$$xy'' - 6y' = 0$$

$F(x, \cancel{y}, y', y'') = 0$ 2. ř.

$u = y'$; $\quad xu' - 6u = 0$

$xu' = 6u$, $\quad u' = \frac{6}{x} u$ lin. r. 1. ř.

$\hookrightarrow u = Ce^{\int \frac{6}{x} dx} =$

$= Ce^{6 \ln|x|} = Cx^6$

$y' = Cx^6$, $\quad y = C \int x^6 dx = C\frac{x^7}{7} + D$

$= C_1 x^7 + C_2$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$y'' - 4 \cdot y' = 0 \longrightarrow$$

y' exponenc.

$u = y'$ $\quad u' = 4u$

$u = Ce^{4x}$

$y = e^{\lambda x}$, $\lambda = ?$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} - 4 \cdot \lambda e^{\lambda x} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda = 0$, $\quad \lambda \cdot (\lambda - 4) = 0$

$\lambda = 0 \qquad \lambda = 4$

$e^{0x} = 1 \qquad e^{4x}$

$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{4x}$

$y = C_1 + C_2 e^{4x}$ — obecné řeš.

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$$

$\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0}$, $\lambda = \ldots$

charakteristická rovnice

$$y = e^{\lambda x}$$

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} y' = \lambda e^{\lambda x} \\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{array} \right)$$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ – ch. rovn.

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{x} \qquad e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\nexists A: \; e^{-2x} = A \cdot e^{x}$ $\forall x$

$\downarrow$

lin. nez.

$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$

y_1, y_2 – lineárně nezávislá řešení

$\Rightarrow$ obecné řeš. má tvar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$\{y_1, y_2\}$, l. nez. – fundamentální soustava řešení hom. r.

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

$$y = e^{\lambda x}$$

Chas. r.: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$$\lambda_1 = 1+3i, \quad \lambda_2 = 1-3i.$$

$$y = e^{(1 \pm 3i)x} = e^{x \pm 3ix} = e^{x} \cdot e^{\pm 3x \cdot i} =$$

$$= e^{x} \cdot (\cos 3x \pm i \sin 3x) =$$

$$= \underbrace{e^{x} \cos 3x} \pm i \cdot \underbrace{e^{x} \sin 3x}$$

$$y_1 = e^{x} \cos 3x, \quad y_2 = e^{x} \sin 3x$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} \cos 3x + C_2 e^{x} \sin 3x}$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Char. rovnice: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (2-násobný kořen 3)

$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = ?$

$y_2 = x \cdot e^{3x}$

T $y = xe^{3x}$, $y' = e^{3x} + x\cdot 3e^{3x}$,

$y'' = 3e^{3x} + 3e^{3x} + x\cdot 9e^{3x}$

$y'' - 6y' + 9y = 0$:

$$\cancel{6e^{3x}} + \cancel{9xe^{3x}} - \cancel{6e^{3x}} - \cancel{6x\cdot 3e^{3x}} + \cancel{9xe^{3x}} = 0$$

$\oplus$

Pozn. vyšší řád/násobnost:

$y_2 = xe^{3x}$, $y_3 = x^2 e^{3x}$, ...

Obecné řešení: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

$$5y'' + 6y' + 5y = 0$$

Char. rovnice: $5\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{10} = \frac{-6 \pm 8i}{10} =$$

$$= -\frac{3 \pm 4i}{5} = -\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5} i.$$

$$e^{\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i\right)x} = e^{-\frac{3}{5}x} \cdot \underline{e^{\frac{4}{5}xi}}$$

Obecné řešení je:

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{5}x} \cdot \cos\left(\frac{4}{5}x\right) + C_2 e^{-\frac{3}{5}x} \cdot \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$$

$C_1, C_2 \in R$

Nehomogenní rovnice 2. ř.

(*) $$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = b(x)$$

y_1, y_2 – lin. nez. řešení hom. rovn.

↳ obecné řešení nehom. rovn. je

$$y = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\text{obecné řešení homog. rovn.}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{partikulární řešení nehom. r.}}$$

Pozn. $y' + a_1(x)\, y = b(x)$ lze vždy vyřešit.

(*) však nikoliv!

$y'' + y = \sin x$ lin. nehom. rovn. II. ř.

Hom. rovn.: $y'' + y = 0$

Nechť $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ je obecné řeš. hom. rovnice.

$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = b(x)$

$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$

Pak hledáme part. řešení $\tilde{y}$ nehom. ř. ve tvaru

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2$$

Dosazení:

$$y' = \boxed{C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2}^{\overset{!!}{0}} + C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$$

$$y'' = C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + C_1(x)\, y_1'' + C_2(x)\, y_2''$$

$$\underbrace{C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + C_1(x)\, y_1'' + C_2(x)\, y_2''}_{y''} +$$

$$+ a_1(x)\underbrace{\left(C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'\right)}_{y'} + a_2(x)\underbrace{\left(C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2\right)}_{y} =$$

$\overset{!!}{0}\,!$

$= b(x)$

y_1, y_2: řešení hom. rovn.

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

$$C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = b(x)$$

Soustava pro C_1, C_2:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = b(x) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ výpočet $C_1(x), C_2(x)$.

$y'' + y = \sin x$

Hom. $y'' + y = 0$, ch. ř.: $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

Obecné ř.: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Hledáme par. řeš. nehom. ř.!

[$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$]

$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

<...> soustava pro C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)\cdot(-\sin x) + C_2'(x)\cdot\cos x = \sin x \end{cases}$$

$\cdot \sin x$

$\cdot \cos x$ +

$$C_2'(x) = \sin x \cos x$$

$$C_2(x) = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

$\cdot \cos x$

$\cdot (-\sin x)$ +

$$C_1'(x) = -\sin^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{2}$$

[$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$]

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}$$

$$\underbrace{y}_{\text{part. řeš.}} = \underbrace{\left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\right)}_{C_1(x)}\cos x + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)}_{C_2(x)}\cdot \sin x =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\sin 2x \cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\left[\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x\right] - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x$$

($\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$)

$$= -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{4}\left[\cancel{\sin 3x} + \sin x - \sin x - \cancel{\sin 3x}\right. \; \ldots \text{ atd}$$

(pracnější výpočet)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$$

Metoda neurčitých koeficientů pro speciální typy funkcí $b(x)$

$$b(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(p(x) \cos \beta x + q(x) \sin \beta x \right)$$

polynomy

part. řeš.

$$y = x^s \cdot e^{\alpha x} \left(\tilde{p}(x) \cos \beta x + \tilde{q}(x) \sin \beta x \right)$$

polyn. stej. stup.

s = násobnost čísla $\boxed{\gamma = \alpha + i\beta}$ jako kořene charakt. rovnice

$$y'' + y = \sin x$$

$p(x) = 0 \quad q(x) = 1$

$$\sin x = e^{0x} \left(0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x \right)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\alpha = 0, \ \beta = 1$

$$\lambda = \pm i$$

$$\gamma = 0 \pm i 1 = \pm i$$

$$\tilde{y} = x \cdot (A \cos x + B \sin x)$$

$-\frac{1}{2}$ $\quad$ 0

$$\boxed{y = Ax\cos x + Bx\sin x} \rightarrow \text{dosadit}$$

$$y' = A\cos x + B\sin x + Ax(-\sin x) + Bx\cos x$$

$$y'' = -A\sin x + B\cos x + A(-\sin x) + B\cos x + Ax(-\cos x) +$$

$$+ Bx \cdot \sin x =$$

$$= -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x + Bx\sin x$$

$$\underbrace{-2A\sin x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x}}_{y''} + \underbrace{\cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x}}_{y} = \sin x$$

$\sin x: \quad -2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}$

$$B = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} x \cos x} \quad \text{part. řeš.}$$

$$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$$

$$3e^{4x} = e^{4x} \cdot [\underbrace{3}\cdot\cos 0x + 0 \cdot \sin 0x]$$

$\alpha = 4$ $\beta = 0$

Char. rovn.: $\gamma = \alpha \pm i\beta = 4$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} 4 \to e^{4x} \\ 3 \to e^{3x} \end{cases}$$

Hledáme $y = \underline{\underline{x}} A e^{4x}$

$$y' = Ae^{4x} + Ax \cdot 4e^{4x}$$

$$y'' = 4Ae^{4x} + 4Ae^{4x} + 4x \cdot 4e^{4x} = 8Ae^{4x} + 16xe^{4x}$$

$$\underbrace{8Ae^{4x} + \cancel{16xe^{4x}}}_{y''} - 7Ae^{4x} - 7 \cdot \cancel{Ax4 \cdot e^{4x}} + \cancel{12x}\underline{\underline{Ae^{4x}}} = 3e^{4x}$$

$8A - 7A = 3$ $A = 3$

$\to$ $y = 3xe^{4x}$

Obecné řešení je:

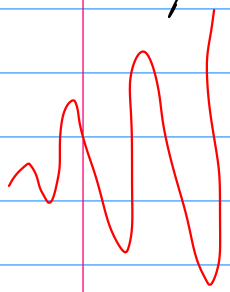
$$\boxed{y = \underbrace{3xe^{4x}}_{\text{part. nehom.}} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Obecné řešení:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} x \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

part.



$$y'' + y = \sin x$$

$$u'' + \omega_0^2 u = \overbrace{F_0 \sin \omega t}^{\text{externí síly}}$$

harmonická oscilace

$$u'' + \omega_0^2 u = 0$$

$$u = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \tilde{y}$$

$$\omega = \omega_0$$

$$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$$

$$\sin 5x = e^{0x}\left[0 \cdot \cos 5x + 1 \cdot \sin 5x\right]$$

$$3x^2 = e^{0x}\left[3x^2 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x\right]$$

princip superpozice:

$$y'' - 5y' = b(x) \qquad b(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

$$\searrow + \begin{cases} y_1: & y_1'' - 5y_1' = b_1(x) \\ y_2: & y_2'' - 5y_2' = b_2(x) \end{cases}$$

$\searrow$ $y = y_1 + y_2$ bude

řešením $y'' - 5y = b(x)$