$$xy'' - 2y' = 0 \qquad F(x, \cancel{y}, y', y'') = 0$$

2. ř. (neobsahuje y)

$u = y'$: $\quad xu' - 2u = 0$

$$u' = \frac{2}{x} u \qquad \text{lineární 1. ř. (hom.)}$$

$$u'(x) = a(x)u(x)$$

$$u(x) = C e^{\int a(x)\,dx} = C e^{\int \frac{2}{x}dx} = C e^{2\int \frac{dx}{x}} =$$

$$= C e^{2\ln|x|} = Cx^2 \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$u = y'$:

$$y' = Cx^2$$

$$y = \int Cx^2\,dx = \frac{C}{3}x^3 + D \qquad C, D \in \mathbb{R}$$

$$y = C_1 x^3 + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$y'' - 5y' = 0 \qquad y' = u;\quad u' - 5u = 0, \quad u' = 5u$$

$$u = Ce^{5x}$$

lin., 2. ř., konst. koef. $\qquad y' = Ce^{5x}, \quad y = C\int e^{5x}dx + D$

$$= C_1 e^{5x} + C_2$$

Zkusme hledat exponenc. řešení:

$$y = e^{\lambda x}, \ \lambda = ? \qquad y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} - 5\lambda \cancel{e^{\lambda x}} = 0 \qquad \lambda^2 - 5\lambda = 0, \qquad \lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = 5$$

2 řeš.: $\quad e^{0x} = 1, \quad e^{5x}$.

$$y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{5x} \quad \text{– obecné řeš.}$$

$y' + a(x)y = 0 \to y =$ o. ř. explic.

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ – 2. ř. hom.

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}, \qquad y_1, y_2 \text{ lineárně nezávislé:}$$

obecné řešení homog. rovnice $\qquad (\nexists\, C:\ y_1 = C \cdot y_2)$

$$\boxed{y'' - 7y' + 12y} = 0 \qquad 2.\ \check{r}.;\ \text{konst. koef.}$$

$$y = e^{\lambda x}, \quad y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \qquad \lambda = ?$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 7\lambda e^{\lambda x} + 12 e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0 \qquad \boxed{\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0} \Rightarrow \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3$ — charakterist. rovnice

$$y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{3x} \quad \text{– obecné řeš.}$$

$$\nexists C:\ e^{4x} = C \cdot e^{3x} \qquad \left(\nexists A_1, A_2:\ |A_1| + |A_2| \neq 0,\ A_1 e^{4x} + A_2 e^{3x} = 0\right)$$

$$5y'' + 6y' + 5y = 0$$

$$5\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \quad \text{– char. rovnice} \quad (y = e^{\lambda x}, \lambda = ?)$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{10} = \frac{-6 \pm 8i}{10} = \frac{-3 \pm 4i}{5} =$$

$$= -\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$$

$$\lambda_1 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$e^{\lambda x} = e^{\left(-\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i\right)x} = e^{-\frac{3}{5}x \pm \frac{4}{5}ix} = e^{-\frac{3}{5}x} e^{\pm \frac{4}{5}ix} =$$

$$= e^{-\frac{3}{5}x} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{4}{5}x\right) \pm i \cdot \sin\left(\tfrac{4}{5}x\right)\right) =$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{3}{5}x} \cdot \cos\left(\tfrac{4}{5}x\right)}_{Re} \pm i \cdot \underbrace{e^{-\frac{3}{5}x} \sin\left(\tfrac{4}{5}x\right)}_{Im}$$

$$y_1 = e^{-\frac{3}{5}x} \cos\left(\tfrac{4}{5}x\right), \quad y_2 = e^{-\frac{3}{5}x} \sin\left(\tfrac{4}{5}x\right) \quad \text{– řešení}$$

Obecné řeš.: $\boxed{y = C_1 e^{-\frac{3}{5}x} \cos\left(\tfrac{4}{5}x\right) + C_2 e^{-\frac{3}{5}x} \sin\left(\tfrac{4}{5}x\right)}$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

2 ř.
konst.

Char. rovn.: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda = ?$ $e^{\lambda x}$ bylo řeš.

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$. 3 má násobnost (2)

e^{3x} je řeš. rovnice.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 y_2$$

y_2 lin. nezáv. s e^{3x}

$y_2 = ?$ bude ve tvaru $x \cdot e^{\lambda x}$

$x \cdot e^{3x}$

Kontrola dosazením:

$$y = x e^{3x}; \quad y' = e^{3x} + x \cdot 3e^{3x}, \quad y'' = 3e^{3x} + 3e^{3x} + x \cdot 9e^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0: \quad \cancel{6e^{3x}} + \cancel{9xe^{3x}} - \cancel{6(e^{3x}} + \cancel{3xe^{3x}}) + \cancel{9xe^{3x}} \stackrel{?}{=} 0$$

O.K.

Obecné ř.: $\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}}$

Poznámka: pro rovnice ř. > 2, pokud kořen λ charakt. rovnice má násobnost > 2, použijeme řešení

$$e^{\lambda x}, \; x e^{\lambda x}, \; x^2 e^{\lambda x} \text{ atd.}$$

$y'' + y = \sin 2x$

$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$ — 2. ř. lin. nehom.

y_1, y_2 — lin. nez. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

(ob. řeš. hom. r. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$)

↳ metoda variace konst. : hledáme part. řeš. nehom. rovnice ve tvaru

$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \qquad C_1(x), C_2(x) = ?$

Dosadit:

$y' = \underbrace{\boxed{C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2}}_{= 0 \text{ — požadujme toto}} + C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$

$y'' = C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2''$

$C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2'' + a_1 \left(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' \right) + a_0 \left(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \right) = b(x)$

y''

0

(rovnice je lineární)

y_1, y_2 řešení hom. r. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

$\boxed{C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = b(x)}$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = b(x) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} C_1'(x) = \dots, \; C_1 = \int \dots \\ C_2'(x) = \dots \end{matrix}$$

$y_1 =$

$b(x) = \sin 2x$

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$ — ch. rovn.

$\lambda = \pm i$

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \cdot \sin x$

ob. řeš. $y = C_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + C_2 \underbrace{\sin x}_{y_2}$

$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$

$C_1'(x) \cdot (-\sin x) + C_2'(x) \cdot \cos x = \sin 2x$

$\rightarrow C_1, C_2 = ? \dots$

Nalezení partikulárního řešení pro spec. typy $b(x)$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$$

platí obecně

$$y = \underbrace{y_{o.\check{r}.}}_{homog.} + \underbrace{y_{part.}}_{nehom.}$$

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ — exponenc. — char. rovn.

$y_{part.}$ — variační konst.

$\gamma = \alpha + i\beta$

$b(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right)$, $p(x)$ — polyn., $q(x)$ — polyn.

$y_{part} = x^s e^{\alpha x}\left(\tilde{p}(x)\cos\beta x + \tilde{q}(x)\sin\beta x\right)$

s = násobnost čísla $\gamma = \alpha + i\beta$ jako kořene char. rovnice (pokud γ není kořenem, pak $s = 0$)

$\tilde{p}$, $\tilde{q}$: polynomy stejn. st. jako p a q

$$y'' + y = \sin 2x$$

$\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$

Zde:

$$b(x) = \sin 2x = \underbrace{e^{0x}}_{=1}\cdot\left(\underbrace{0}_{p(x)}\cdot\cos 2x + \underbrace{1}_{q(x)}\cdot\sin 2x\right)$$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$

$\gamma = \alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$ → není kořenem ch. rovnice ⇒ $s = 0$

$\hookrightarrow$ $y_{part.} = \underbrace{e^{0x}}_{=1}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ $\quad A, B = ?$

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $\quad y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

$\hookrightarrow$ dosadíme do rovnice $y'' + y = \sin 2x$ — původní rovnice:

$$\underbrace{-4A\cos 2x - 4B\sin 2x}_{y''} + \underbrace{A\cos 2x + B\sin 2x}_{y} = 1\cdot\sin 2x$$

$\sin 2x$: $\quad -4B + B = 1$, $\quad -3B = 1$, $\quad B = -\frac{1}{3}$

$\cos 2x$: $\quad -4A + A = 0 \Rightarrow A = 0$

$$y = -\frac{1}{3}\sin 2x$$

part. ř. nehom. rovn. je nalezeno, stačí sečíst s obec. řeš. hom. r.

Obecné řeš. nehom. r. $y'' + y = \sin 2x$ je ve tvaru:

$$y = \underbrace{-\frac{1}{3}\sin 2x}_{\text{part. ř. nehom. r.}} + \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{\text{obecné řeš. hom. r.}}$$

Pozn.: nebyla potřeba integrace, jednodušší výpočet oproti metodě variace konstant člen $b(x)=8x^3$ má spec. tvar (viz. předch. str., lze se obejít bez variace konstant)

$$\underbrace{y''-4y}_{\text{konst.}} = 8x^3$$

$y=e^{\lambda x}, \lambda = ?$

Hom.: $y''-4y=0$

Char. rovn. $\lambda^2-4=0, \quad \lambda^2=4, \quad \lambda=\pm 2$

$e^{-2x} \quad e^{2x}$

Obec. ř. hom. r. $\quad y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$

Obecn. ř. nehom. $\quad y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+y_{part.}$; $y_{part.} = -2x^3-3x$

$$b(x)=8x^3=e^{0x}\cdot(8x^3\cdot\underbrace{\cos 0x}_{=1}+0\cdot\sin 0x)$$

$p(x)=8x^3$ – polynom st. 3

$\gamma=\alpha\pm i\beta=0\pm 0=0$ – není koř. ch. r. $\Rightarrow s=0$

$\hookrightarrow y_{part.}=(\text{polynom st. }3)=\underbrace{Ax^3+Bx^2+Cx+D}_{-2x^3-3x}$; $A=-2,\ B=0,\ C=-3,\ D=0$

$y'=3Ax^2+2Bx+C, \quad y''=6Ax+2B$

Dosadíme do $y''-4y=8x^3$:

$$\underbrace{6Ax+2B}_{y''}-4\cdot(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=8x^3$$

$A,B,C,D=?$

$x^3: \quad -4A=8, \quad A=-2$

$x^2: \quad -4B=0, \quad B=0$

$x^1: \quad 6A-4C=0 \quad 6A=4C, \quad 3A=2C \quad -6=2C, \quad C=-3$

$x^0: \quad 2B-4D=0 \rightarrow D=0$

$$y=\boxed{C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}}-2x^3-3x$$

obecné ř. hom. rovnice $y''-4y=0$

part. ř. nehom. rovnice $y''-4y=8x^3$