 2b &= 1 \\ c - 2d &= 2 \\ \Rightarrow 1 - 2b &= 1 \\ 0 - 2d &= 2 \\ \Rightarrow b = 0, d &= 1 \end{aligned}$$

tedy $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Zde je možná užitečné zmínit jeden další pojem: vektor, který se zobrazí na sebe sama nebo na svůj vlastní násobek, se nazývá **vlastní vektor**; a daná násobená hodnota se nazývá **vlastní hodnota**.

Tedy vektor $\vec{u_1}$ je vzhledem k osové souměrnosti f vlastním vektorem, příslušný násobek 1 je jeho vlastní hodnota:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

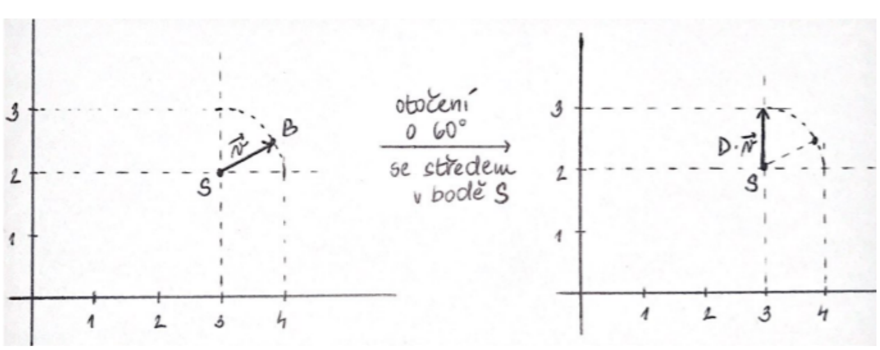
Nebo vektor $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ je vlastním vektorem, protože se zobrazí na svůj (-1)-násobek:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \to f \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Z definice vlastního vektoru plyne i postup, jak tyto vlastní vektory a vlastní hodnoty nalézt. Postup a příklad uvedeme v následující přednášce.

Podívejme se ještě na otáčení a osovou souměrnost v rovině, jestliže bod otáčení není počátek nebo osa souměrnosti není osa souřadného systému.

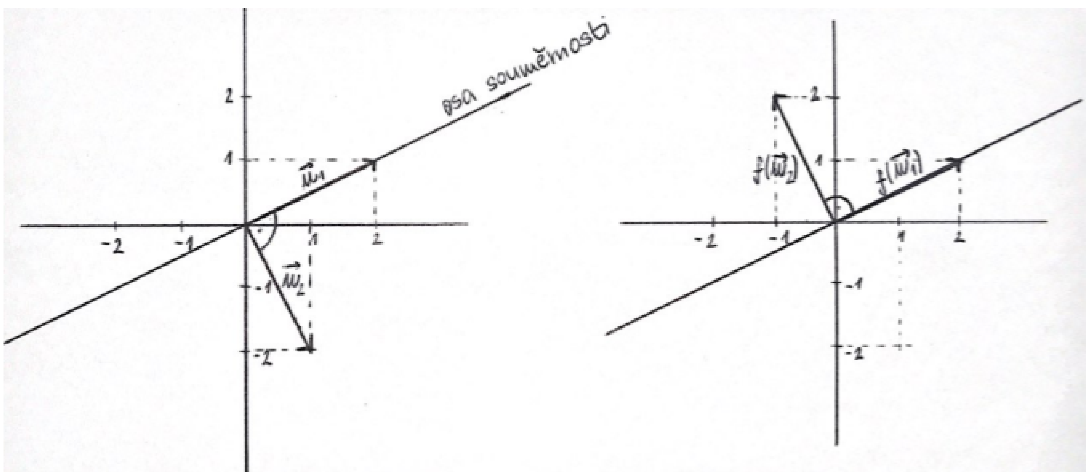
Příklad 47 *Nalezněte matici lineárního zobrazení, které představuje otáčení roviny o úhel 60° vzhledem ke středu otáčení* $S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.



Bod B má sice souřadnice $\begin{bmatrix} 3+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ale při vytvoření vektoru $\vec{v}$ odečítáme souřadnice obou bodů od sebe a dostaneme $\vec{v} = B - S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, tj. stejné souřadnice jako v příkladu 45, $D \cdot \vec{v}$ má též stejné souřadnice jako v příkladu 45, čili matice $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ je stejná jako v příkladu 45 – na matici zobrazení VEKTORŮ nemá vliv střed otáčení.

Příklad 48 *Určete matici zobrazení osové souměrnosti kolem přímky (=vzhledem k ose souměrnosti)* $y = \frac{x}{2}$.

Řešení: Matice najdeme pomocí zobrazení dvou vhodných vektorů:



- $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se zobrazí na sebe sama $\to f(\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ se zobrazí na vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tj. $f(\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Odtud určíme matici F:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2a + b &= 2 \\ 2c + d &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a - 2b &= -1 \\ c - 2d &= 2 \end{aligned}$$

Řešíme 4 rovnice o 4 neznámých:

$$\begin{aligned} 2a+b &= 2/\cdot 2 \\ a-2b &= -1 \\ \rightarrow 5a=3 &\Rightarrow a=\frac{3}{5}, b=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2c+d &= 1/\cdot 2 \\ c-2d &= 2 \\ \rightarrow 5c=4 &\Rightarrow c=\frac{4}{5}, d=-\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$F = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Je jasné, že se toto vyjadřování otáčení a osové souměrnosti pomocí matic na ZŠ tolik neužije, nicméně čtenáři tohoto textu aspoň vědí, že i při definici lineárního zobrazení se stále nacházíme například u elementárních transformací roviny (otáčení, osová souměrnost), i když náš pohled je vysokoškolský.

8.3 Dodatky pro cvičení 09

Příklad 49 *Existuje tedy vztah mezi systémem lineárních rovnic s maticí A a lineárním zobrazením s maticí A:*

Např. řešit systém lineárních rovnic (příklad 12)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor vektoru pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu zobrazení φ zadanému toutéž maticí A – zjistíme, že existuje jediný vzor:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

které bychom našli též inverzním zobrazením φ^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dále např. řešit systém rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ vzhledem k lineárnímu φ zadanému maticí A.

V příkladu 13 jsme zjistili, že těchto vzorů je nekonečně mnoho:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2p \\ 2 + 3p \\ 3 + 2p \\ 0 + p \end{pmatrix}$$

takže i když inverzní relace φ^{-1} není lineárním zobrazením (neexistuje matice, která ji reprezentuje), protože např. pro vzor $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$ existuje nekonečně mnoho obrazů, lze symbolem $\varphi\begin{pmatrix}3\\-3\\-11\\-5\end{pmatrix}$ označit celou nekonečnou množinu vzorů $\begin{pmatrix}-5-2p\\2+3p\\3+2p\\0+p\end{pmatrix}$.

A nakonec, řešit systém rovnic (ad př. 15)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 5 & 7\\1 & 0 & -1 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\11\\-6\\0\end{pmatrix}$$

znamená hledat vzor vektoru $\begin{pmatrix}5\\11\\-6\\0\end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ zadanému toutéž maticí.

Z př. 15 lze vidět, že žádný tento vzor neexistuje – to znamená, že $\begin{pmatrix}5\\11\\-6\\0\end{pmatrix}\notin\ Im(f)$.

Věta 18 *<u>Základní vlastnosti lineárního zobrazení</u> mezi vektorovými prostory – označení viz definice* 21*:*

a) $\varphi(\vec{o_V})=\vec{o_{V'}}$,

b) $\varphi(-\vec{v})=-\varphi(\vec{v})$,

c) φ *<u>ne</u>musí zachovat lineární <u>ne</u>závislost vektorů z V,*

d) φ *musí zachovat lineární závislost vektorů z V.*

Důkaz:

ad a), b) Protože φ je homomorfismus grup vzhledem k operaci +, na základě téže věty z algerby 1, φ musí zobrazit nulový vektor na nulový vektor, a obraz inverze (= obraz opačného vektoru) je inverze k obrazu (= opačný vektor k obrazu),

ad c) Viz příklad 42: tři nezávislé vektory $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ jsou zobrazeny na vektory:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

které jsou lineárně závislé, tedy dimenze $f(V)$ se může lineárním zobrazením zmenšit (např. projekce),

ad d) Pokud $\vec{u_k} = \alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_2 \cdot \vec{u_2} + ... + \alpha_{k-1} \cdot \vec{u_{k-1}}$, tak lineární zobrazení právě zachovává „výsledek lineární kombinace“, tj.:

$$\varphi(\vec{u_k}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{u_1}) + ... + \alpha_{k-1} \cdot \varphi(\vec{u_{k-1}})$$

$\varphi(\vec{u_k})$ je závislý na vektorech $\varphi(\vec{u_1}), \varphi(\vec{u_2}), ..., \varphi(\vec{u_{k-1}})$.

Při studiu lineárního zobrazení jsou důležité pojmy jádro a obor lineárního zobrazení:

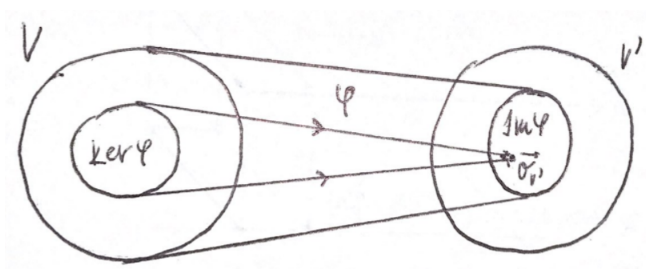
Definice 30 *Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory.*

Jádro $Ker\varphi$ **lineárního zobrazení** *je množina těch vektorů z V, které se zobrazí na nulový vektor:*

$$Ker\varphi := \{\vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{o_{V'}}\}.$$

Obor hodnot $Im\varphi$ **lineárního zobrazení** *je množina těch vektorů z V', pro které existuje nějaký vzor:*

$$Im\varphi := \{\vec{w} \in V' : \exists \vec{v} \in V : \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$



$Ker\varphi$ a $Im\varphi$ celkem hodně vypovídají o každém lineárním zobrazení φ. Často bude užitečné $Ker\varphi$ a $Im\varphi$ najít. V první fázi se uvědomme, že se jedná o vektorové podprostory!

Věta 19 **a)** *$Ker\varphi$ je vektorový podprostor prostoru V,*

b) *$Im\varphi$ je vektorový podprostor prostoru V',*

c) *$dim(Ker\varphi) = n - h(A) = dim(V) - h(A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ,*

d) *$dim(Im\varphi) = h(A)$.*
tedy $n = dim(V) = dim(Ker\varphi) + dim(Im\varphi)$.

Důkaz je konstruktivní, tj. bude během něj vysvětlena konstrukce $Ker\varphi$ i konstrukce (nalezení) $Im\varphi$. Vysvětleme jej přímo na příkladu.

Ad př. 42:

a) $Ker\varphi$ je množina těch vektorů $\vec{v}$, které se zobrazí na nulový vektor:

$$A \cdot \vec{v} = \vec{o}$$

kde A je matice zobrazení φ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

...řešíme vlastně SLR-hom!

Řešení bude závislé na $n - h(A)$ parametrech $= dim(V) - h(A)$ parametrech $\to$ $3 - 2 = 1$ parametr. Pouze vyměňme pořadí rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= t \\ v_2 &= -\frac{3}{2}t \\ v_1 &= -\frac{3}{2}t + t = -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$Ker\varphi = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

...vektorový prostor dimenze 1.

Pokud $\vec{u}, \vec{v} \in Ker\varphi$, tak:

$$\varphi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ $Ker\varphi$ je uzavřené na lineární kombinace $\Rightarrow$ je to podprostor.

b) $Im\varphi$ je množina vektorů:

$$\varphi(\vec{u}) \in V' : \vec{u} \in V$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

...vyberme z vektorů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +3\cdot r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Např. $\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je báze prostoru $Im\varphi$.

$$\forall \vec{u} \in V; \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}:$$

$$\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \alpha_3 \cdot \vec{e_3} \Rightarrow \varphi(\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \alpha_1 \cdot \vec{u_2} + \alpha_1 \cdot \vec{u_3}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{u_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\vec{u_2}) + \alpha_3 \cdot \varphi(\vec{u_3})$$

tj. každý vektor z $\varphi(V)$ lte vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})$, a naopak každá lineární kombinace vektorů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3})$ je opět prvkem prostoru $\varphi(V)$. Tedy máme:

$$\varphi(V) = L(\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \varphi(\vec{e_3}))$$

...z těchto vektorů lze tedy vybrat bázi podprostoru $\varphi(V)$.

Bude občas užitečné vědět, kdy zobrazení φ (samozřejmě lineární, o jiných se nebavíme) „zachovává dimenzi", tj. $dim(V) = dim(\varphi(V))$. Poznáme to právě podle jádra $Ker\varphi$. Následující věta byla dokázána na jedné z prvních přednášek předmětu Základy matekatiky!!! Jedná se o krásnou ukázku důkazu logické ekvivalence.

Věta 20 *Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je injektivní $\Leftrightarrow Ker\varphi = \vec{o_V}$.*

Důkaz:

„⇒" φ je injektivní $\Rightarrow$ dva různé vektory se nemohou zobrazit na stejný obraz $\vec{o_{V'}}$, tj. $Ker\varphi$ může obsahovat pouze jeden vektor, a sice $\vec{o_V}$.

„⇐" $Ker\varphi = \vec{o_V} \Rightarrow$ pokusme se dokázat injektivitu zobrazení φ:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) &\Rightarrow \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{o_{V'}} \\ &\Rightarrow \varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{o_V} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in Ker\varphi \end{aligned}$$

(úprava výrazu $\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})$ na výraz $\varphi(\vec{u} - \vec{v})$ plyne z linearity zobrazení φ), ale v $Ker\varphi$ je pouze nulový vektor, tj $\vec{u} - \vec{v} = \vec{o_V}$, tedy $\vec{u} = \vec{v}$...φ je injektivní. □

Věta 20 nám může pomoci při zjištění, zda se zobrazením φ ztratí či neztratí nějaká dimenze podprostoru zobrazovaných vektorů: při injekci se žádná dimenze nemůže ztratit, tj. $\varphi(V)$ má stejnou dimenzi jako V.

Definice 31 *Složením dvou lineárních zobrazení vznikne opět lineární zobrazení: $\varphi : V \to V'$ (s maticí A), $\psi : V' \to V''$ (s maticí B) $\Rightarrow$* **složené zobrazení** *$\psi \circ \varphi : V \to V''$ (s maticí $B \cdot A$) je zobrazení:*

$$\psi \circ \varphi(\vec{v}) := \psi(\varphi(\vec{v})) \;\; (\textit{ čteme: zobrazení } \psi \textit{ po } \varphi)$$

Nápověda: Násobení $B \cdot A$ matic dílčích zobrazení provádíme ve stejném pořadí, jako je napsáno pořadí zobrazení $\psi \circ \varphi$.

Příklad 50 *Mějme lineární zobrazení* $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ *zadané maticí:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *zadané maticí:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ *Složené zobrazení* $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *je zadané maticí:*

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tedy složením přiřazení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

dostaneme přiřazení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

9 Týden 9

9.1 Cvičení 9: Operace s maticemi, inverzní matice, maticová metoda řešení SLR

Například:

Úloha 9.1 *Sečtěte a vynásobte matice různých rozměrů – kdy jsou tyto operace vůbec možné?*

Úloha 9.2 *Pro zadanou matici A najděte matici opačnou a matici inverzní. Více příkladů – někdy hledaná matice existuje, někdy neexistuje (jak to poznáme v průběhu algoritmu?). Inverzní matici prosím jen Gauss-Jordanovou metodou, druhou metodu pomocí determinantů jsem studentům nesděloval.*

Úloha 9.3 *Vyřešte pomocí inverzní matice*

- *SLR:* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$;
- *maticovou rovnici:* $A \cdot X = B$, *všechny matice jsou řádu 2.*

Úloha 9.4 *Pro zadanou matici A typu 3/3 najděte matici P typu 3/3, kterou když matici A vynásobíte zleva, dostanete matici* $P \cdot A$, *která se liší od matice A jen tím, že*

- *druhý a třetí řádek jsou přehozeny;*
- *třetí řádek je vynásoben čtyřmi;*
- *ke druhému řádku je přičtený pětinásobek prvního řádku.*

Úloha 9.5 *Najděte dvě matice typu 2/2, které jsem nenulovými děliteli nuly.*

Úloha 9.6 *Je násobení matic operace komutativní?*

Úloha 9.7 *Zkuste dokázat, že na množině matic typu 2/2 je operace násobení matic asociativní, tj. že platí*

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right).$$

9.2 Přednáška 9: Matice přechodu, vlastní čísla a vektory lin. zobrazení, změna matice lineárního zobrazení při změně báze

Věta 21 **a)** *$\vec{v_1}, ...\vec{v_k}$ jsou vlastní vektory reálné matice A, každý s jiným vlastním číslem $\Rightarrow$ jsou lineárně nezávislé.*

b) *Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě tvoří VPP.*

Důkaz:

ad a) Dokažme indukcí: $m = 1$...vektor $\vec{v}$ je lineárně nezávislý, protože je nenulový indukční krok:

tvrzení platí pro $m-1$ vlastních vektorů matice $A \Rightarrow$ tvrzení platí pro m vlastních vektorů matice A.

Předpokládejme sporem, že nenulový vektor $vecv_m$ je závislý na vektorech $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\dots$, $\vec{v_{m-1}}$, tj.

$$\vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_{m-1} \cdot \vec{v_{m-1}}$$

a současně některé $\alpha_i \neq 0$.
Vynásobme danou rovnost maticí A a využijeme převodu pomocí $A \cdot \vec{v_i} = \lambda_i \cdot \vec{v_i}$:

$$\lambda_m \cdot \vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_{m-1} \cdot \lambda_{m-1} \cdot \vec{v_{m-1}}.$$

Pokud od této rovnice odečteme λ_m-násobek předchozí rovnice $\vec{v_m} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \alpha_{m-1} \cdot \vec{v_{m-1}}$, dostaneme:

$$\vec{o} = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot \vec{v_1} + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot \vec{v_{m-1}}.$$

Na základě indukčního předpokladu nyní musí být všechny koeficienty rovny 0, protože $\vec{v_1}, ..., \vec{v_{m-1}}$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_m$...spor s tím, že všechny λ_i jsou různé.

ad b) Prostor vlastních vektorů pro jedno stejné λ je uzavřen na lineární kombinace:

$$\left.\begin{array}{rcl} A \cdot \vec{v_1} & = & \lambda \cdot \vec{v_1} \\ A \cdot \vec{v_2} & = & \lambda \cdot \vec{v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot (\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}) = \alpha_1 \cdot A \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot A \cdot \vec{v_2} = \lambda(\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2})$$

...$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2}$ je vlastní vektor pro totéž λ.

Řádně zopakujme (a doplňme všemi náležitostmi) definici vlastního vektoru a vlastního čísla lineární transformace ze str. 79:

Definice 32 *Lineární transformací φ vektorového prostoru V rozumíme lineární zobrazení $\varphi : V \to V$. Toto zobrazení lze tedy reprezentovat čtvercovou maticí A.*

Vlastní vektor lineární transformace je takový NENULOVÝ vektor $\vec{v}$, který se zobrazí na svůj vlastní násobek, tj.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}.$$

Číslo λ z právě uvedené rovnosti nazýváme vlastní hodnotou náležející k vektoru $\vec{v}$ vzhledem k zobrazení φ.

Nalezení vlastních směrů a hodnot matice A (čtvercové) zadávající lineární trasformaci vektorového prostoru V: Vyjdeme z definičního vztahu

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{v} \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} &= \vec{o} \end{aligned}$$

...vložením jednotkové matice E se výpočet nezmění. Převodem pravé strany na levou a vytknutím $\vec{v}$ vidíme, že vektor $\vec{v}$ leží v jádru zobrazení $A - \lambda \cdot E$, protože se tímto zobrazením zobrazí na nulový vektor!!!

V jádru $Ker(A - \lambda \cdot E)$ vždy leží vektor $\vec{v} = \vec{o}$, ale ten nás nezajímá, protože nulový vektor se nepovažuje za vlastní vektor.

Vlastní vektory v jádru $Ker(A - \lambda \cdot E)$ leží tehdy, když systém $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}$ má nekonečně mnoho řešení. Tj. nalézt vlastní vektory u čtvercové matice A je totéž jako nalézt nenulové vektory jádra $Ker(A - \lambda \cdot E)$, tj. nalézt nenulová řešení systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}$.

Aby tedy nenulová řešení systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}$ vůbec existovala, musí tento systém mít více než jedno (nulové) řešení – tj. podle Frobeniovy věty musí mít tento SLR řešení nekonečně mnoho, tedy příslušný schodový tvar matice musí mít aspoň jeden nulový řádek, čili matice $(A - \lambda \cdot E)$ je singulární, některý řádek je závislý na těch ostatních, tj. determinant této matice je roven nule.

Odtud plyne následujíc postup nalezení vlastních čísel a vlastních vektorů:

krok 1 : Nejprve najdeme vlastní čísla: Řešíme rovnici $det(A - \lambda \cdot E) = 0$... jediná rovnice s jedinou neznámou λ ... najdeme tím všechna vlastní čísla.

krok 2 : Do systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{v} = \vec{o}$ dosadíme konkrétní číslo λ a příslušné vlastní vektory nalezneme jako nenulová řešení tohoto SLR.

Příklad 51 *Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ zadaného v bázi $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

(zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$je transformací roviny).

Řešení: viz přednáška. Postup je velmi podobný postupu v následujícím příkladu, jen se jedná o jednodušší příklad než ten následující, protože je zde o dimenzi méně.

Příklad 52 *Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lin. zobrazení* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *zadaného v bázi* $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*je transformací trojrozměrného prostoru).*

Řešení:

$$\begin{aligned} det(A - \lambda \cdot E) &= 0 \\ det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (3-\lambda)\cdot(\lambda^2+2\lambda)+4\cdot(\lambda+2) &= 0 \\ (\lambda+2)\cdot(3\lambda-\lambda^2+4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= -2 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4 \end{aligned}$$

Najdeme dále příslušné vlastní vektory: $\lambda_1 = -2$: řešíme SLR:

$$(A-(-2)\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow v_{11} = 0, v_{12} = t, v_{13} = 0; t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$: řešíme SLR:

$$(A-(-1)\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow v_{21} = 2t, v_{22} = 0, v_{23} = t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tedy $\Rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 4$: řešíme SLR:

$$(A-4\cdot E)\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow v_{31} = -\frac{t}{2}, v_{32} = 0, v_{33} = t; t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vlastní směr: $t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vektor $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ je příslušným vlastním vektorem. Vlastní vektory i vlastní čísla jsou nalezeny.

Motivace následujícího: Ve fyzice a podobně i v geometrii je důležitým činitelem volba systému souřadnic. Při našem přístupu volba souřadného systému je dána volbou báze daného vektorového prostoru. Následující úvahy související se změnou báze budou využity při přepočítávání souřadnic v různých bázích v této přednášce nebo při popisu afinních zobrazení v přednášce 10.

Definice 33 *Označme $\underline{e} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$, $\underline{f} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, ..., \vec{f_n})$ dvě různé báze téhož vektorového prostoru V dimenze n.*
Protože se jedná o báze, lze vektory $\vec{e_j}$ jednoznačně vyjádřit souřadnicemi v bázi $\underline{f}$:

$$\vec{e_j} = \vec{f_1} \cdot p_{1j} + \vec{f_2} \cdot p_{2j} + ... + \vec{f_n} \cdot p_{nj}$$

...kde $p_{1j}, p_{2j}, ..., p_{nj}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{e_j}$ v bázi $\underline{f}$. Maticově pak:

$$\underline{e} = \underline{f} \cdot P_{\underline{f} \to \underline{e}} \tag{9.1}$$

Matice P se nazývá matice přechodu od báze f k bázi e (někdy též matice transformace báze $\underline{f}$ na bázi $\underline{e}$).

Věta 22 **a)** *Matice přechodu $P_{\underline{f} \to \underline{e}}$ je regulární.*

b) *Jakákoli regulární matice P vytvoří z báze $\underline{f}$ „novou bázi“ $\underline{e}$.*

c) *Vynásobením vztahu 9.1 maticí P^{-1} zprava dostáváme, že matice P^{-1} je také maticí přechodu, a sice v opačném směru! (od báze $\underline{e}$ k bázi $\underline{f}$):*

$$\underline{e} \cdot P^{-1}_{\underline{e} \to \underline{f}} = \underline{f} \tag{9.2}$$

Důkaz:

ad a) Pokud by řádky P byly lin. závislé, byly by závislé i řádky matice $\underline{e}$, tj. byly by závislé i sloupce matice $\underline{e}$, a to nejsou – tvoří bázi.

ad b) Plyne ze vztahu 9.1 a z toho, že součin dvou regulárních matic je zase matice regulární[17].

ad c) Plyne z regulárnosti všech matic a toho, že ve sloupcích matic $\underline{e}, \underline{f}$ jsou vektory bází.

[17]To jsem už dříve mohl prozradit, použili jsme to tiše i u reprezentace EŘÚ pomocí násobení regulární maticí: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$ ... pokud dílčí matice mají nenulový determinant, i determinant jejich součinu se nemůže rovnat nule.

Podívejme se nyní, jak se přepočítají souřadnice vektoru $\vec{x} \in V$ při změně báze:

Vektor $\vec{x}$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{e_j}$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{e}$) a současně lze $\vec{x}$ jednoznačně vyjádřit jako lin. kombinaci vektorů $\vec{f_j}$ (a koeficienty této kombinace jsou souřadnicemi $\vec{x}$ v bázi $\underline{f}$):

$$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + ... + \alpha_n \cdot \vec{e_n} = \beta_1 \cdot \vec{f_1} + \beta_2 \cdot \vec{f_2} + ... + \beta_m \cdot \vec{f_m}$$

Dosadíme-li do právě uvedeného vztahu $\vec{e_j}$ pomocí vztahu 9.1 po sloupcích, dostaneme:

$$\alpha_1 \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{k1} + \alpha_2 \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{k2} + ... + \alpha_n \cdot \sum_k \vec{f_k} \cdot p_{kn} = \beta_1 \cdot \vec{f_1} + \beta_2 \cdot \vec{f_2} + ... + \beta_m \cdot \vec{f_m}$$

Porovnáním koeficientů u $\vec{f_j}$ na obou stranách dostaneme systém rovnic:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot p_{11} + \alpha_2 \cdot p_{12} + ... + \alpha_n \cdot p_{1n} &= \beta_1, \\ \alpha_1 \cdot p_{21} + \alpha_2 \cdot p_{22} + ... + \alpha_n \cdot p_{2n} &= \beta_2, \\ &\dots \\ \alpha_1 \cdot p_{n1} + \alpha_2 \cdot p_{n2} + ... + \alpha_n \cdot p_{nn} &= \beta_m; \end{aligned}$$

tedy dostali jsme SLR s neznámými $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Maticově:

$$P_{\underline{f} \to \underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\underline{f}} \quad / \cdot P^{-1} zleva \tag{9.3}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\underline{e}} = P^{-1}_{\underline{e} \to \underline{f}} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\underline{f}} \tag{9.4}$$

(označení v indexu matice P je pouze pomocné – jedná se o jednu matici P a její inverzi P^{-1}).

Věta 23 Převádění souřadnic vektorů při změně báze: *a) Pro vztah 9.1 mezi bázemi platí, že souřadnice vektorů přepočítáváme pomocí vztahu 9.3.*
b) naopak pro vztah 9.2 mezi bázemi souřadnice vektorů přepočítáváme pomocí vztahu 9.4.

Poznámka: Přepočítávání souřadnic vektoru lze chápat jako identické zobrazení téhož vektoru na sebe sama. Všimněte si prosím následující korespondence plynoucí z právě uvedené věty: **Při vyjádření souřadnic vektoru v jiné bázi potřebujeme matici přechodu v opačném směru!!!**

Příklad 53 *(Horák, str. 54) Najděte matici přechodu od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ pro*

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right) \underline{f} = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix} \right),$$

protože potřebujete vyjádřit souřadnice vektoru $\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}_{\underline{e}}$ *v bázi* $\underline{f}$.

Řešení: Hledáme matici P typu 3/3 tak, že pro přechod od báze $\underline{f}$ k bázi $\underline{e}$ platí vztah 9.1:

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \underline{f} \cdot P_{\underline{f} \to \underline{e}}, \text{ tedy} \\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Přehoďme pouze obě strany této maticové rovnice:

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

S využitím významu násobení matic a rozepsáním tohoto násobení po sloupcích vlastně současně řešíme tři systémy lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2&3&4\\3&1&3\\2&2&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Každý ze systémů najde jeden sloupec matice P. Protože OVŠEM všechny tři systémy mají stejnou matici A, lze je řešit současně, vektory pravých stran napíšeme všechny tři za svislou čáru:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\3&1&3&1&1&0\\2&2&3&1&0&0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6&9&12&3&3&3\\3&1&3&1&1&0\\0&-1&-1&0&-1&-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot 2 - r_1 \\ \cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\0&-7&-6&-1&-1&-3\\0&1&1&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\0&1&1&0&1&1\\0&-7&-6&-1&-1&-3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +7\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&3&4&1&1&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4 \end{array}\right) \begin{array}{r} -3\cdot r_2 - r_3 \\ -r_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2&0&0&2&-8&-6\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ve sloupcích matice P jsou souřadnice vektorů $\vec{e_j}$ v bázi $\underline{f}$. Díky nalezení matice přechodu $P_{\underline{f}\to\underline{e}}$ nyní můžeme přepočítávat (jak plyne z věty 23) v opačném směru. Například vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$ pomocí 9.3 přepočteme do báze $\underline{f}$ takto:

$$P_{\underline{f}\to\underline{e}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}.$$

Příklad 54 *Variace na příklad 53: Máte zadány tytéž báze $\underline{e}$, $\underline{f}$ jako v příkladu 53 a vektor* $\begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}$. *Vypočtěte jeho souřadnice v bázi $\underline{e}$, pokud je zadána matice přechodu* $P_{\underline{f}\to\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. způsob řešení, asi rychlejší: Mohli bychom si napsat převodní vztah 9.3 a doplnit do něj, co známe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}}.$$

To je vlastně SLR, jehož vyřešením dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}.$$

2. způsob řešení: pomocí inverzní matice přechodu $P^{-1}_{\underline{e}\to\underline{f}}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ +2\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +4\cdot r_2 + 3\cdot r_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a proto}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}_{\underline{e}}$$

Příklad 55 *Podívejme se nyní na obecný příklad změny matice lineárního zobrazení při změně bází vstupního a cílového prostoru:*

Uvažujme lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadané v běžných bázích:

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \underline{f} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, *tj.*

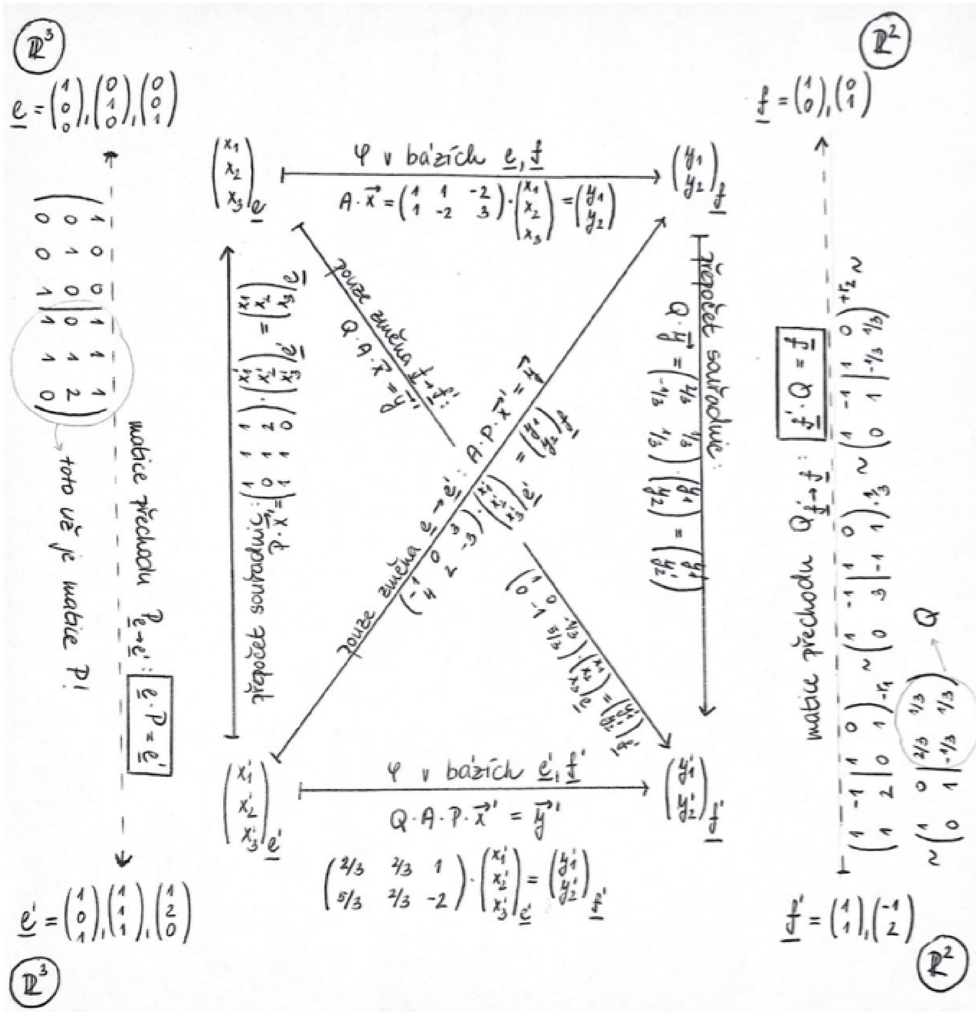
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Jak se změní matice tohoto zobrazení, pokud báze $\underline{e}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, $\underline{f}$ prostoru $\mathbb{R}^2$ změníme na báze $\underline{e'}, \underline{f'}$:

$$\underline{e'} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \underline{f'} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení: Složíme tři lineární zobrazení:

- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^3$,
- zobrazení φ,
- přepočet báze v prostoru $\mathbb{R}^2$.



Shrnutí příkladu: Obecně řečeno, při změně báze jednoho či obou prostorů dojde ke změně matice lineárního zobrazení φ – složí se s jedním či dvěma lineárními transformacemi vstupního či cílového prostoru způsobenými změnou báze:

- φ v bázích $\underline{e}, \underline{f}$...zadané maticí A, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f}}} = A \cdot \vec{x_{\underline{e}}}$,
- φ v bázích $\underline{e'}, \underline{f}$...zadané maticí $A \cdot P$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f}}} = A \cdot P \cdot \vec{x_{\underline{e'}}}'$,
- φ v bázích $\underline{e}, \underline{f'}$...zadané maticí $Q \cdot A$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f'}}} = Q \cdot A \cdot \vec{x_{\underline{e}}}$,
- φ v bázích $\underline{e'}, \underline{f'}$...zadané maticí $Q \cdot A \cdot P$, přepočet vektorů: $\vec{y_{\underline{f'}}}' = Q \cdot A \cdot P \cdot \vec{x_{\underline{e'}}}'$

Definice 34 *Lineární zobrazení $\psi : V \to V$ se nazývá lineární transformace (vstupní i cílový prostor je jeden a tentýž).*

Lineární zobrazení $\psi : V \to V$ se nazývá automorfismus (vektorového prostoru na sebe sama), je-li navíc bijektivní.

Příkladem automorfismu je právě přepočet souřadnic vektorů způsobený změnou báze (automorfismus – A je regulární a čtvercová).

Příklad 56 *Určete, jak se změní matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

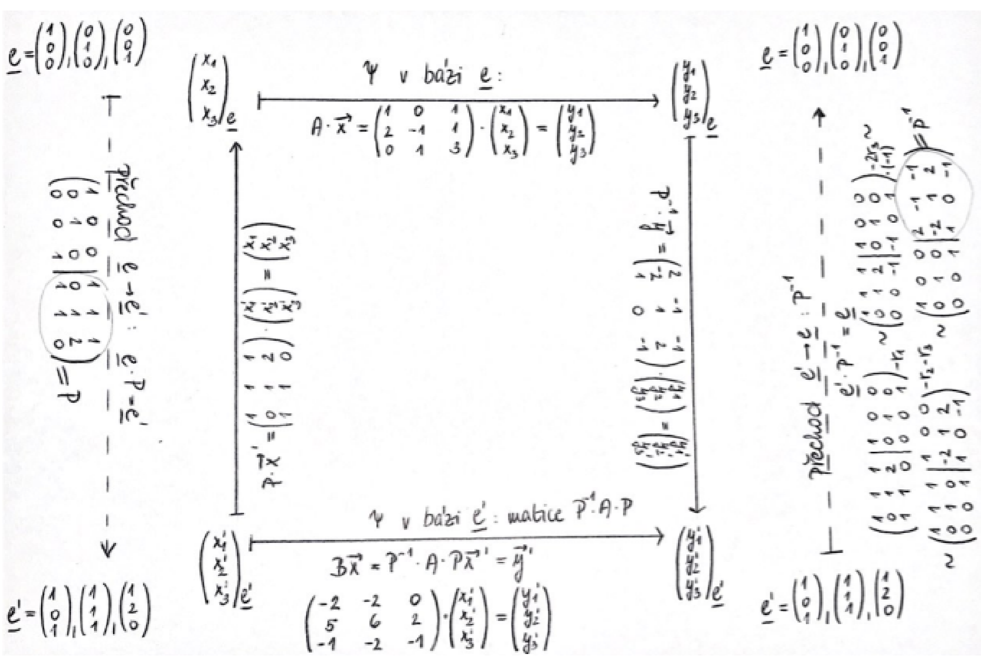
lineární transformace $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *při změně báze*

$$\underline{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

na bázi

$$\underline{e}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení: Podobné příkladu 55 s tím rozdílem, že zpětný přepočet báze je zadán maticí inverzní ke vstupnímu přepočtu báze.



Definice 35 *Čtvercové matice* A, B *jsou* *podobné, když pro nějakou regulární* P *platí:*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Poznámka: Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic. Právě přepočtená matice B v příkladu 56 je podobná k zadané matici A lin. transformace.

10 Týden 10

10.1 Cvičení 10: Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory, jádro a obor hodnot.

Úloha 10.1 *Lineární zobrazení $\varphi : R^3 \to R^3$ je zadáno obrazy vektorů:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte vyjádření zobrazení φ pomocí matice A.*

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 10.2 *Lineární zobrazení $\psi : R^3 \to R^4$ je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra $Ker(\psi)$.*

b) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho obrazu $Im(\psi)$.*

Úloha 10.3 *Lineární zobrazení $\varphi : R^3 \to R^3$ je zadáno obrazy vektorů:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte vyjádření zobrazení φ pomocí matice A.*

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 10.4 *Lineární zobrazení $\psi : R^4 \to R^3$ je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho jádra* $Ker(\psi)$.

b) *Nalezněte bázi a dimenzi jeho obrazu* $Im(\psi)$.

Úloha 10.5 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \to R^3$ *je zadáno maticí* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) *Zjistěte, na jakou množinu bodů se při tomto zobrazení zobrazí přímka* $p = \{[1+t, 2-t, 1-t],]; t \in R\}$.

b) *Vyjádřete zobrazení* φ *pomocí obrazů tří vektorů.*

Úloha 10.6 *Pro lineární zobrazení* $\psi : R^3 \to R^4$ *je*

$$Ker(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad Im(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. *Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.*

Úloha 10.7 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \to R^3$ *je zadáno maticí* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *Napište vyjádření zobrazení* φ *pomocí vzorce.*

b) *Nalezněte všechny vzory vektoru* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vzhledem k zobrazení* φ.

Úloha 10.8 *Pro lineární zobrazení* $\psi : R^4 \to R^3$ *je*

$$Ker(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad Im(\psi) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Sestrojte matici zobrazení ψ. *Pokud zjistíte, že takových zobrazení existuje více, stačí nalézt jedno z nich.*

Úloha 10.9 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \;\to\; R^3$ *je zadáno maticí* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) *Zjistěte, na jakou množinu bodů se při tomto zobrazení zobrazí rovina* $\alpha : \; 2x - 3y + z + 1 = 0$.

b) *Vyjádřete zobrazení* φ *jednoznačně pomocí obrazů tří vektorů.*

Úloha 10.10 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \;\to\; R^3$ *je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjistěte, zda je toto zobrazení

a) *injektivní (pomocí báze a dimenze jeho jádra:* φ *je injektivní* $\Leftrightarrow \; Ker(\varphi) = \{\vec{o}\}$*).*

b) *surjektivní (pomocí jeho obrazu* $Im(\psi)$*).*

Úloha 10.11 *Lineární zobrazení* φ *je zadáno maticí*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny vzory vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vzhledem k tomuto zobrazení.*

Úloha 10.12 *Lineární zobrazení* $\varphi : R^3 \;\to\; R^2$ *má jádro*

$$Ker(\varphi) = \{p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \;\; p \in R\}.$$

Napište jeho konkrétní matici (stačí jednu z možností, pokud řešení existuje více) tak, aby zobrazení φ *bylo surjektivní.*

10.2 Přednáška 10: Afinní zobrazení mezi afinními prostory.

Podobně jako jsme chvíli studovali lineární zobrazení coby zobrazení mezi VPP, zobrazení vektorů, budeme se dnes věnovat afinnímu zobrazení mezi APP, tedy zobrazení bodů na body.

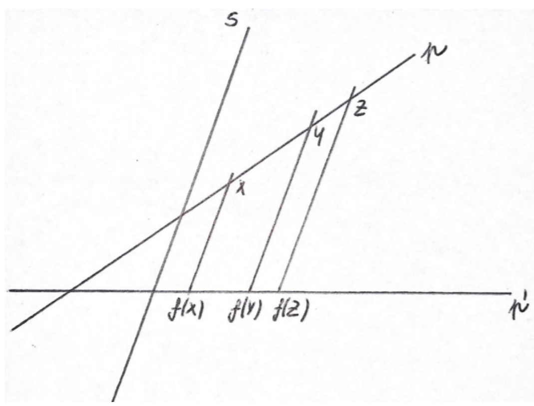
Definice 36 *Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mezi afinními prostory se nazývá bf afinní zobrazení, jestliže zachovává dělicí poměr tří kolineárních bodů, tj.:*

Pro X, Y, Z tři navzájem různé body na přímce platí, že jejich obrazy $f(X), f(Y), f(Z)$ buď splývají v jeden bod, nebo opět leží na přímce a platí:

$$Z - X = r \cdot (Z - Y), f(Z) - f(X) = r \cdot (f(Z) - f(Y))$$

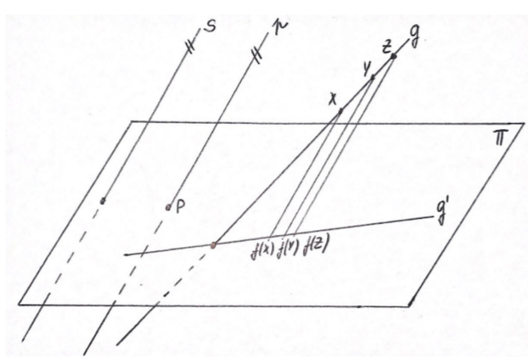
Značíme $(Z, X, Y) = (f(Z), f(X), f(Y))$.

Příklad 57 *Rovnoběžné promítání přímky p na přímku p' určené směrem s (=přímkou s):*



Příklad 58 *Rovnoběžné promítání prostoru $\mathbb{R}^3$ bodů do roviny π (= tzv. průměty) se směrem s:*

$f(p) = P$...přímka p se zobrazí na bod P,
$f(q) = q'$...přímka (Z, X, Y) se zobrazí na $(f(Z), f(X), f(Y))$.



Afinnis = sousední, příbuzný (ad+finis = na mém okraji = vedle mne, blízko mne).

Kromě projekcí (i šikmosměrných) na přímku či rovinu patří mezi afinní zobrazení i všechna zobrazení probírána na ZŠ:

- Posunutí v rovině, otočení roviny,
- Středová souměrnost, stejnolehlost,
- Osová souměrnost.

Za chvíli se na otočení a osovou souměrnost podíváme – abychom mohli s afinním zobrazením i analyticky počítat, musíme si uvědomit souvislost mezi afinním zobrazením a lineárním zobrazením:

Věta 24 *Ke každému afinnímu zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je jednoznačně přiřazeno tzv. asociované lineární zobrazení $\vec{f} : Z(\mathcal{A}) \to Z(\mathcal{B})$ tak, že platí:*

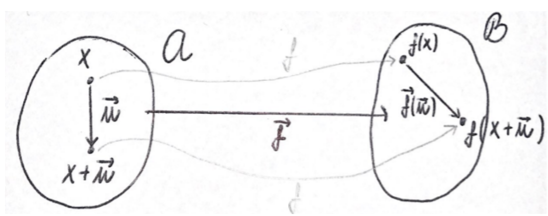
$$f(X + \vec{u}) = f(X) + \vec{f}(\vec{u}), \text{ nebo } f(X + \vec{u}) - f(X) = \vec{f}(\vec{u})$$

Nebo pro $Y := X + \vec{u}$ platí:

$$\vec{f}(\vec{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$$

tj. obraz vektoru $\vec{XY}$ je vektor $\overrightarrow{f(X)f(Y)}$ vzhledem k asociovanému lineárnímu zobrazení $\vec{f}$.

Definice 37 *Asociované lineární zobrazení je zobrazení přiřazeno každému afinnímu zobrazení (viz věta 24) tak, že:*



Body $X, X + \vec{u}$ se zobrazí na body $f(X), f(X + \vec{u})$ tak, že vektory z nich vytvořené jsou ve vztahu vzor-obraz v daném asociovaném lineárním zobrazení $\vec{f}$.

Tedy z tohoto úzkého vztahu mezi afinním zobrazením AP a asociovaným lineárním zobrazením VP plyne i analytické vyjádření afinního zobrazení:

- APP $\mathcal{A}$ je popsán repérem $\langle P, \vec{e_1}, ..., \vec{e_n} \rangle$,
- APP $\mathcal{B}$ je popsán repérem $\langle Q, \vec{d_1}, \vec{d_2}, ..., \vec{d_m} \rangle$

$X = P + x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + ... + x_n \cdot \vec{e_n} \to f(X) = f(P) + y'_1 \cdot \vec{d_1} + y'_2 \cdot \vec{d_2} + ... + y'_m \cdot \vec{d_m}$

kde $x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + ... + x_n \cdot \vec{e_n} = \vec{v}$ a $f(P) = (b_1, b_2, ..., b_m)$ v repéru $\mathcal{B}$, tedy $f(P) = Q + b_1 \cdot \vec{d_1} + b_2 \cdot \vec{d_2} + ... + b_m \cdot \vec{d_m}$.

Současně při zobrazování vektoru $\vec{v}$ lze užít asociovaného zobrazení $\vec{f}$ a dostaneme:

$$f(X) = f(P) + \vec{f}(x_1 \cdot \vec{e_1} + ... + x_n \cdot \vec{e_n}) = f(P) + x_1 \cdot \vec{f}(\vec{e_1}) + x_2 \cdot \vec{f}(\vec{e_2}) + ... + x_n \cdot \vec{f}(\vec{e_n})$$

kde

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{e_1}) &= a_{11} \cdot \vec{d_1} + a_{12} \cdot \vec{d_2} + ... + a_{1m} \cdot \vec{d_m} \\
\vec{f}(\vec{e_2}) &= a_{21} \cdot \vec{d_1} + a_{22} \cdot \vec{d_2} + ... + a_{2m} \cdot \vec{d_m} \\
&... \\
\vec{f}(\vec{e_n}) &= a_{n1} \cdot \vec{d_1} + a_{n2} \cdot \vec{d_2} + ... + a_{nm} \cdot \vec{d_m}
\end{aligned}$$

tedy:

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(P) + x_1 \cdot (a_{11} \cdot \vec{d_1} + ... + a_{1m} \cdot \vec{d_m}) + ... + x_n \cdot (a_{n1} \cdot \vec{d_1} + ... + a_{nm} \cdot \vec{d_m}) \\
&= Q + \vec{d_1} \cdot (b_1 + x_1 \cdot a_{11} + x_2 \cdot a_{21} + ... + x_n \cdot a_{n1}) + ... + \vec{d_m} \cdot (b_m + x_1 \cdot a_{1m} + ... + x_n \cdot a_{nm}) \\
&= Q + \vec{d_1} \cdot y_1 + ... + \vec{d_m} \cdot y_m
\end{aligned}$$

y_i se od y'_i liší jen započtením b_i při rozepsání $f(P)$.

Tedy celkem:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & ... & a_{n2} \\ ... & & \\ a_{1m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}_{\vec{f}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

kde $f(X) = Q + y_1 \cdot \vec{d_1} + ... + y_m \cdot \vec{d_m}$ a matice $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & ... & a_{n2} \\ ... & & \\ a_{1m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}_{\vec{f}}$ je matice lineárního zobrazení $\vec{f}$ typu m/n, jejíž sloupce tvoří vektory $\vec{f}(\vec{e_1}), ..., \vec{f}(\vec{e_n})$.

Poznámka: Afinní zobrazení n-rozměrného APP je jednoznačně zadáno obrazy n+1 bodů v obecné poloze $x_0, x_1, ..., x_n \to f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.

Příklad 59 *V afinní rovině je dán $\triangle BCD$, takže lze zvolit její repér:*

$$P := B, \vec{e_1} = \vec{BC}, \vec{e_2} = \vec{BD}$$

Najděte afinní zobrazení, které tento trojúhelník zobrazí na $\triangle B'C'D'$ v kartézském AP popsaném repérem:

$$Q = [0;0;0], \vec{f_1} = (1;0;0), \vec{f_2} = (0;1;0), \vec{f_3} = (0;0;1)$$

kde $B' = [1;0;0], C' = [0;1;0], D' = [0;0;1]$ vzhledem k nějaké soustavě souřadnic.

Řešení: Máme zadány obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze:

$$\begin{aligned} B &= [0;0] \to [1;0;0] = B' \\ C &= [1;0] \to [0;1;0] = C' \\ D &= [0;1] \to [0;0;1] = D' \end{aligned}$$

a můžeme také zkonstruovat asociované zobrazení:

$$\begin{aligned} \vec{BC} \to \vec{B'C'} &= (-1;1;0)_{\mathcal{B}} \\ \vec{BD} \to \vec{B'D'} &= (-1;0;1)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

tedy celkem:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= -x_1 - x_2 + 1 \\ y_2 &= x_1 \\ y_3 &= x_2 \end{aligned}$$

Definice 38 *Bijektivní afinní zobrazení f prostoru $\mathcal{A}$ na sebe sama se nazývá* **afinní transformace** *= AFINITA.*

Poznámka: Běžná afinní zobrazení na ZŠ (posunutí, otočení, středová a osová souměrnost) roviny na sebe sama jsou vždy afinní bijekce = AFINITY.

(Afinní transformace lze skládat, podobně jako jakékoli jiné bijekce množiny na sebe. Lze dokázat, že množina všech afinit v rovině s operací skládání afinity je grupa – podobně jako byla grupa množina všech permutací M na M.)

Poznámka: Zapomněl jsem říct, že afinní zobrazení není lineární – viz příklad 43, část (a).

Napišme ještě v této chvíli **transformační rovnice pro skládání afinních zobrazení:**

$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \langle P; \vec{e_1}, ..., \vec{e_n} \rangle \\ \mathcal{B} &= \langle Q; \vec{f_1}, ..., \vec{f_m} \rangle \\ \mathcal{C} &= \langle S; \vec{k_1}, ..., \vec{k_p} \rangle \end{aligned}$$

$$f : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & ... & a_{n2} \\ ... & & \\ a_{1m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}_{\vec{f}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$g : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_p \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{m1} \\ c_{12} & ... & c_{m2} \\ ... & & \\ c_{1p} & ... & c_{mp} \end{pmatrix}_{\vec{g}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_p \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$g \circ f : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_p \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = C \cdot (A \cdot x + b) + d = C \cdot A \cdot x + C \cdot b + d$$

- $C \cdot A$...matice asociovaného lin. zobr. je rovna součinu matic ve stejném pořadí jako $g \circ f$,
- $C \cdot b + d$... na tento bod se zobrazí bod b.

Věta 25 *Rovnice pro složení afinních zobrazení:*

$$\left.\begin{array}{rcccc} y & = & A \cdot x & + & b \\ z & = & C \cdot y & + & d \end{array}\right\} \Rightarrow z = c \cdot (A \cdot x + b) + d = C \cdot A \cdot x + C \cdot b + d$$

Podívejme se ještě na nějaké příklady, protože teorie bez příkladů by byla poněkud pustá, až k ničemu.

Ad příklad 47. *Otáčení roviny se středem v bodě $S = [3; 2]$ o úhel 60°.*

V příkladu 47 jsme už zjistili, že vektory se zobrazují stejně jako při otáčení se středem v počátku, transformační rovnice lineárního zobrazení vektorů jsou:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Podívejme se na afinní zobrazení bodů:

- Při středu otáčení v počátku by byly rovnice stejné,
- Při $S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ lze rovnice pro přenos bodů odvodit z rovnice pro přenos vektorů následovně:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

kde $\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix}$ je vektor $\vec{SX}$, který pootočíme o 60°.

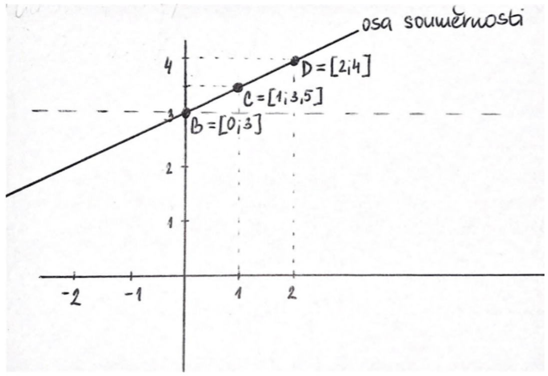
Tento převod upravme do tvaru *matice · bod + bod*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Po úpravě:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Ad příklad 48. *Napište rovnici afinního zobrazení bodů v osové souměrnosti vzhledem k ose $y = \frac{x}{2} + 3$.*



$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1-0\\x_2-3\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\ \frac{24}{5}\end{pmatrix}$$

Posunutý počátek jsme zvolili $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, stejně dobře bychom mohli zvolit $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, a pak:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1-2\\x_2-4\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{12}{5}\\ \frac{24}{5}\end{pmatrix}$$

...tj. volba počátku repéru není jednoznačně určena, ovšem měl by ležet na ose souměrnosti, abychom mohli složit posunutí a osovou souměrnost (příslušným asociovaným lineárním zobrazením k afinnímu posunutí bodů je identita, která má jednotkovou matici – díky tomu při složení afinních zobrazení posunutí a osové souměrnosti vznikla matice složeného asociovaného lineárního zobrazení vektorů vynásobením matice osové souměrnosti se středem v počátku a jednotkové matice, tj. výsledná matice složeného asociovaného zobrazení se nezměnila).

Poznámka: V předchozích dvou příkladech jsme se dotkli toho, že souřadnice bodů jsme vyjadřovali ve dvou různých repérech:

$$\text{např. } \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \text{ jsou souřadnice v repéru } \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle,$$
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \text{ jsou souřadnice téhož bodu v repéru } \left\langle \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Obecně můžeme změnit počátek repéru, ale i jeho bázi, následujícím způsobem:

$X \in \mathcal{A}$ je bod AP se souřadnicemi vzhledem ke dvěma různým repérům:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \langle P, \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n} \rangle \\ \mathcal{R}' &= \langle P', \vec{e'_1}, \vec{e'_2}, ..., \vec{e'_n} \rangle \end{aligned}$$

tedy:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

Jaké jsou převodní rovnice mezi těmito souřadnicemi?

$$\begin{aligned} \text{ad } \mathcal{R}: & \\ \vec{PX} &= x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + ... + x_n \cdot \vec{e_n} \\ X &= P + x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + ... + x_n \cdot \vec{e_n} \\ \Rightarrow X &= P + \underline{e} \cdot x \\ \text{ad } \mathcal{R}': & \\ \vec{P'X} &= x'_1 \cdot \vec{e'_1} + x'_2 \cdot \vec{e'_2} + ... + x'_n \cdot \vec{e'_n}, \\ X &= P' + x'_1 \cdot \vec{e'_1} + x'_2 \cdot \vec{e'_2} + ... + x'_n \cdot \vec{e'_n}, \end{aligned}$$

a tedy

$$X = P' + \underline{e'} \cdot x', \tag{10.1}$$

a nebo také

$$\vec{PX} = \vec{PP'} + \vec{P'X}. \tag{10.2}$$

Na převod mezi bázickými vektory použijeme matici přechodu mezi bázemi (viz přednáška 9), vztah 9.2, jen místo označení báze $\underline{f}$ použijeme $\underline{e'}$ a místo označení matice P^{-1} použijeme A, mrzí mne to[18]:

$$\underline{e} \cdot A_{\underline{e} \to \underline{e'}} = \underline{e'}. \tag{10.3}$$

Vynásobením této rovnosti maticí A^{-1} zprava dostaneme

$$\underline{e} = \underline{e'} \cdot A^{-1}_{\underline{e'} \to \underline{e}}. \tag{10.4}$$

- $\underline{e}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vektory $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$,

[18] Snažil jsem se namísto stejného označení změnit na takové, které by právě vylučovalo použití inverzní matice, ale ve druhém kroku se inverzi stejně nevyhneme. Bylo to tedy vůbec potřebné? :-)

- $\underline{e'}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vektory $\vec{e'_1}, ..., \vec{e'_n}$,
- inverzní matice $A^{-1}_{e' \to e}$ je maticí přechodu v opačném směru než A.

Nyní pomocí matice přechodu tedy dosazením 10.3 do 10.1 dostaneme:

$$\begin{aligned} X &= P' + \underline{e} \cdot A \cdot x' \\ X - P' = \vec{P'X} &= \underline{e} \cdot A \cdot x' \end{aligned}$$

A tedy s využitím 10.2:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \vec{PX} = \vec{PP'} + \vec{P'X} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} + A_{e \to e'} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} .$$

Matico-vektorově tento vztah vyslovíme v matematické větě:

Věta 26 *Přepočet souřadnic při změně repéru:*

$$x_{\mathcal{R}} = b_{\mathcal{R}} + A_{e \to e'} \cdot x_{\mathcal{R}'} / \cdot A^{-1}$$

...převod souřadnic, když známe $x_{\mathcal{R}'}$, a chceme $x_{\mathcal{R}}$.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot x_{\mathcal{R}} &= A^{-1} \cdot b_{\mathcal{R}} + x_{\mathcal{R}'} \\ A^{-1}_{e' \to e} \cdot x_{\mathcal{R}} - A^{-1}_{e' \to e} \cdot b_{\mathcal{R}} &= x_{\mathcal{R}'} \end{aligned}$$

...převod souřadnic, když máme $x_{\mathcal{R}}$, a chceme $x_{\mathcal{R}'}$.

Poznámka: Některé učebnice místo $b_{\mathcal{R}}$ nového počátku vzhledem ke starému repéru při odvození používají souřadnice $c_{\mathcal{R}'}$ starého počátku vzhledem k novému repéru, a také namísto matice přechodu $A_{\underline{e} \to \underline{e'}}$ použijí označení $A_{\underline{e'} \to \underline{e}}$, protože směr přechodu také volíme svým označením.

Například při těchto změnách v označení by pak vztahy ve větě 26 měly tvar

$$x_{\mathcal{R}} = -A^{-1}_{\underline{e} \to \underline{e'}} \cdot c_{\mathcal{R}'} + A^{-1}_{\underline{e} \to \underline{e'}} \cdot x_{\mathcal{R}'},$$

respektive

$$A_{\underline{e'} \to \underline{e}} \cdot x_{\mathcal{R}} + c_{\mathcal{R}'} = x_{\mathcal{R}'}.$$

11 Týden 11

11.1 Cvičení 11: Matice přechodu, vlastní čísla a vektory lin. zobrazení, změna matice lineárního zobrazení při změně báze

Jedná se o cvičení k přednášce v týdnu 9.

Úloha 11.1 *Lineární transformace na vektorovém prostoru je zadána vztahem*

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_1 + 9x_2 \\ -6x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny její vlastní hodnoty a pro každou vlastní hodnotu najděte také aspoň jeden vlastní vektor.

Úloha 11.2 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \to R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.*

b) *Ilustrujte na konkrétním vektoru, co to znamená, že je vlastním vektorem, a na jiném konkrétním vektoru, co to znamená, že není vlastní vektorem vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 11.3

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \textit{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Úloha 11.4 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \to R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.*

b) *Ilustrujte na konkrétním vektoru, co to znamená, že je vlastním vektorem, a na jiném konkrétním vektoru, co to znamená, že není vlastní vektorem vzhledem k zobrazení φ.*

Úloha 11.5

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha \quad \textit{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 11.6 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \to R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.7 *Přepište zobrazení $\psi : R^2 \to R^2$ zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu maticí $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 11.8 *Lineární transformace $\varphi : R^2 \to R^2$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.9 *Přepište zobrazení $\psi : R^2 \to R^2$ zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu maticí $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 11.10 *Lineární transformace $\varphi : R^3 \to R^3$ je zadána maticí*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) této transformace.

Úloha 11.11 *Přepište zobrazení $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$ z příkladu číslo 4 zadané vzhledem ke standardní bázi na vstupu i na výstupu do tvaru zadaného na vstupu i na výstupu vzhledem k bázi*

$$\underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Úloha 11.12 **a)** *Je zadán vlastní vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lineární transformace zadané maticí*

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Najděte k němu příslušnou vlastní hodnotu.

b) *Najděte vlastní vektory (směry) a vlastní čísla (hodnoty) osové souměrnosti v rovině s osou souměrnosti $y = \frac{x}{2}$. Nápověda: Nemusíte hledat matici zobrazení ani nic počítat, stačí jen využít*

- *geometrických vlastností dané osové souměrnosti;*
- *definice vlastního vektoru (a geometrický význam této definice).*

Úloha 11.13

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \text{pro bázi } \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

11.2 Přednáška 11: Skalární součin, vektorový součin

Nejdůležitějším pojmem tohoto semestru je pojem <u>zobrazení</u>:

a) Už při definici vektorového prostoru se objevuje násobení (skalár krát vektor), což je zobrazení $T \times V \to V$ s jistými třemi dalšími vlastnostmi (toto zobrazení bychom mohli nazvat jako **akce tělesa T na množině V**),

b) Každá reálná matice A typu m/n představuje **lineární zobrazení** $\varphi : V \to W$, kde $dim(V) = n, dim(W) = m$, toto zobrazení splňuje tzv. podmínky linearity:

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u}) + \beta \cdot \varphi(\vec{v})$$

c) Na determinant $det(A)$ se lze dívat jako na zobrazení $det : V^n \to \mathbb{R}$, které přiřazuje n řádkům matice A reálné číslo $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$,

- zobrazení, které přiřazuje n vektorům číslo se nazývá **forma**,
- platí D2:

$$det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_n}) = -det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_l}, ..., \vec{a_k}, ..., \vec{a_n})$$

  ...záměna pořadí dvou vektorů změní znaménko obrazu, této vlastnosti říkáme, že **forma je antisymetrická**,
- platí D3: každá souřadnice zobrazení det splňuje podmínku linearity:

$$det(\vec{a_1}, ..., \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, ..., \vec{a_n}) = \alpha \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{u}, ...\vec{a_n}) + \beta \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{v}, ...\vec{a_n})$$

  ...říkáme, že fotma det je **multilineární = lineární v každé složce**.

$\Rightarrow$ celkem $det(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}) : V^n \to \mathbb{R}$ je **antisymetrická multilineární forma**.

d) V této kapitole se budeme zabývat dvěma dalšími typy zobrazení; prvním z nich je skalární součin, zobrazení $V^2 \to \mathbb{R}$, které přiřazuje dvěma vektorům skalár a splňuje jisté vlastnosti.

Definice 39 *Pozitivně definitní symetrická bilineární forma $V^2 \to \mathbb{R}$ se nazývá* **skalární součin***:*

a. $skal(\vec{u}, \vec{u}) > 0, \forall \vec{u} \in V : \vec{u} \neq \vec{o}$*...***pozitivně definitní forma***,*

b. $skal(\vec{u}, \vec{v}) = skal(\vec{v}, \vec{u})$*...***symetrická forma***,*

c. *splňuje podmínky linearity v každé složce – je* **multilineární** *pro $n = 2$...je bilineární:*

$$\begin{aligned} skal(\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \vec{w}) &= \alpha \cdot skal(\vec{u}, \vec{w}) + \beta \cdot skal(\vec{v}, \vec{w}) \\ skal(\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}) &= \alpha \cdot skal(\vec{u}, \vec{v}) + \beta \cdot skal(\vec{u}, \vec{w}) \end{aligned}$$

...linearita vzhledem ke druhé složce už plyne ze symetrie a z linearity v první složce, takže by se nemusela v definici uvádět.

Příklad 60 *Některé příklady vektorových prostorů a skalárního součinu vektorů:*

a) $V = \langle a; b\rangle$*...prostor reálných spojitých funkcí na intervalu* $\langle a; b\rangle$.

Pro $f(x), g(x) \in C\langle a; b\rangle$ *lze definovat:*

$$skal(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

integrál jako lineární operátor:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f_1(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b f_2(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

také symetrie je zaměněna:

$$skal(f(x), g(x)) = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

pro $f(x) \neq 0$.

b) *V* $\mathbb{R}^3$ *je skalární součin vektorů definován standardně:*

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

tato bilineární forma opět splňuje všechny tři vlastnosti (pozitivní definitnost, symetrii, linearitu v každé složce).
Skalární součin lze zadat vektorově/maticově:

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

c) *Matice E v příkladu b) by mohla být nahrazena libovolnou symetrickou maticí A, jejíž všechny hlavní minory jsou kladné:*

$$a_{11} > 0, det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, ..., det(A) > 0$$

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ \vec{v_n} \end{pmatrix}$$

...tj. klasicky definovaný skalární součin (b) není jediná možnost, (c) naznačuje i další možnosti.

Definice 40 *Čtvercová matice A je*

a) *Symetrická, pokud $a_{ij} = a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem k hlavní diagonvále jsou totožné, tj. platí $A = A^T$),*

b) *Antisymetrická, pokud $a_{ij} = -a_{ji}$ (prvky souměrné vzhledem k hlavní diagonále se liší o znaménko).*

Definice 41 *Prostor $(V;+;\cdot)$, na kterém je definován skalární součin, se nazývá* **Euklidovský vektorový prostor**.

Poznámka: Nechť $(V;+;\cdot)$ je Euklidovský vektorový prostor (= vektorový prostor se skalárním součinem) a $(\vec{u_1},...,\vec{u_k})$ posloupnost vektorů.

Pak **Grammova matice** je matice všech možných skalárních součinů:

$$G(\vec{u_1},...,\vec{u_k}) = \Big(skal(\vec{u_i},\vec{u_j})\Big)_{k\times k} = \begin{pmatrix} skal(\vec{u_1},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_1},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_1},\vec{u_k}) \\ skal(\vec{u_2},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_2},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_2},\vec{u_k}) \\ ... & & & \\ skal(\vec{u_k},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_k},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_k},\vec{u_k}) \end{pmatrix}$$

Grammův determinant $detG(\vec{u_1},...,\vec{u_k})$ je determinant z Grammovy matice.

Definice 42 *Čtvercová matice A řádu n je pozitivně (kladně) definitní, když $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kromě nulového vektoru ($\vec{x} \neq \vec{o}$) platí:*

$$(x_1,x_2,...,x_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} > 0$$

Věta 27 a) *(Shilov, str. 209) Symetrická (čtvercová) matice A je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ všechny její hlavní minory jsou kladné:*

$$a_{11} > 0, det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, ..., det(A) > 0.$$

b) *(Zlatoš, str. 255) V Euklidovském vektorovém prostoru: Vektory $\vec{u_1},...,\vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ jejich Grammova matice je pozitivně (kladně) definitní.*

Důkaz věty (b):

„$\Rightarrow$“ vektory $\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow$ tvoří bázi vektorového podprostoru $S := L(\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k})$. Tento podprostor je vektorový prostor se skalárním součinem, který se "sveze"z většího prostoru (žádnou uzavřenost na výsledek nemusíme řešit, protože skalární součin přiřazuje vektorům reálné číslo).

Pak Grammova matice $G(\vec{u_1},...,\vec{u_k})$ je maticí tohoto skalárního součinu $skal(\vec{u},\vec{v})$ na podprostoru $L(\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k})$ vzhledem k bázi $\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k}$, tj. platí:

$$skal(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,x_2,...,x_k)\cdot\begin{pmatrix} skal(\vec{u_1},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_1},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_1},\vec{u_k}) \\ skal(\vec{u_2},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_2},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_2},\vec{u_k}) \\ ... & & & \\ skal(\vec{u_k},\vec{u_1}) & skal(\vec{u_k},\vec{u_2}) & ... & skal(\vec{u_k},\vec{u_k}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_k \end{pmatrix}$$

Protože skalární součin je bilineární forma pozitivně definitní, je matice $G(\vec{u_1},...,\vec{u_k})$, který jej realizuje, také pozitivně definitní.

„⇐“ Sporem: $G(\vec{u_1},...,\vec{u_k})$ je pozitivně definitní a vektory $\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k}$ jsou lineárně závislé. Pak v $\mathbb{R}^k$ existují konstanty $(c_1,...,c_k)$, které nejsou všechny rovny nuly, tak, že:

$$\vec{v} = c_1\cdot\vec{u_1}+c_2\cdot\vec{u_2}+...+c_k\cdot\vec{u_k} = \vec{o} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_k \end{pmatrix}_n$$

...kombinací závislých vektorů vznikne nulový řádek, pak tedy vektor $\vec{c} = (c_1,c_2,...,c_k)$ není roven nulovému vektoru a platí:

$$skal(\vec{v},\vec{v}) = (c_1,c_2,...,c_k)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\cdot c_j\cdot skal(\vec{u_i},\vec{u_j}) = 0$$

...spor s tím, že $\vec{c}\neq\vec{o}$, tj. s tím, že G je pozitivně definitní.

Věta 28 *(Zlatoš, str. 255, 13.2.1.a) Nechť $\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k}$ jsou libovolné vektory v Euklidovském prostoru. Pak Grammova matice $G(\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k})$ je semidefinitní symetrická matice, tj.*

$$\forall\vec{c} = (c_1,c_2,...,c_k)\in\mathbb{R}^k : (c_1,c_2,...,c_k)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_k \end{pmatrix} \geq 0$$

Důkaz: Symetrie matice G plyne ze symetrie bilineární formy $skal$. Dokažme ještě nezápornost = semidefinitnost.

Vezměme libovolný vektor $\vec{v} = c_1\cdot\vec{u_1}+c_2\cdot\vec{u_2}+...+c_k\cdot\vec{u_k}\in L(\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_k})$.
Pak:

$$skal(\vec{v},\vec{v}) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i\cdot c_j\cdot skal(\vec{u_i},\vec{u_j}) = (c_1,c_2,...,c_k)\cdot G\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_k \end{pmatrix} \geq 0$$

- ≥ 0...kladná definitnost operátoru $skal(\vec{v},\vec{v})$,
- bilinearita – vytkneme c_i, c_j před skalární součin.

Důsledek vět 27, 28:

$$\forall \vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k} \in V : det(G(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k})) \geq 0$$

...rovnost nastává právě tehdy, když jsou $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ lineárně závislé.

Věta 29 Schwarzova nerovnost: *pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$ prostoru V, který je Euklidovský (= se skalárním součinem), platí:*

$$det \begin{vmatrix} skal(\vec{u},\vec{u}) & skal(\vec{u},\vec{v}) \\ skal(\vec{v},\vec{u}) & skal(\vec{v},\vec{v}) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$skal(\vec{u},\vec{u}) \cdot skal(\vec{v},\vec{v}) - skal^2(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$$

Definice 43 *Norma (= velikost) vektoru $\vec{v}$ na Euklidovském prostoru se definuje*

$$||\vec{v}|| := \sqrt{skal(\vec{v},\vec{v})}.$$

Schwarzova nerovnost s využitím pojmu velikosti. S využitím pojmu normy (velikosti) lze Schwarzovu nerovnost psát ve tvaru

$$||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - skal^2(\vec{u},\vec{v}) \geq 0,$$

nebo nejlépe ve tvaru (na pravé straně se nyní vyskytuje obyčejná absolutní hodnota reálného čísla)

$$||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \geq |skal(\vec{u},\vec{v})|.$$

Přitom rovnost $||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| = |skal(\vec{u},\vec{v})|$ nastává právě tehdy, když jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ lineárně závislé.

Poznámka: Na pojmech skalární součin dvou vektorů a velikost jednoho vektoru je krásné to, že vypočtené reálné číslo nezávisí na bázi zvolené pro skalární součin (tj. pro Grammovu matici).

Tj. tyto pojmy jsou příkladem tzv. **invariantů** neboli veličin, které nezávisí na volbě báze.

Věta 30 *Vlastnosti normy = velikosti vektoru: pro $||\vec{v}||$ na Euklidovském vektorovém prostoru platí:*

a) $||\vec{u}|| \geq 0$, *přičemž* $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o}$ *(pozitivní definitnost),*

b) $||\alpha \cdot \vec{u}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{u}||$ *(homogenita),*

c) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ *(trojúhelníková nerovnost),*

d) *pro $\vec{u} \neq \vec{o}$ lze vektor $\vec{u}$ tzv. normovat = prodloužit či zkrátit na velikost 1:* $\frac{1}{||\vec{u}||} \cdot \vec{u}$.

Ze Schwarzovy nerovnosti lze definovat odchylku vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\begin{aligned} |skal(\vec{u},\vec{v})| &\leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \\ \frac{|skal(\vec{u},\vec{v})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} &\leq 1 \\ -1 \leq \frac{skal(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||} &\leq 1 \end{aligned}$$

Definice 44 *Pro nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ z Euklidovského prostoru lze definovat jednoznačně odchylku φ vztahem:*

$$\cos\varphi = \frac{skal(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

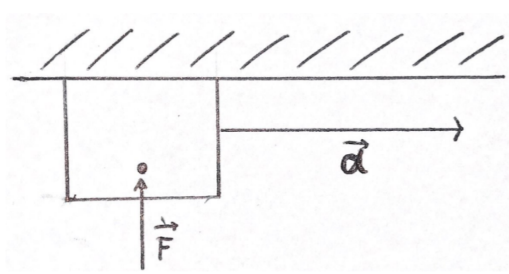
Pro hodnotu zlomku z intervalu $< -1; 1 >$ přiřadí funkce arccos(x) úhel φ interval $< 0; \pi >$ jednoznačně, tj. na $< 0; \pi >$ existuje právě jedno φ splňující daný vztah.

Poznámka: Známe-li odchylku, můžeme vyjádřit hodnotu skalárního součinu obou vektorů:

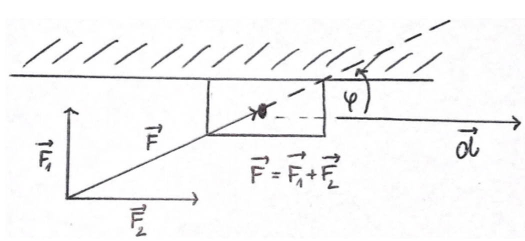
$$skal(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\varphi$$

Fyzikální význam skalárního součinu: pokud posunujeme skříň do vzdálenosti a směru $\vec{d}$ a tlačíme na ni kolmo na směr posunutí, nevykonáme žádnou práci, tj.:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 0$$



Tedy se zdá, že na práci vykonanou ve směru $\vec{d}$ bude mít vliv ta část síly $\vec{F}$, která bude působit ve stejném směru jako $\vec{d}$.



Když působíme na skříň v šikmém směru, sílu $\vec{F}$ lze rozložit na součet sil $\vec{F_1}, \vec{F_2}$.

Síla $\vec{F_1}$ nevykoná ve směru $\vec{d}$ žádnou práci (viz předchozí obrázek).

Na práci ve směru $\vec{d}$ má vliv jen síla $\vec{F_2}$. Z toho plyne poučení, že skalární součin vyjadřuje míru vlivu vektoru $\vec{F}$ ve směru $\vec{d}$ (míra vlivu $\vec{F}$ je vyjádřena průmětem kolmým $\vec{F}$ do směru $\vec{d}$).

$$\begin{aligned} ||\vec{F_2}|| &= ||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi \\ W = \vec{F} \cdot \vec{d} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{d}|| \cdot \cos\varphi &= ||\vec{d}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi = ||\vec{d}|| \cdot ||\vec{F_2}|| \end{aligned}$$

Práce vykonána při posunutí ve směru a délce $\vec{d}$ působením síly $\vec{F}$ je rovna skalárnímu součinu $\vec{d} \cdot \vec{F}$.

(Při skalárním součinu sestrojujeme průmět kolmý jednoho vektoru do směru druhého vektoru.)

Geometrický význam skalárního součinu: obsah obdélníku o stranách $||\vec{d}||$ a $(||\vec{F}|| \cdot \cos\varphi)$.

V příkladu fyzikálního významu skalárního součinu byla řeč o kolmém průmětu – musíme se tedy chvíli věnovat pojmu kolmost.

Definice 45 a) *Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v Euklidovském prostoru jsou ortogonální, když platí:*

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Poznámka: Někdy se zaměňují pojmy ortogonálnost a kolmost. Kolmost definujeme v $\mathbb{R}^n$ pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které jsou nenulové. Ortogonálnost připouští, aby některý z vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ (nebo oba) byl nulový, je to tedy obecnější pojem než kolmost.

Často je při práci s bázemi vektorových podprostorů vhodné, aby v nich byly vektory, které jsou navzájem ortogonální.

Definice 45 b) *Báze podprostoru, nebo libovolná posloupnost nezávislých vektorů je:*

a) *ortogonální, jestliže každé dva vektory z této posloupnosti jsou ortogonální,*

b) *ortonormální, jestliže je ortogonální a velikost všech vektorů je normovaná (= 1).*

Poznámka: Grammova matice ortogonální matice je diagonální, grammova matice ortonormální matice je jednotková.

Pokud už máme ortogonální matici, lze definovat i ortogonální matici a ortogonální zobrazení. Ortogonální zobrazení pak bude přirozeně reprezentováno ortogonální maticí.

Definice 45 c) *Čtvercová matice A je ortogonální, jestliže její sloupce jsou navzájem ortogonální.*

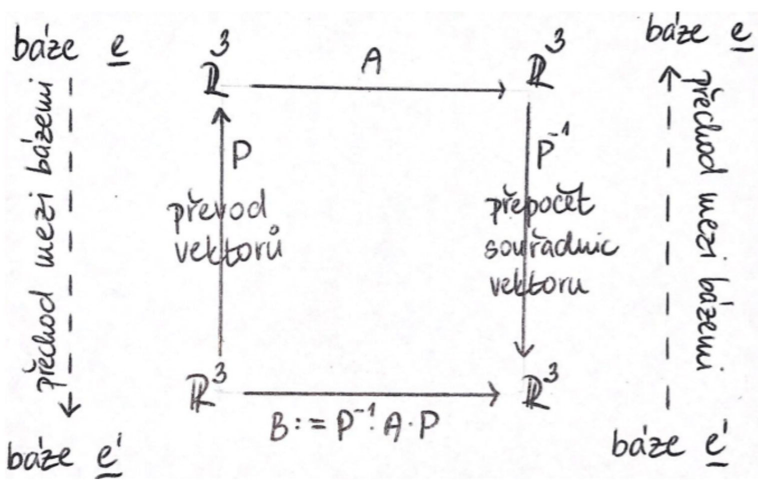
Lineární zobrazení $\varphi : V \to W$ je ortogonální zobrazení, jestliže zachovává výsledek skalárního součinu, tj.:

$$skal(\vec{u}, \vec{v}) = skal(\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}))$$

Poznámka: Protože norma vektoru se definuje pomocí skalárního součinu, ortogonální zobrazení zachovává i normu = velikost vektorů. Tedy ortogonální zobrazení zachovává i odchylky vektorů, protože odchylka se definuje pomocí skalárního součinu a normy.

Dříve než se pustíme do dalších věcí, dokončíme nyní zkoumání vlastních čísel a vlastních vektorů vzhledem k ortogonalitě (teorie + následující příklad viz Kovár, str. 122-128):

Vraťme se k situaci nějaké lineární transformace $\varphi : V \to V'$ zadané maticí A:



(A, B...podobné matice = matice stejné lineární transformace v různých bázích.)

Bez důkazu uvedeme několik vět a jeden příklad, ke kterému směřujeme.

Věta 31 *Podobné matice A, B (tedy takové matice, že existuje regulární matice P, že $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$) mají stejné vlastní hodnoty.*

Tj. vlastní hodnoty lineární transformace jsou invarianty – nemění se se změnou báze.

Věta 32 *Reálná čtvercová symetrická matice má právě n navzájem různých vlastních hodnot a vlastní vektory příslušející různým vlastním hodnotám jsou navzájem ortogonální.*

A vrcholem bude následující věta, která ve svém tvrzení uvádí i návod na řešení následujícího příkladu.

Věta 33 *Pro každou symetrickou reálnou matici A, která reprezentuje lineární transformaci $\varphi : V \to V$ existuje ortonormální báze složená z vlastních vektorů matice A, ve které má transformace φ diagonální matici D složenou z vlastních čísel na své hlavní diagonále.*

Navíc matice přechodu H je ortogonální a její inverzi získáme pouhým transponováním $H^{-1} = H^T$.

$$D = H^T \cdot A \cdot H$$

Ad příklad 52: *Najděte diagonální reprezentaci D lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané symetrickou maticí*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nalezněte také ortonormální bázi, vzhledem k níž je φ diagonální, a ověřte, že platí $D = H^T \cdot A \cdot H$.

Řešení: Matice D se skládá z vlastních čísel, které jsme našli v příkladu 52: Vlastní hodnotě $\lambda_1 = -2$ odpovídá vlastní vektor $\vec{v_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

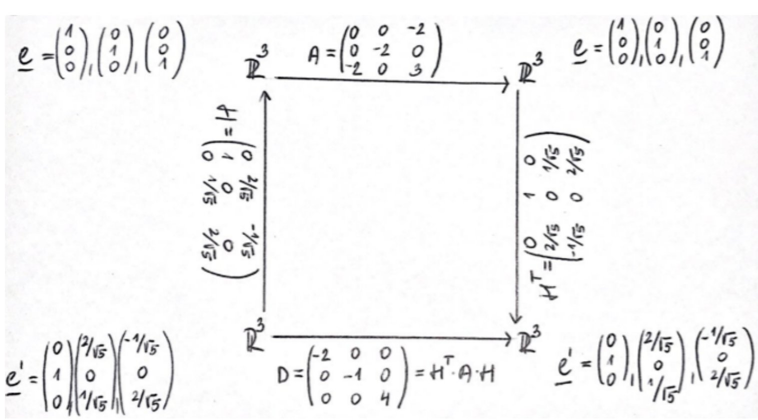
Vlastní hodnotě $\lambda_2 = -1$ odpovídá vlastní vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, který ještě normujeme, protože jej budeme chtít použít do ortonormální báze:

$$\left|\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =: \vec{v_2}$$

A konečně, vlastní hodnotě $\lambda_3 = 4$ odpovídá vlastní vektor $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, který ještě normujeme:

$$\left|\left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \vec{v_3} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =: \vec{v_3}.$$

Sestavení konstrukce předchozí věty: Na diagonále matice D jsou vlastní čísla λ_i ve stejném pořadí, v jakém jsme dali do báze $\underline{e'}$ jejich normované vlastní vektory:



Proč platí $H^{-1} = H^T$? Protože

$$H^T \cdot H = (skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}))_{i,j=1,2,3} = E.$$

(Vysvětlení: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ jsou navzájem ortogonální, a přitom jejich velikost = 1. Proto

$$\left.\begin{array}{r} i \neq j : skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = 0 \\ i = j : skal(\vec{v_i}, \vec{v_j}) = ||\vec{v_i}||^2 = 1^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow H^T \cdot H = E$$

(Z jednoznačnosti inverze u regulární matice – algebra 1, větička 4 – dostaneme, že $H^{-1} = H^T$.)

Poznámka: Ne každé lineární zobrazení $V \to V$ je diagonalizovatelné; uvedeným postupem dokážeme najít D, pokud je A symetrická. Pro některé další matice diagonální podobná matice neexistuje (to, co vždy existuje, je tzv. kanonická matice v Jordanově tvaru – viz předmět "analytická geometrie"v 5. semestru).

Pojďme nyní k otázce nalezení ortonormální/ortogonální báze jistého vektorového podprostoru, když je nám známa jeho báze $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$, která ortogonální není. Obecně následující věta platí i pro vektory lineárně závislé – její důkaz je konstruktivní a bude vysvětlen na příkladu.

Věta 34 *Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces: Nechť $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ jsou vektory euklidovského prostoru $\Rightarrow$ existují po dvou ortogonální vektory*

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k} : L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = L(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_k})$$

Příklad 61 *Nalezněte bázi podprostoru $U = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$:*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Mohli bychom nejprve vyřadit některý z vektorů, pokud je závislý na těch ostatních; když se tomu vyhneme, podívejme se na to, jak si s tím následující algoritmus poradí:

a) $\vec{e_1} := \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ...první z konstruovaných vektorů necháme být,

b) Hledáme

$$\vec{e_2} := p_1 \cdot \vec{e_1} + \vec{u_2} / \cdot \vec{e_1}$$

...musíme určit neznámou konstantu p_1, využijeme ortogonality $\vec{e_1}, \vec{e_2} : skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$:

$$0 = p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + skal(\vec{e_1}, \vec{u_2}) \Rightarrow p_1 = \frac{-skal(\vec{e_1}, \vec{u_2})}{skal(\vec{e_1}, \vec{e_1})} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Našli jsme tedy vektor:

$$\vec{e_2} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Hledáme

$$\vec{e_3} := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3} / \cdot \vec{e_1}$$
$$\vec{e_3} := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + \vec{u_3} / \cdot \vec{e_2}$$

... při určení neznámých konstant p_1, p_2 vynásobíme zvlášť tutéž definiční rovnici už zkonstruovanými vektory $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ – zatím sice $\vec{e_3}$ neznáme, ale protože $skal(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = 0$, $skal(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = 0$, tak $\vec{e_3}$ z rovnic vypadne a dostaneme 2 rovnice pro 2 neznámé konstanty p_1, p_2:

$$\begin{aligned} 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_1}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + skal(\vec{e_1}, \vec{e_3}) \\ 0 &= p_1 \cdot skal(\vec{e_1}, \vec{e_2}) + p_2 \cdot skal(\vec{e_2}, \vec{e_2}) + skal(\vec{e_2}, \vec{e_3}) \\ \Rightarrow 0 = p_1 \cdot 6 + 2 \quad &\Rightarrow \quad p_1 = -\frac{1}{3} \\ 0 = p_2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \quad &\Rightarrow \quad p_2 = 1 \end{aligned}$$

Našli jsme vektor:

$$\vec{e_3} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pokud jsme nevyloučili $\vec{u_3}$ závislý na vektorech $\vec{u_1}, \vec{u_2}$, tak Grammův-Schmidtův proces najde $\vec{e_3} = 0$, a ten do báze nebereme, i když je ortogonální k $\vec{e_1}$ i k $\vec{e_2}$.

Odpověď: $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ je dimenze 2 a jeho ortogonální báze je např.:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(Atd., při větším počtu vektorů hledáme $e_4 := p_1 \cdot \vec{e_1} + p_2 \cdot \vec{e_2} + p_3 \cdot \vec{e_3} + \vec{u_4}$ a když tuto definiční rovnost vynásobíme zvlášť vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé p_1, p_2, p_3.)

Definice 46 *Množiny vektorů A, B jsou ortogonální, když:*

$$\forall \vec{a} \in A, \vec{b} \in B : \textit{vektory } \vec{a}, \vec{b} \textit{ jsou ortogonální.}$$

(Značíme $A \perp B$.)

Z linearity skalárního součinu plyne, že množiny A, B jsou ortogonální právě tehdy, když jsou ortogonální i vektorové podprostory $\langle A\rangle, \langle B\rangle$ jimi generované. Proto má smysl následující definice (kterou jsme použili už v příkladech na konci třetí přednášky):

Definice 47 *Když U je vektorový podprostor euklidovského prostoru V, tak ortogonální doplněk $U^\perp$ podprostoru U v prostoru V se definuje jako množina všech vektorů ortogonálních k U:*

$$U^\perp = \{\vec{x} \in V : skal(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \; \forall \vec{u} \in U\}$$

Věta 35 a) *Ortogonální doplněk $U^\perp$ je vektorový podprostor,*

b) *$V = U + U^\perp$ (tzn. přímý součet, tj. $U \cap U^\perp = \vec{o}$, $dim(V) = dim(U) + dim(U^\perp)$),*

c) *$(U^\perp)^\perp = U$,*

d) *$(U + S)^\perp = U^\perp \cap S^\perp$,*

e) *$(U \cap S)^\perp = U^\perp + S^\perp$.*
...(d,e je vlastně jakousi analogii de Morganových pravidel (viz Základy matematiky, kap. 4) pro vektorové podprostory U, S euklidovského prostoru V.

Příklad 62 *V prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor*

$$U = \langle \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

Najděte ortonormální bázi podprostoru $U^\perp$.

Řešení: Nejprve z vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ eventuálně vyloučíme vektor závislý na těch ostatních; pokud bychom na to zapomněli, algoritmus si s tím stejně poradí:

Pro $\vec{x} \in U^\perp$ platí:

$$\begin{aligned} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) &= 0 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) &= 0 \\ skal(\vec{x}, \vec{u_3}) &= 0 \end{aligned}$$

To je SLR:

$$\begin{array}{rcll} x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 & = & 0 & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 & -r_1 \\ 2x_1 + x_2 + \qquad 2x_4 & = & 0 & -2\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cdot r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & s - 2t \\ x_2 & = & 2t - 2s \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & t \end{array}$$

Tedy řešením SLR jsme našli vektory z $U^\perp$:

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

...lineární kombinace bázických vektorů, zortogonalizujeme Gr.-Schm. procesem:

$$\begin{array}{rcl} \vec{e_1} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} := p_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \cdot \vec{e_1} \\ \Rightarrow 0 & = & 6p_1 - 6 \Rightarrow p_1 = 1 \Rightarrow \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vektory znormalizujeme:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Příklad 63 *Nalezněte bázi podprostoru $W^\perp$, je-li W jako podprostor řešení homogenní soustavy:*

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 & = & 0 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 - 9x_4 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}$$

Řešení: W je množina všech vektorů $\vec{x}$, pro které platí:

$$skal\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0, skal\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0, skal\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}\right) = 0,$$

...tedy $W^\perp$ je právě podprostor generovaný vektory $\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Ověříme pouze, zda tyto vektory jsou lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix}3&0&-2&-9\\3&3&2&7\\0&0&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\-r_1\\ \\\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}3&0&-2&-9\\0&3&4&16\\0&0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow W^\perp = \left(\begin{pmatrix}3\\3\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Poznámka: Poslední dobrůtka, kterou nyní potřebujeme použít u pojmu ortogonalita, je tzv. ortogonální projekce vektoru do podprostoru. K čemu to potřebujeme?

a) Pokud chceme např. určit odchylku vektoru od podprostoru, promítneme tento (nenulový) vektor kolmo do daného podprostoru, a určíme odchylku vektoru a jeho průmětu,

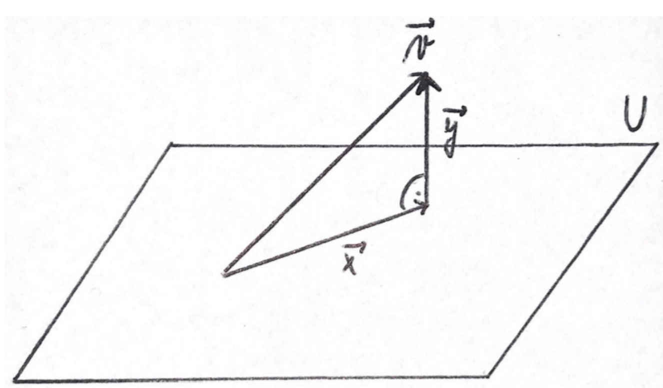
b) Ortogonální projekci budeme potřebovat při konstrukci n-rozměrného objemu,

c) Při výpočtu skalárního či vektorového součinu pracujeme s kolmými průměty vektoru do směru druhého vektoru (u skalárního součinu) a do směru kolmého na druhý vektor (u vektorového součinu). Rozklad vektoru na součet dvou vektorů, které jsou na sebe kolmé, lze tedy spočítat s využitím kolmého průmětu.

Definice 48 *Ortogonální projekce nenulového vektoru $\vec{v}$ do podprostoru U je vektor $\vec{x}$ takový, že:*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$$

kde $\vec{x} \in U, \vec{y} \in U^\perp$.



(Vše se odehrává v euklidovském prostoru, protože bez skalárního součinu není umožněn pojem kolmosti.)

Konstrukce ortogonální projekce bude vysvětlena na příkladu.

Příklad 64 *Nalezněte ortogonální projekci vektoru* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *do podprostoru generovaného vektory:*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Podívejme se, zda $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ jsou lineárně nezávislé, a vybereme z nich bázi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{báze } U = \left(\vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Protože projekce $\vec{x} \in U$, lze $\vec{x}$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\vec{w_1}, \vec{w_2}$:

$\vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{w_1} + \alpha_2 \cdot \vec{w_2} \Rightarrow \vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$, kde $skal(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Dosazením za $\vec{x}$ do vyjádření vektoru $\vec{v}$ máme

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{w_1} + \alpha_2 \cdot \vec{w_2} + \vec{y}.$$

Nyní vynásobením této rovnosti zvlášť vektory $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ dostaneme dvě rovnice, ze kterých vypadne $\vec{y}$, protože $\vec{y} \perp U = L(\vec{w_1}, \vec{w_2})$:

$$\begin{aligned} skal(\vec{v}, \vec{w_1}) &= \alpha_1 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_1}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_2}) + 0 \\ skal(\vec{v}, \vec{w_2}) &= \alpha_1 \cdot skal(\vec{w_1}, \vec{w_2}) + \alpha_2 \cdot skal(\vec{w_2}, \vec{w_2}) + 0 \end{aligned}$$

...dvě rovnice o dvou neznámých α_1, α_2.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : \left. \begin{matrix} 4 = \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 0 \\ -12 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$$

$$\Rightarrow \vec{x} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Vektor $\vec{y}$ lze nyní už snadno vyjádřit:

$$\vec{y} = \vec{v} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad je hotov. $\square$

Nyní se blížíme ještě k pokrytí posledního pojmu, kterým tento kurz zakončíme, a to je pojem vektorového součinu vektorů. Tento pojem je obecně odvozen od pojmu n-rozměrného objemu (dále podle Zlatoš, kap. 15, od str. 300): V EUKLIDOVSKÉM VEKTOROVÉM PROSTORU.

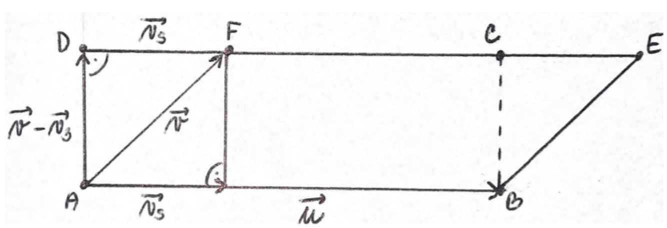
Definice 49 Objem v euklidovském vektorovém prostoru:

- *Uvažujeme jednorozměrný objem jako délku vektoru $\vec{u}$:*

$$vol_1(\vec{u}) = ||\vec{u}||$$

- *Dále dvojrozměrný objem $vol_2(\vec{u}, \vec{v})$ bude vyjadřovat obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$ – tento obsah je stejný jako obsah obdélníka $ABCD$, tj.:*

$$vol_2(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v} - \vec{v_S}||$$

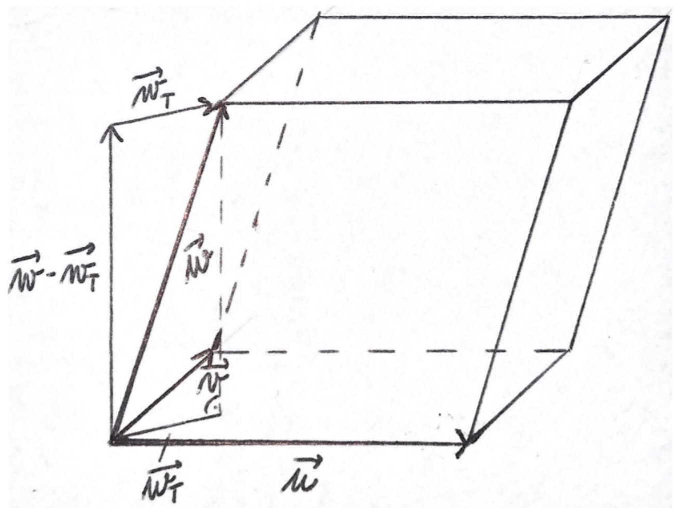


kde $\vec{v_S}$ je ortogonální projekce vektoru $\vec{v}$ do podprostoru $S = L(\vec{u})$, tedy $vol_2(\vec{u}, \vec{v}) = vol_1(\vec{u}) \cdot ||\vec{v} - \vec{v_S}||$.

- *Podobně trojrozměrný objem $vol_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ a vypočteme jej jako:*

$$vol_3(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = vol_2(\vec{u}, \vec{v}) \cdot ||\vec{w} - \vec{w_T}||$$

kde $vol_2(\vec{u}, \vec{v})$ je obsah rovnoběžníku, který je základnou rovnoběžnostěnu, a $||\vec{w} - \vec{w_T}||$ je výška rovnoběžnostěnu, určená velikostí vektoru $\vec{w} - \vec{w_T}$, kde $\vec{w_T}$ je kolmý průmět vektoru $\vec{w}$ do podprostoru $T = L(\vec{u}, \vec{v})$.



- *Podle tohoto schématu pokračujeme do vyšších dimenzí a definujeme (rekurentním vztahem) k-rozměrný objem rovnoběžnostěnu jako funkci:*

$$vol_k : V^k \to \mathbb{R}$$

která vektorům $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}}, \vec{u_k} \in V$ *přiřadí reálné číslo:*

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = vol_{k-1}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}}) \cdot ||\vec{u_k} - \vec{u_U}||$$

kde $\vec{u_U}$ *je ortogonální projekce (= kolmý průmět) vektoru* $\vec{u_k}$ *do podprostoru* $U = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_{k-1}})$.

Poznámka: Z geometrické názornosti takto definovaného objemu plyne, že v naší terminologii k-rozměrný objem je symetrická (objem nezávisí na pořadí vektorů), k-lineární (multilineární = lineární v každé složce) forma. Dále z konstrukce objemu plyne následující věta:

Věta 36 *(Zlatoš, str. 301) V je vektorový prostor se skalárním součinem (= euklidovský vekt. prostor),* $k \geq 1$. *Pro libovolné vektory* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k} \in V$ *platí:*

a) $vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) \geq 0$, *přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory* $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ *jsou lineárně závislé,*

b) $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ *jsou ortogonální* $\Leftrightarrow vol_k(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) = ||\vec{u_1}|| \cdot ||\vec{u_2}|| \cdot ... \cdot ||\vec{u_k}||$,

c) *Pokud* $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ *jsou lineárně nezávislé, tak lze Gr.-Schm. procesem získat ortogonální vektory*

$$\vec{v_1}, ...\vec{v_k} : vol_k(\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}) = vol_k(\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}) = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot ... \cdot ||\vec{v_k}||.$$

Poznámka ad a) Pokud vektory $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ jsou lineárně závislé, tj. leží v jedné rovině, rovnoběžnostěn jimi určený je degenerovaný – jeho objem vol_3 v prostorových jednotkách je roven 0.

Definice 50 *Elementární úpravy matice bilineární formy:*
Bilineární forma $\varphi : V^2 \to \mathbb{R}$ je zadána maticí řádu n tak, že:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$$

Elementární úpravy matice bilineární formy (budeme jim říkat EŘÚ/ESÚ úpravy = řádkové i sloupcové úpravy) jsou takové úpravy, které změní matici A na matici B stejné bilineární formy φ, ovšem vyjádřené v jiné bázi (tj. při tranformaci souřadnic vektorů $\vec{u}, \vec{v}$) a platí:

$$B = P^T \cdot A \cdot P$$

pro nějakou regulární P.

Protože do vzorce bilineární formy vstupují dva vektory současně (řádkový i sloupcový), na rozdíl od Gaussovy eliminace každá elementární úprava zde bude spočívat v tom, že s řádkovou úpravou se hned následně provede i sloupcová úprava stejné povahy.

EŘÚ+ESÚ matice bilineární formy*:*

a) *Přehodíme i-tý řádek s j-tým řádkem, a hned poté i-tý sloupec s j-tým sloupcem,*

b) *i-tý řádek vynásobíme nenulovou konstantou c, a hned poté i-tý sloupec vynásobíme c,*

c) *K j-tému řádku přičteme c-násobek i-tého řádku, a hned poté k j-tému sloupci přičteme c-násobek i-tého sloupce.*

Věta 37 *Matice B získaná z matice A elementárními EŘÚ+ESÚ úpravami ($B = P^T \cdot A \cdot P$ pro nějakou regulární P) je maticí téže bilineární formy, pouze vzhledem k jiné bázi daného prostoru.*

Příklad 65 *Převeďte matici A dané symetrické bilineární formy φ vzhledem ke standardní bázi $\underline{e}$ na jinou matici vzhledem k jiné bázi $\underline{e}'$:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Všimněme si nejprve, jak bilineární forma φ pracuje vzhledem k bázi

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Např. pro vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ máme:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (1, 2, 3, -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -11,5$$

Pokusme se matici A zjednodušit elementárními EŘÚ+ESÚ úpravami:
Strategie: Vezmeme první nenulový prvek a_{ii} a pomocí něj vynulujeme prvky pod ním a napravo od něj:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\frac{1}{2} \cdot r_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

...ke 3. sloupci matice přičteme $+\frac{1}{2} \cdot s_2$ (s_2 je druhý sloupec matice):

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +3 \cdot r_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim$$

...ke 4. sloupci přičteme $+3 \cdot s_3$:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = B$$

...je zachována symetrie matice B a matice B je maticí téže bilineární formy vzhledem k jiné bázi (s úpravami matice B bychom mohli pokračovat).

Vraťme se nyní k výpočtu k-rozměrného objemu:

Věta 38 *Na euklidovském vektorovém prostoru nad tělesem* $\mathbb{R}$ *platí pro libovolné vektory* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$*:*

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = \sqrt{det\big(G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})\big)}.$$

Poznámka: Z předchozí věty plyne návod pro výpočet objemu: Vytvoříme Grammovu matici $G(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k})$, a protože se jedná o matici symetrické bilineární formy, upravujeme ji symetrickými EŘÚ+ESÚ úpravami na diagonální tvar. Když se nám to podaří, tento diagonální tvar je:

$$\begin{pmatrix} ||\vec{u_1}||^2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ||\vec{u_2}||^2 & 0 & ... & 0 \\ ... \\ 0 & ... & 0 & ... & ||\vec{u_k}||^2 \end{pmatrix}$$

a tedy:

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = \sqrt{||\vec{u_1}||^2 \cdot ||\vec{u_2}||^2 \cdot ... \cdot ||\vec{u_k}||^2}$$

Pokud matici na tento tvar upravit nelze ($a_{ii} = 0$), znamená to, že:

$$vol_k(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}) = 0$$

Definice 51 *Dvě báze vektorového prostoru jsou <u>souhlasně orientované</u>, pokud matice přechodu mezi nimi má kladný determinant;*

Dvě báze vektorového prostoru jsou <u>nesouhlasně orientované</u>, pokud matice přechodu mezi nimi má záporný determinant.

Poznámka: Relace souhlasné orientace mezi dvěma bázemi (tj. binární relace na množině čtvercových matic daného řádu!) je relací ekvivalence, protože:

- každá báze je souhlasně orientovaná sama se sebou:

$$detE = 1$$

- $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$...relace je symetrická (opět využíváme v tichosti pominutou Cauchyho větu, že determinant součinu matic je roven součinu dílčích determinantů):

$$detP \cdot detP^{-1} = detE = 1 \rightarrow detP > 0 \Leftrightarrow detP^{-1} > 0$$

- $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$...relace je tranzitivní:

$$P_{\alpha\to\beta} \cdot P_{\beta\to\gamma} = P_{\alpha\to\gamma}$$

...vztah mezi maticemi přechodu:

$$detP_{\alpha\to\beta} \cdot detP_{\beta\to\gamma} = detP_{\alpha\to\gamma}$$

a výsledek součinu kladných čísel je opět kladný.

<u>Strategie kladné orientace:</u> Vybereme jednu hezkou bázi (zpravidla standardní) a prohlásíme ji za kladně orientovanou. Pak všechny báze s ní orientované souhlasně mají též kladnou orientaci.

Příklad 66 a) *Kladně orientovaná báze v prostoru jedné dimenze $L(\vec{u})$: báze $\vec{v}$ má stejný směr jako vektor $\vec{u}$,*

b) *Kladně orientovaná báze v prostoru dimenze 2, tj.* $L(\vec{u_1}, \vec{u_2})$*: otáčíme* $\vec{u_1}$ *do směru* $\vec{u_2}$ *proti směru pohybu hodinových ručiček,*

c) *Kladně orientované báze v prostoru dimenze 3, tj.* $L(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$*: pravidlo pravé ruky: když otáčíme* $\vec{u_1}$ *do směru* $\vec{u_2}$ *proti směru ručiček, tj. ve směru prstů pravé ruky, vidíme toto otáčení jako proti směru ručiček z vrcholku vektoru* $\vec{u_3}$ *(= palec ukazuje ve směru vektoru* $\vec{u_3}$*).*

Definice 52 *Orientovaný k-rozměrný objem:* $(V; +; \cdot)$ *je* k*-rozměrný euklidovský prostor a* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_k}$ *je jeho kladně orientovaná báze, která je navíc ortonormální.*

Pak orientovaný k*-rozměrný objem pro libovolnou posloupnost vektorů* $(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_k})$ *definujeme jako determinant:*

$$\vec{vol}_k(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_k}) = det \begin{pmatrix} skal(\vec{x_1}, \vec{u_1}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_1}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_1}) \\ skal(\vec{x_1}, \vec{u_2}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_2}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_2}) \\ ... & & & \\ skal(\vec{x_1}, \vec{u_k}) & skal(\vec{x_2}, \vec{u_k}) & ... & skal(\vec{x_k}, \vec{u_k}) \end{pmatrix}$$

...šipka $\vec{vol}_k$ *značí orientaci.*

Poznámka:

1) V předchozích příkladech jsme mluvili o (neorientovaném) objemu jako o odmocnině z determinantu – pokud ovšem na diagonále jsou velikosti vektorů z ortonormálního systému, jejich velikost je rovna jedné, a tedy velikost = odmocnině z velikosti, tj. pro $\vec{x_1} = \vec{u_1}, ..., \vec{x_k} = \vec{u_k}$ se jedná u ortonormálního systému o jedno a totéž, objem je roven danému determinantu!

2) Orientovaný objem je tedy definován jako jistý determinant v každém případě; jednotkou tohoto objemu je objem k-rozměrné krychle vytvořené vektory $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$ kladně orientované ortonormální báze – sloupce matice, z níž determinant počítáme, jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ v bázi $\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}$.

Příklad 67 *Pokud*

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \vec{u_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

tak: $\forall A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ *platí:*

$$det(A) = \vec{vol}(s_1(A), s_2(A), ..., s_k(A)),$$

tj. $det(A)$ *je roven* k*-rozměrnému objemu určenému sloupci této matice.*

Poznámka: Definice 50 nám ukazuje na jiný způsob k pojetí determinantu: pokud se „pohybujeme“ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$ (prostor n-tic reálných čísel je euklidovský), tak $det(A)$ **lze chápat jako orientovaný n-rozměrný objem rovnoběžnostěnu vytvořeného sloupci matice A.**

Věta 39 a) *Orientovaný objem vektorů $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ je invariant – nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze,*

b) *V orientovaném k-rozměrném euklidovském prostoru V je mezi neorientovaným objeme (def. 49) a orientovaným objemem (def. 50) souvislost, kterou bychom očekávali:*

$$vol_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) = |\vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k})|$$

Přitom $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ tvoří kladně orientovanou bázi V právě tehdy, když $\vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) > 0$.

c) *Důsledek b): $\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow \vec{vol}_k(\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}) \neq 0$*

Poznámka: Orientovaný k-rozměrný objem se někdy nazývá vnější součin. Pomocí vnějšího součinu se pak obecně definuje pojem vektorového součinu vektorů:

Definice 53 *Mějme kladně orientovanou ortonormální bázi $\alpha = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$, $n \geq 2$, orientovaného euklidovského prostoru V.*

Pevně zvolené vektory $\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}$ definují lineární formu $\psi : V \to \mathbb{R}$:

$$\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{y}) =: (\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y})$$

...vektoru $\vec{y}$ je přiřazen vnější součin $(\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y})$ (označujeme v kulaté závorce bez jakéhokoli znaménka operace) a podle teorie lineárních forem na vektorovém prostoru (podrobněji viz Zlatoš, str. 307):

$$\exists! \vec{v} \in V : \forall \vec{y} \in V : \psi(\vec{y}) = \vec{vol}_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{y}) = (\vec{x_1}\vec{x_2}...\vec{x_{n-1}}\vec{y}) = skal(\vec{v}, \vec{y}).$$

Tento jednoznačně určený vektor $\vec{v}$ se nazývá **vektorový součin vektorů** *$\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ (také ortokomplement = ortodoplněk vektorů $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$).*
Značíme $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}} =: \vec{v}$.

Poznámka:

Pro n=2 : Pro pevně zvolený vektor $\vec{x} \in V$, který doplňuje lineární formu $\psi : V \to \mathbb{R}$, při níž $\psi(\vec{y}) = \vec{vol}_2(\vec{x}, \vec{y}) = skal(\vec{v}, \vec{y})$, tj. přiřazujeme $\vec{y} \mapsto skal(\vec{v}, \vec{y})$, dostaneme:

$$det \begin{pmatrix} skal(\vec{x}, \vec{u_1}) & skal(\vec{y}, \vec{u_1}) \\ skal(\vec{x}, \vec{u_2}) & skal(\vec{y}, \vec{u_2}) \end{pmatrix} = skal(\vec{v}, \vec{y}).$$

Protože tento vztah platí $\forall \vec{y} \in V$, dosaďme za $\vec{y}$ postupně $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ a vypočteme determinant na levé straně rovnosti:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}=\vec{u_1}: det\begin{pmatrix} skal(\vec{x},\vec{u_1}) & 1\\ skal(\vec{x},\vec{u_2}) & 0\end{pmatrix} &= skal(\vec{v},\vec{u_1})\\
-x_2=-skal(\vec{x},\vec{u_2}) &= skal(\vec{v},\vec{u_1})\\
\vec{y}=\vec{u_2}: det\begin{pmatrix} skal(\vec{x},\vec{u_1}) & 0\\ skal(\vec{x},\vec{u_2}) & 1\end{pmatrix} &= skal(\vec{v},\vec{u_2})\\
x_1=skal(\vec{x},\vec{u_1}) &= skal(\vec{v},\vec{u_2})\\
\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}_\alpha \Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} -x_2\\ x_1\end{pmatrix}=\vec{x}^\perp,
\end{aligned}
$$

tj. vektorovým součinem přiřazeným jednomu vektoru $\vec{x}$ je vektor $\vec{x}^\perp$ naň kolmý:

$$\vec{x}^\perp := \vec{v} = -x_2\cdot\vec{u_1}+x_1\cdot\vec{u_2}=\begin{vmatrix} x_1 & \vec{u_1}\\ x_2 & \vec{u_2}\end{vmatrix} =: det(\vec{x},\alpha^T)$$

...formální Laplaceův rozvoj determinantu podle 2. sloupce, ve kterém jsou vektory z báze $\underline{\alpha}=(\vec{u_1},\vec{u_2})$.

Obecně pro $n>2$: Označme $x_{ij}:=skal(\vec{x_j},\vec{u_i})$ pro $1\le i\le n, 1\le j\le n-1$:

$$X:=(x_{ij})$$

...matice typu $n\times(n-1)$, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů (pevně zvolených) $\vec{x_1},\vec{x_2},...,\vec{x_{n-1}}$ v bázi $\alpha=(\vec{u_1},\vec{u_2},...,\vec{u_n})$.

Tyto pevně zvolené vektory $\vec{x_1},\vec{x_2},...,\vec{x_{n-1}}$ definují lineární formu $\psi: V\to\mathbb{R}$, při níž:

$$\psi(\vec{y})=\vec{vol}_n(\vec{x_1},...,\vec{x_{n-1}},\vec{y})=skal(\vec{v},\vec{y})$$

...vektor $\vec{v}$ lze označit jako $\vec{x_1}\times\vec{x_2}\times...\times\vec{x_{n-1}}$.

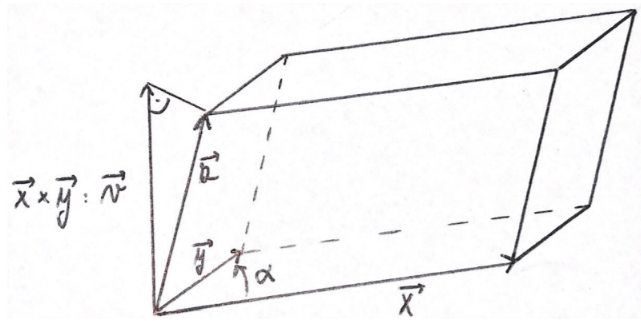
Protože tento vztah platí $\forall\vec{y}\in V$, dosaďme za $\vec{y}$ postupně vektory $\vec{u_1},...,\vec{u_n}$:

$$\vec{y}=\vec{u_i}: skal(\vec{v},\vec{u_i})=skal(\vec{x_1}\times...\times\vec{x_{n-1}},\vec{u_i})=det(X,\vec{e_i})=(-1)^{u+i}\cdot detX_i$$

...kde $\vec{e_i}$ je jednotkový vektor (na pozici i má 1, jinak nuly) a X_i je matice X, které chybí i-tý řádek. Jedná se o formální Laplaceův rozvoj determinantu podle posledního sloupce. Vektor $\vec{v}$ lze formálně zapsat jako

$$\vec{v}=\vec{x_1}\times\vec{x_2}\times...\times\vec{x_{n-1}}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\cdot detX_i=\begin{vmatrix} x_{11} & ... & x_{1,n-1} & \vec{u_1}\\ ... & & & \\ x_{n-1,1} & ... & x_{n-1,n-1} & \vec{u_{n-1}}\\ x_{n,1} & ... & x_{n,n-1} & \vec{u_n}\end{vmatrix}=: det(X,\alpha^T)$$

Pro $n = 3$ tedy: Pro pevně dané vektory $\vec{x}, \vec{y}$ existuje jediný vektor $\vec{v}$, označme $\vec{v} := \vec{x} \times \vec{y}$.



$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \vec{i} \\ x_2 & y_2 & \vec{j} \\ x_3 & y_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2; x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ je ortogonální na prostor $L(\vec{x}, \vec{y})$, tj. $\vec{x} \times \vec{y} \in [L(\vec{x}, \vec{y})]^{\perp}$.

Pro $\vec{x}, \vec{y}$ lineárně nezávislé tvoří vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$.

Při záměně pořadí vektorů $\vec{x}, \vec{y}$ se změní orientace báze $\alpha = (\vec{x}, \vec{y})$, tj. vektorový součin jako součást orientovaného objemu změní znaménko, tj. vektorový součin je antisymetrické zobrazení:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$

Věta 40 *Vlastnosti vektorového součinu $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ v orientovaném euklidovském prostoru $V, dim(V) = n$ (Zlatoš 310-311), nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel:*

a) *Vektorový součin $\vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ je multilineární ((n-1)-lineární) antisymetrické zobrazení:*

$$V^{n-1} \to V$$

b) *Vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow \vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}} = \vec{o}$,*

c) *Pokud $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ jsou lineárně nezávislé, tak $\vec{v} = \vec{x_1} \times \vec{x_2} \times ... \times \vec{x_{n-1}}$ je normálový vektor nadroviny $L(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}})$, a vektory $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}, \vec{v}$ tvoří kladně orientovanou bázi,*

d) *V dvojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí:*

$$||\vec{x}^{\perp}|| = ||\vec{x}||$$

...vektorový součin je unární operace: $\vec{x} \to \vec{x}^{\perp}$,

e) *V trojrozměrném orientovaném euklidovském prostoru platí pro nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y}$:*

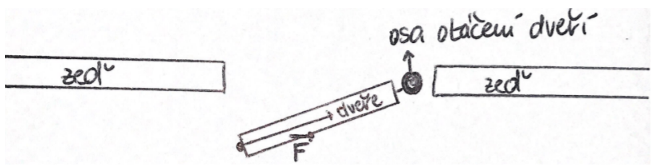
$$||\vec{x} \times \vec{y}|| = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \sin \alpha(\vec{x}, \vec{y})$$

f) *Pro $n \geq 2$ v n-rozměrném orientovaném euklidovském prostoru V platí $\forall \vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}} \in V$:*

$$||\vec{x_1} \times ... \times \vec{x_{n-1}}|| = vol_{n-1}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_{n-1}}) = \sqrt{detG(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}})}$$

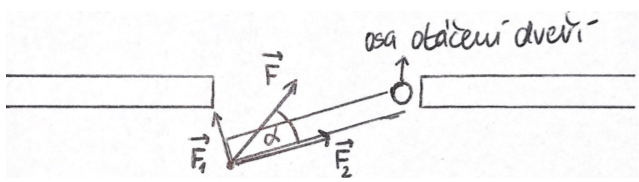
(tedy neorientovaný objem vektorů $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_{n-1}}$ spočte velikost jejich vektorového součinu).

Fyzikální vlastnosti vektorového součinu: Otáčivý moment $\vec{M}$ tělesa kolem pevné osy při působení síly $\vec{F}$:



Tímto způsobem dveře nepootočíme ani o centimetr. Pomocník snažící se dveře otevřít nebo zavřít svou sílu vynakládá zbytečně, otáčivý moment této síly vzhledem k ose otáčení je nulový vektor.

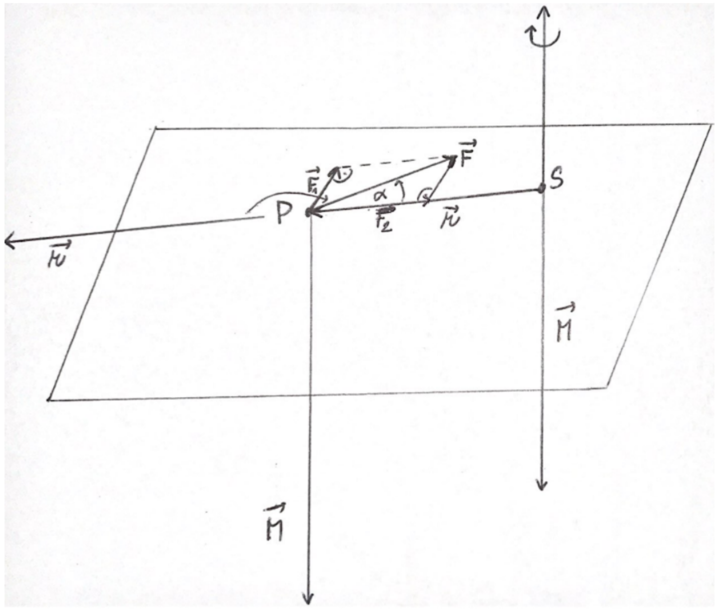
Když síla $\vec{F}$ bude působit šikmo a nikoli rovnoběžně se stěnou dveří, lze ji rozdělit na součet dvou dílčích sil $\vec{F_1}, \vec{F_2}$:



Síla $\vec{F_2}$ představuje působení neefektivního pomocníka, síla $\vec{F_1}$ naopak působí ve směru kolmém na osu otáčení, tj. $\vec{F_1}$ je ta „část“ síly $\vec{F}$, která ovlivňuje otáčivý moment tělesa.

Pokračujme dále k definici <u>momentu síly vzhledem k ose otáčení</u>:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ ||\vec{M}|| &= ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$



- Otáčivý moment $\vec{M}$ působí ve směru osy otáčení – v tom směru, který určíme podle pravidla pravé ruky: když prvky směřují ve směru otáčení osy, palec ukazuje ve směru vektoru $\vec{M}$,

- Velikost momentu závisí na vzdálenosti $||\vec{r}||$ působiště P od osy otáčení, a dále na průmětu $\vec{F_1}$ síly $\vec{F}$ do směru kolmého na působiště $\vec{r}$ (tj. na velikosti průmětu $||\vec{F}|| \cdot \sin \alpha$):
$$||\vec{M}|| = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F}|| \cdot \sin \alpha = ||\vec{r}|| \cdot ||\vec{F_1}||$$
Tedy orientace $\vec{M}$ je taková, aby vektory $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ v daném pořadí tvořily kladně orientovanou bázi prostoru (otáčení prvního vektoru směrem ke druhému vektoru vidíme lépe, když posuneme $\vec{r}$ do bodu P, aby vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$ měly stejný počáteční bod).

Na moment $\vec{M}$ má tedy vliv jen složka $\vec{F_1}$ kolmá na průvodič bodu působení síly – tj. při vektorovém součinu využíváme „informace“, které vzniknou kolmým průmětem jednoho vektoru do směru kolmého na druhý vektor.

Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je multilineární (bilineární):
$$(\alpha \cdot \vec{r_1} + \beta \cdot \vec{r_2}) \times \vec{F} = \alpha \cdot \vec{r_1} \times \vec{F} + \beta \cdot \vec{r_2} \times \vec{F}.$$
Zobrazení $\vec{r} \times \vec{F}$ je antisymetrické:
$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}.$$

12 Týden 12

12.1 Cvičení 12: prověrka-b

Prověrka-b na témata určená cvičícím.

12.2 Přednáška 12: Prověrka ze cvičení, bude-li potřeba poskytnout přednášku

13 Otázky k ústní části

Otázky jsou aktualizovány ke Štědrému večeru 2021!

13.1 Cramerovo pravidlo pro řešení SLR

- (10 bodů) totální vzorec pro řešení SLR – odvození pro systém dvou rovnic o dvou neznámých;
- (10 bodů) Cramerovo pravidlo – vzorce, slabina metody (kdy lze použít, kdy nelze);
- (5 bodů) Příklad: pomocí Cramerova pravidla vypočtěte řešení SLR:

$$\begin{aligned} x \quad - z &= 0, \\ 3x + y \quad &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

- (5 bodů) Meziotázka: ještě existuje jedna metoda, která funguje přesně tehdy, když funguje Cramer – co je to za metodu a v čem spočívá?

13.2 Definice determinantu

- (10 bodů, ale bez této definice nelze na zkoušce existovat) Definice: determinant čtvercové matice
- (10 bodů) Příklad: určení znaménka u součinu pomocí geometrického názoru počtu hran příbuzných vedlejší diagonále. Můžete vysvětlit na příkladu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \dots .$$

- (5 bodů) zdůvodněte, proč se transponováním determinant nemění;
- (5 bodů) Vysvětlete: Determinant je antisymetrická multilineární forma.

13.3 Pravidla pro úpravu determinantu

- (10 bodů,) D3: determinant jako zobrazení je lineární v ... (vysvětlete a dokažte; v důkazech této otázky budete také potřebovat definici determinantu);
- (10 bodů) D4: determinant se nezmění, pokud k jednomu řádku matice ... (vysvětlete a dokažte);
- (10 bodů) Definice: schodový tvar matice (řádkový schodový tvar ... row echelon [ešelon] form). Jak souvisí výpočet determinantu se schodovým tvarem matice a pravidly D3, D4 ?

13.4 Vlastnosti D3 a D5 determinantu

- (5 bodů) D5: Vzorec pro rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce
- (10 bodů) Vysvětlete na příkladu rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \dots .$$

- (5 bodů) D3: co to znamená, že determinant je zobrazení, které je ... **(dokončete vlastnost D3 a vysvětlete)**;
- (10 bodů) Při výpočtu determinantu[19]

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} =$$

  Laplaceovým rozvojem podle druhého sloupce (D5) dostaneme

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

  Ukažte, jak při sloučení prvních dvou z těchto tří determinantů pátého řádu užijeme linearitu.

13.5 Vektorový prostor

- (10 bodů, ale bez této definice neexistuje) Definice vektorového prostoru V nad tělesem T.
- Příklady (jak se na těchto VP definuje sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem?): a) aritmetický vektorový prostor (5 bodů), b) prostor polynomů stupně nejvýše 3 (5 bodů), c) prostor funkcí spojitých na intervalu (5 bodů), d) nejmenší možný vektorový prostor (0 bodů, ale měli byste vědět).
- (5 bodů) meziotázka: srovnejte vektorové prostory b), c) z hlediska báze a dimenze.

[19] Příklad byl počítán na přednášce označené 09-10.

13.6 Závislost a nezávislost skupiny vektorů – báze, dimenze, souřadnice

- (5 bodů) Def.: lineární kombinace vektorů; def.: lineárně závislá posloupnost vektorů;
- (15 bodů, bez těchto tří definic nelze u zkoušky existovat) Def.: báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice.
- (10 bodů) Příklady dimenze a báze (u příkladů b),c) z předchozí otázky).

13.7 Vektorový podprostor

- (5 bodů) Def.: vektorový podprostor: co stačí ověřit, abychom věděli, že podmnožina vektorového prostoru je sama už vektorovým prostorem?
- (5 bodů) Příklady vektorového podprostoru (co je, co není vektorový podprostor);
- (10 bodů) Je průnik dvou podprostorů vektorový podprostor? Je sjednocení dvou podprostorů vektorový podprostor? Protipříklad + lze tedy definovat nějak podprostor určený sjednocením? Jak?
- (10 bodů) Některé známé množiny bodů nelze pomocí pojmu vektorového prostoru popsat – zavádíme proto pojem afinního prostoru, uveďte jeho definici a příklad afinního prostoru, který není vektorovým prostorem.

13.8 Hodnost matice, Frobeniova věta, tři typy výsledků řešení SLR

- (5 bodů) Co je to hodnost matice (def.)?
- (5 bodů) Jak souvisí pojem hodnosti matice s pojmem dimenze jistého nejmenovaného (který máte jmenovat) vektorového prostoru?
- (5 bodů) Jaké tři situace mohou nastat u SLR vzhledem k počtu řešení a kdy nastávají?
- (5 bodů) V případě nekonečně mnoha řešení: Jak počet parametrů souvisí s hodností matice systému (věta 12)?
- (5 bodů) příklad řešení SLR Gaussovou eliminací: vyřešte následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3, \\ 2x + 5y - z - 9w &= -2. \end{aligned}$$

- (5 bodů) Co lze říci o množině řešení SLR? Je to ... s bází ... a dimenzí ...

13.9 Homogenní SLR, princip superpozice, dva typy výsledků řešení SLR-hom

- (5 bodů) Co je to SLR-hom? Jaké jsou typy SLR-hom podle počtu jejich řešení?
- (10 bodů) Množina řešení SLR-hom tvoří ... s bází ... a dimenzí ... **(včetně důkazu – zkuste systém psát jen maticově, bude to přehlednější)**.
- (10 bodů) Obecné a partikulární řešení SLR, princip superpozice.
- (5 bodů) Princip superpozice ilustrujte na příkladu:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1. \end{aligned}$$

13.10 Sčítání a násobení matic – analýza pomocí pojmů z alg1

- (5 bodů) Jak se definuje sčítání matic a jaké matice lze sčítat?
- (10 bodů) Uveďte a zdůvodněte vlastnosti operace sčítání matic (věta 14).
- (5 bodů) Jak se definuje operace násobení matic a jaké matice lze násobit?
- (10 bodů) Uveďte a dokažte vlastnosti operace násobení matic (přednostně tedy násobení na množině čtvercových matic, věta 15).

13.11 Elementární řádkové úpravy

- (5 bodů) Co je to elementární řádková úprava (def.)?
- (5 bodů) Co je pro EŘÚ charakteristické vzhledem k SLR? Elementární úpravy SLR ...
- (20 bodů) Věta: každou EŘÚ lze reprezentovat vynásobením jistou maticí zleva – ukažte na příkladu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.12 Maticová metoda při řešení SLR

- (5 bodů) Co je to maticová metoda řešení systému lineárních rovnic?
- (10 bodů) Výpočet inverzní matice Jordanovou metodou – vysvětlete na příkladu

$$\begin{aligned} x \quad\;\; - z &= 0, \\ 3x + y \quad\;\; &= 1, \\ -x + y + z &= 4. \end{aligned}$$

- (5 bodů) Kdy lze užít metodu inverzní matice při řešení SLR? (singulární matice, regulární matice)
- (10 bodů) Zdůvodněte matematickou větu, proč EŘÚ použité na jednotkovou matici najdou matici inverzní (proveďte důkaz).

13.13 Lineární zobrazení

- (5 bodů, bez této definice u zkoušky nelze existovat) Uveďte definici lineárního zobrazení mezi vektorovými prostory.
- (10 bodů, bez tohoto příkladu nelze u zkoušky existovat) Zadání lineárního zobrazení pomocí předpisu – pomocí matice – pomocí obrazů báze. Uveďte příklad lineárního zobrazení $R^3 \to R^2$.
- (5 bodů) Příklad zobrazení mezi vektorovými prostory, které není lineární.
- (5 bodů) Věta: základní vlastnosti lineárního zobrazení.
- (5 bodů) meziotázka: které základní zobrazení na ZŠ není lineární zobrazení, ale afinní zobrazení?

13.14 Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

- (10 bodů) Def.: jádro a obor hodnot lineárního zobrazení, nejlépe včetně obrázku, ale i definice symbolickým zápisem.
- (10 bodů) Na příkladu vysvětlete, jak jadro a obor hodnot konkrétního lineárního zobrazení najdeme:

$$\varphi : \ R^4 \ \to \ R^3, \quad \varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4 \\ 2v_1 + 3v_2 + v_3 + v_4 \\ 5v_1 + 2v_2 + 3v_3 \end{pmatrix}.$$

- (5 bodů) Věta: vlastnosti jádra a oboru hodnot, vztah jejich dimenze a dimenze celého prostoru vzorů.
- (5 bodů) Věta: lineární zobrazení je injektivní právě tehdy, když ... (slavná věta 20 dokazovaná ve druhém nebo třetím týdnu předmětu Základy matematiky!!!) ... (Zkuste reprodukovat i důkaz)

13.15 Matice přechodu mezi bázemi téhož VP

- (15 bodů) Je zadán vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\alpha} \quad \text{v bázi} \quad \underline{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right);$$

vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k bázi

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

pomocí jisté matice přechodu P.

- (10 bodů) Jaké je nyní vyjádření vektoru $\vec{v}$ v bázi β v našem příkladu?
- (5 bodů) Pro β zadanou vektory

$$\underline{\beta} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

by byla matice přechodu $P =$...

13.16 Vlastní čísla (hodnoty) a vlastní vektory (směry) lineární transformace

- (10 bodů ... algebraická definice ... bez ní na zkoušce nelze existovat) Def.: vlastní čísla a vlastní směry lineární transformace vektorového prostoru.
- (10 bodů ... geometrický pohled) Najděte navzájem lineárně nezávislé vlastní směry osové souměrnosti vzhledem k ose $y = \frac{x}{2}$.
- (10 bodů ... algebraický příklad) Nalezněte aspoň jeden vlastní směr-vektor a jemu odpovídající vlastní hodnotu pro lineární transformaci $R^3 \to R^3$ zadanou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

13.17 Příklad lineárního zobrazení na ZŠ vysokoškolsky

Vyberte si jeden z následujících příkladů a vyřešte:

Příklad A) otáčení roviny se středem v počátku nebo s obecným středem:

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) otočení roviny se středem v počátku o úhel 30 stupňů neboli $\frac{\pi}{6}$.
- (15 bodů) Nalezněte maticově-vektorové vyjádření (afinní zobrazení) otočení roviny se středem v bodě $[3; 2]$ o úhel 30 stupňů neboli $\frac{\pi}{6}$.

Příklad B) osová souměrnost s osou procházející počátkem nebo s obecnou osou:

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$.
- (15 bodů) Nalezněte maticově-vektorové vyjádření (afinní zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2} + 3$.

13.18 Skalární součin vektorů

- (10 bodů, bez této definice nelze u zkoušky existovat) Vysvětlete: Skalární součin vektorů je symetrická bilineární pozitivně definitní forma na daném vektorovém prostoru. Co je to Euklidovský vektorový prostor?
- (5 bodů) Uveďte příklad skalárního součinu na prostoru a) n-tic reálných čísel; b) spojitých funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$.
- (10 bodů) Jaký je geometrický význam skalárního součinu?
- (5 bodů) uveďte nějaký fyzikální význam skalárního součinu. Pokud nevíte, zkuste vyřešit následující úlohu: Tatínek táhne sáně se třemi dětmi o celkové hmotnosti 45 kg pod úhlem 20° vzhledem k zemi po dokonale hladkém ledu silou 210 N. Jakou práci vykoná při posunutí saní o 3 metry? (nemusíte dosazovat do kalkulačky, jen vyjádřete výpočtem bez dosazení)

13.19 Velikost vektoru, odchylka vektoru

- (10 bodů) Definice velikosti a její základní vlastnosti (věta).
- (5 bodů) Co říká Schwarzova nerovnost? Kdy v ní nastává rovnost a proč?
- (5 bodů) Definice odchylky dvou nenulových vektorů: z čeho možnost existence tohoto pojmu vyplývá, a jak souvisí se skalárním součinem?
- (5 bodů) V jakém intervalu se může odchylka dvou vektorů pohybovat?
- (5 bodů) Jak se liší odchylka vektorů od odchylky přímek v aritmetickém vektorovém prostoru?

13.20 Ortogonální vektory, ortogonální doplněk

- (5 bodů) Ortogonální vektory, ortogonální matice, ortogonální zobrazení – definice.
- (5 bodů) Ortogonální množiny, ortogonální podprostory – definice.
- (5 bodů) Ortogonální doplněk podprostoru – definice.
- (15 bodů) V Euklidovském prostoru R^5 je dán podprostor

$$W = L\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\}.$$

Nalezněte bázi a dimenzi jeho ortogonálního doplňku $W^{\perp}$.

13.21 Využití matice zobrazení v různých bázích

- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$ na základě řešení jistého systému rovnic, bez matic přechodu.
- (15 bodů) Nalezněte maticové vyjádření[20] (lineární zobrazení) osové souměrnosti v rovině s osou $y = \frac{x}{2}$ na základě vlastních čísel a vektorů, dvou matic přechodu a věty 33.

13.22 Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces

- (5 bodů) Vysvětlete, o co se jedná.
- (15 bodů)V Euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru

$$W = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}\right).$$

- (5 bodů) Co to znamená, když některý z vytvářených vektorů bude nulovým vektorem?
- (5 bodů) Co je to ortonormální báze vektorů a jak by se tato báze získala z báze ortogonální?

13.23 Ortogonální projekce vektoru do VPP

- (10 bodů) Vysvětlete, o co se jedná, včetně obrázku.
- (15 bodů) Nalezněte ortogonální projekci vektoru $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ do podprostoru

$$U = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}.$$

- (5 bodů) Nalezněte také souřadnice vektoru $\vec{y}$ z ortogonálního doplňku $U^{\perp}$ z definice ortogonální projekce (v našem příkladu).

[20] Viz přednáška 12, od 1:15:00.

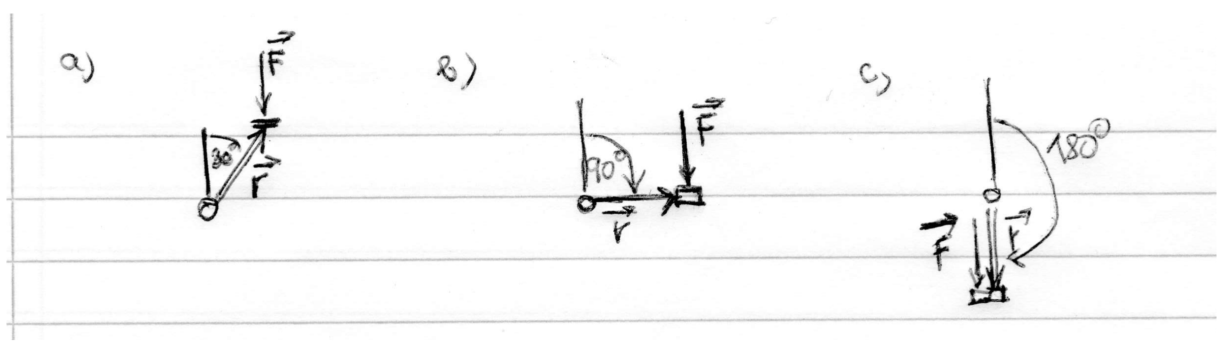
13.24 Vektorový součin vektorů

- (10 bodů) Pouze středoškolská definice a výpočet vektorového součinu v dimenzi 3 (nakreslete obrázek a vysvětlete orientaci výsledného vektoru)[21]: Vypočtěte vektorový součin vektorů (v daném pořadí) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- (10 bodů) geometrický význam vektorového součinu;

- (10 bodů) fyzikální význam vektorového součinu: skripta, str. 137-138: moment síly působící na těleso vzhledem k ose otáčení.

  Pokud nevíte definiční obrázek či příklad, zkuste vyřešit následující příklad: Délka ramene pedálu jízdního kola je 0,152 m. Chodidlo cyklisty tlačí svisle na pedál silou o velikosti 111 N. Určete velikost momentu síly vzhledem k ose otáčení svírá-li rameno pedálu se svislým směrem (viz obrázek) úhel a) 30°, b) 90°, c) 180°. Ve kterém z případů bude moment síly $\vec{r} \times \vec{F}$ mít velikost největší-nejmenší? ($\vec{r}$ je vektor průvodiče od osy otáčení k místu připojení pedálu).



[21] Můžete si pamatovat, že v dimenzi 2 je vektorový součin unární operací, tj. vstupuje jeden vektor, výstupem je jeden vektor, v dimenzi 3 binární operací (vstupují dva vektory v daném pořadí, výstupem je jediný vektor), v dimenzi 4 ternární operací (vstupují tři vektory, výstupem je jeden vektor), a tak dále. Podrobnější vysvětlení bude pravděpodobně realizováno v přednášce z geometrie v pátém semestru.

Přehled literatury

Pro zopakování analytické geometrie je důležitý výklad v [Boček, Kočandrle 1995] a příklady v [Petáková 1998] od strany 100, ale ne všechny z oddílů 13 a 14, nýbrž skoro všechny. Pro další týdny cvičení budou probírány některé kapitoly z knihy [Horák,P. 2002].

Přednáška je vytvářena na základě skript [Horák, 2017], [Horák, Janyška 1997] a s přihlédnutím ke knize [Poole,D. 2015]. Z knih [Shilov 1997], [Zlatoš 2011] byly vzaty některé drobnosti.

Boček, Kočandrle 1995 Matematika pro gymnázia – analytická geometrie. Základní materiál pro uvedení do počítací geometrie. Nakl. Prometheus, počet stran 187.

Horák,P. 2002 Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I. Skriptum z Přírodovědecké fakulty MU, počet stran 221.

Horák,P. 2017 Lineární algebra a geometrie 1. Učební text dostupný na internetu, autor je z Přírodovědecké fakulty MU. Počet stran cca 110.

Horák, Janyška 1997 Analytická geometrie. Brno 1997, učební text učitelského směru matematiky pro SŠ na Přírodovědecké fakultě MU, počet stran 151.

Petáková,J. 1998 Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Nakl. Prometheus, sbírka příkladů s klíčem. V tomto předmětu nás budou zajímat některé úlohy z analytické geometrie, od strany 100.

Poole,D. 2015 Linear algebra – a modern introduction. Stamford, USA, 4th Edition. V angličtině, nejschůdnější učebnice pro studenty. 620 stran + dodatky + odpovědi na cvičení s lichým číslem.

Shilov,G. 1997 Linear Algebra. Dover Publications, počet stran cca 400, anglický překlad ruského textu, ale v knihovně na Kounicově 65a (Moravská zemská knihovna Brno) najdete i překlad do češtiny u stejného autora (Šilov), i když kniha se možná jmenuje jinak. Starší přednáška lineární algebry.

Zlatoš,P. 2011 Lineárna algebra a geometria. Bratislava 2011, text dostupný na internetu, počet stran 808. Text je možná příliš obsáhlý, ale najdete v nějaké formě všecko, co se týká algebraického pohledu na geometrii.