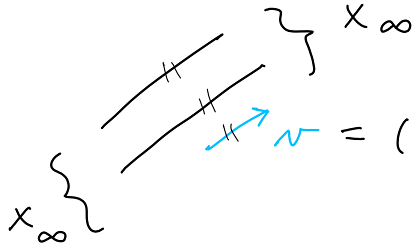
ROZŠÍŘENÍ KONZUMNĚ — shrnutí

- bod vlastní $\;\cdot\; X = [x_1, x_2] \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

- bod nevlastní



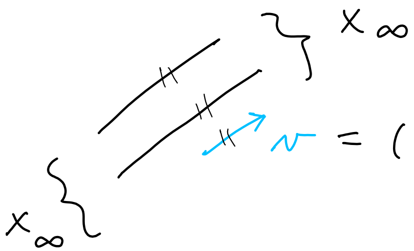
$v = (x_1, x_2) \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

ROZŠÍŘENÍ KONZUMNÉ — postřeh!

- bod vlastní $\quad \bullet\ X = [x_1, x_2] \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

přičemž připouštíme, že vektory $\mathbf{X}$ a $k\,\mathbf{X}$ "UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

- bod nevlastní



$v = (x_1, x_2) \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$,

přičemž vektory v a $k\,v$, resp. $\mathbf{X}$ a $k\,\mathbf{X}$ "UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

$\uparrow \ \uparrow \ \nearrow$

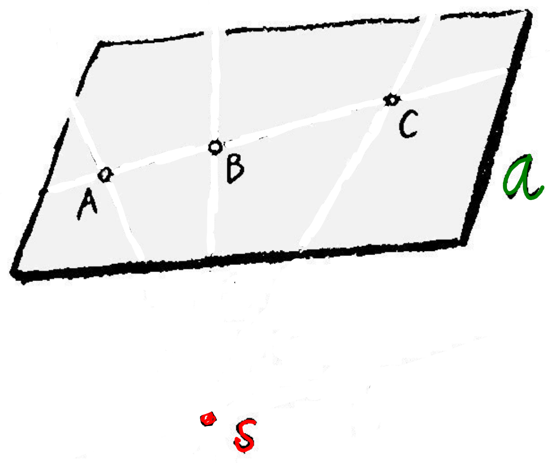
všude $k \in \mathbb{R}$ lib. $\neq 0$

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{a}$ = afinní prostor (dim n)

  $S \notin \mathcal{a}$, $\mathcal{n} = \mathcal{a} + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)



ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

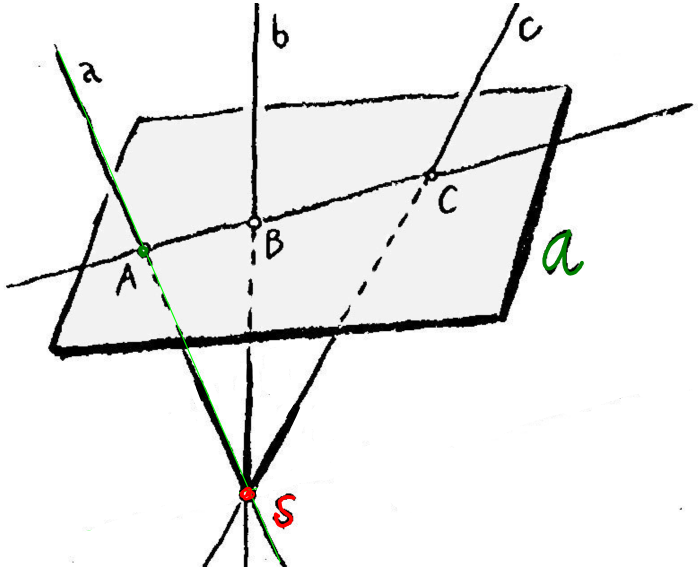
- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{A}$ = afinní prostor (dim n)

  $S \notin \mathcal{A}$, $\mathcal{N} = \mathcal{A} + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

  $A \in \mathcal{A} \xleftrightarrow{1:1} a = A + S$



ROZŠÍŘENÍ POŘADNÉ

- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{a}$ = afinní prostor (dim n)

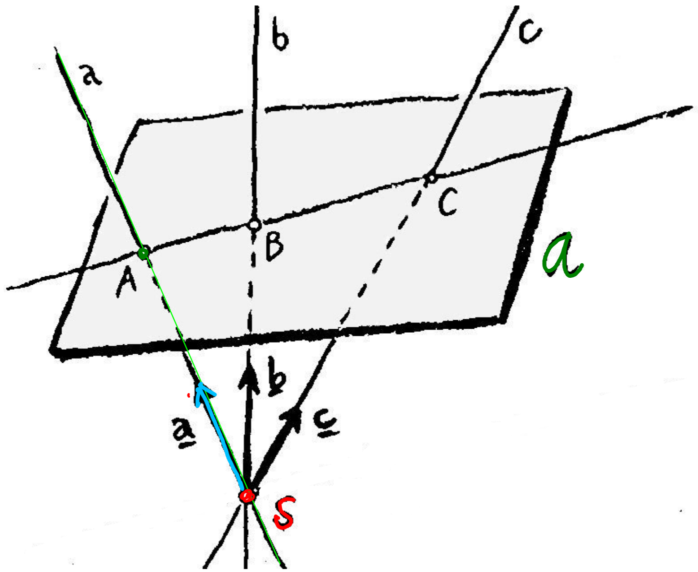
  $S \notin \mathcal{a}$, $\mathcal{N} = \mathcal{a} + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

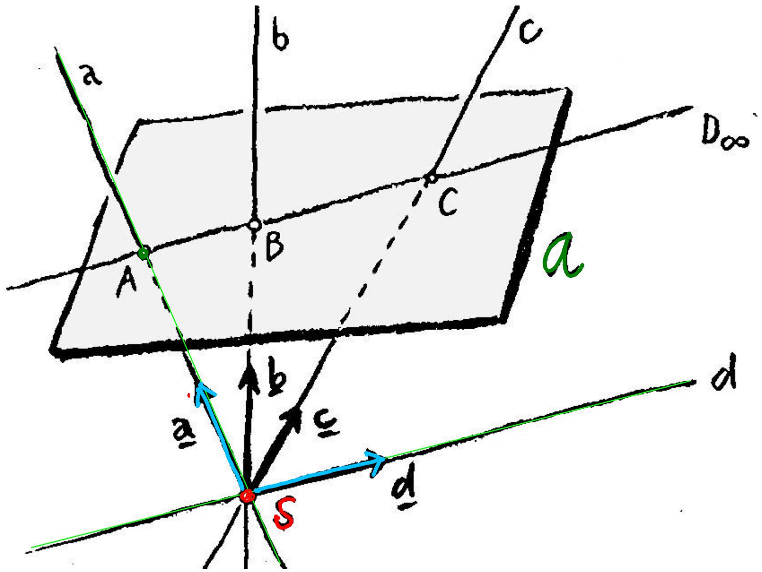
  $A \in \mathcal{a} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S$

- přidejme VEKTORY

  $A \in \mathcal{a} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \underline{a} = \overrightarrow{SA}$ až na NÁSOBEK!



ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{A}$ = afinní prostor (dim n)

  $S \notin \mathcal{A}$, $\mathcal{N} = \mathcal{A} + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

  $A \in \mathcal{A} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S$

- přidejme VEKTORY

  $A \in \mathcal{A} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \underline{a} = \overrightarrow{SA}$ až na NÁSOBEK!

  (ozn. zaměření $V = \vec{\mathcal{A}}$, $W = \vec{\mathcal{N}}$)

- vraťme LIMITY (= ROZŠÍŘENÍ)

  {body vlastní} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {přímky proch. S ______ s $\mathcal{A}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W ______ do V}

  {body nevlastní} $\longleftrightarrow$ {přímky proch. S ______ s $\mathcal{A}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W ______ do V}

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\tilde{a}$, resp. proj. rozšíření af. prostoru a

- Projektivní prostor dim $\boxed{}$ w
  $\approx$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{}$

Bod v $\tilde{a}$ . . . směr = $\boxed{}$-dim podprostor ve w
Přímka v $\tilde{a}$ . . . . . . $\boxed{}$-dim podprostor ve w
⋮

- Projektivní podprostor $\tilde{b} \subseteq \tilde{a}$ dim $\boxed{}$
  $\approx$ vektorový podprostor $u \subseteq w$ dim $\boxed{}$

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\tilde{a}$, resp. proj. rozšíření af. prostoru a

- Projektivní prostor dim $\boxed{n}$

$\approx$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$ W

... přičemž nevlastní (= rozšířené) prvky odp. směrům v ____________

Bod v $\tilde{a}$ ... směr = 1-dim podprostor ve W

Přímka v $\tilde{a}$ .... 2-dim podprostor ve W

⋮

- Projektivní podprostor $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{a}$ dim $\boxed{k}$

$\approx$ vektorový podprostor $U \subseteq W$ dim $\boxed{k+1}$

... přičemž af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq a$ rovnoběžné

$\rightsquigarrow$ odp. rozšíření $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}'$ ____________

$\rightsquigarrow$ odp. vekt. podpr. $U \cap U'$ ____________

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\tilde{a}$, resp. proj. rozšíření af. prostoru a

- Projektivní prostor dim $\boxed{n}$
  $\approx$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$ W

  ... přičemž **nevlastní** (= rozšířené) prvky odp. směrům v **nadrovině** $V \subset W$

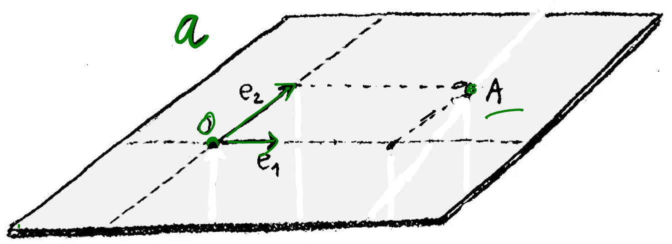
Bod v $\tilde{a}$ ... směr = 1-dim podprostor ve W
Přímka v $\tilde{a}$ .... 2-dim podprostor ve W
⋮

- Projektivní podprostor $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tilde{a}$ dim $\boxed{k}$
  $\approx$ vektorový podprostor $U \subseteq W$ dim $\boxed{k+1}$

  ... přičemž af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq a$ **rovnoběžné**
  $\rightsquigarrow$ odp. rozšíření $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}'$ <u>**nevlastní**</u>
  $\rightsquigarrow$ odp. vekt. podpr. $U \cap U'$ <u>v **nadrovině** $V \subset W$</u>

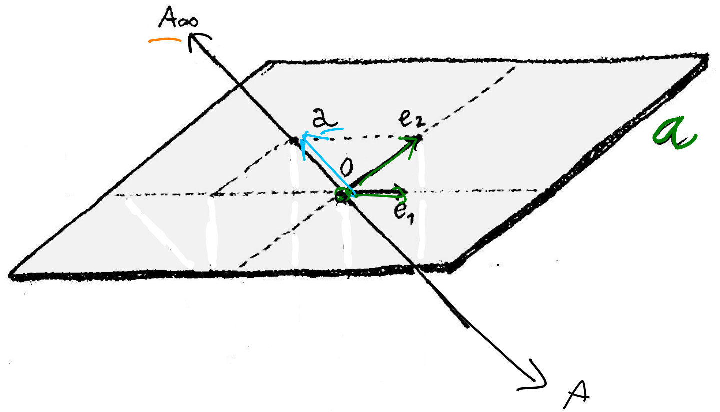
HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

- bod vlastní $\quad \underline{A} \doteq [3, 1] =$ souřadnice vzhledem k O, e_1, e_2



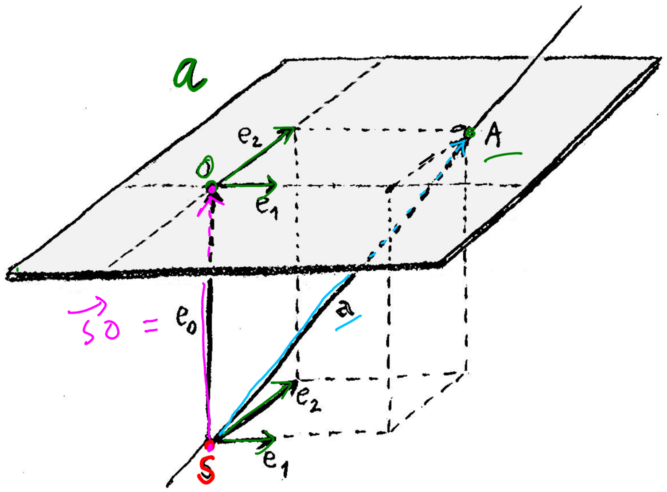
- bod nevlastní $\quad \underline{a} \doteq (-2, 1) \sim (6, -3) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k O, e_1, e_2

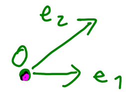


HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

- bod vlastní

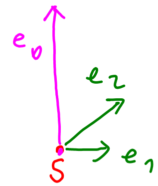


$\underline{A} \doteq [3,1]$ = souřadnice vzhledem k

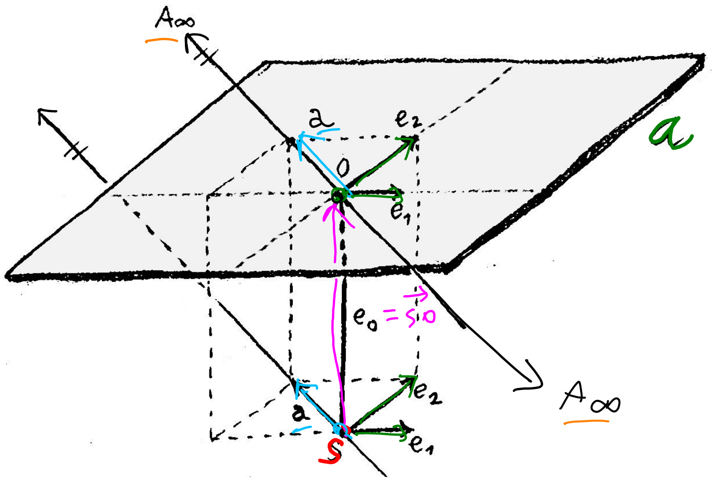


$\underline{a} \doteq (3,1,1) \sim (6,2,2) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k

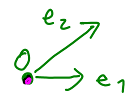


- bod nevlastní



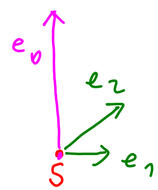
$\underline{a} \doteq (-2,1) \sim (6,-3) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



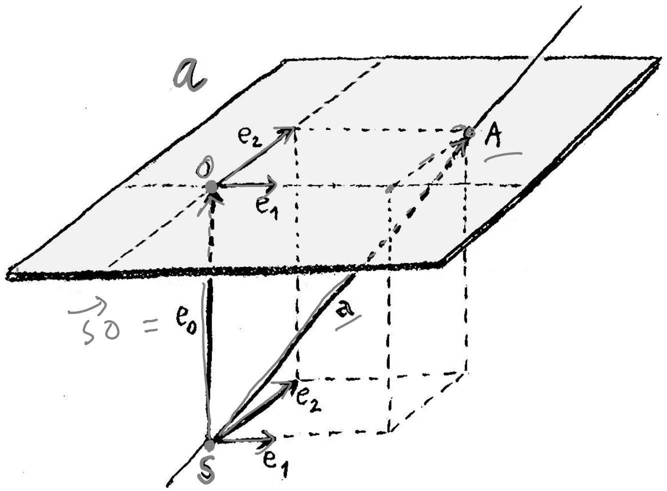
$\underline{a} \doteq (-2,1,0) \sim (6,-3,0) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k

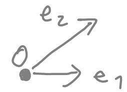


HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

- bod vlastní

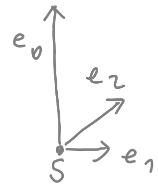


$\underline{A} \doteq [3,1]$ = souřadnice vzhledem k



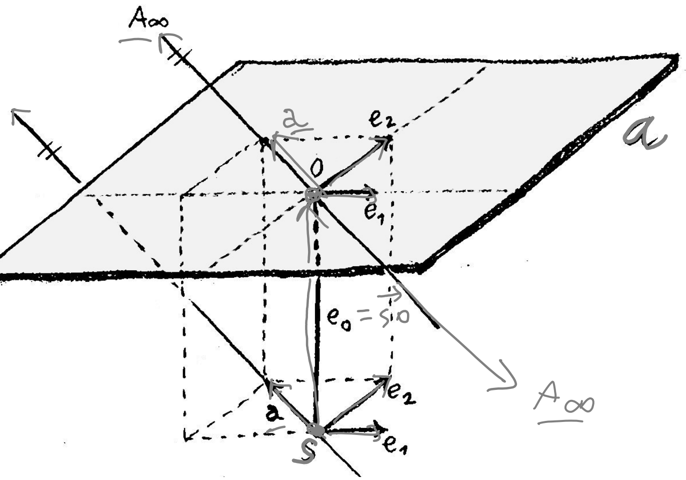
$\underline{a} \doteq (3,1,1) \sim (6,2,2) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



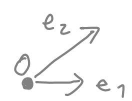
ozn.. $A \doteq (3:1:1) = (6:2:2) = \dots$

- bod nevlastní



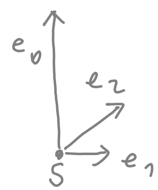
$\underline{a} \doteq (-2,1) \sim (6,-3) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



$\underline{a} \doteq (-2,1,0) \sim (6,-3,0) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



ozn.. $A \doteq (-2:1:0) = (6:-3:0) = \dots$

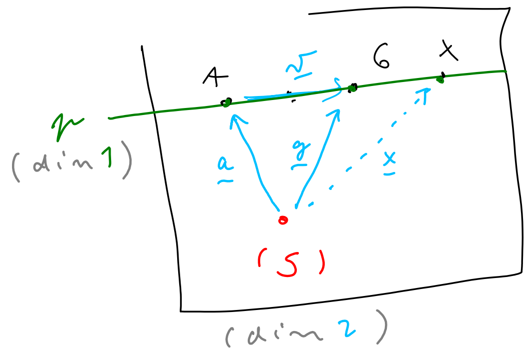
PŘÍKLAD – vyjádření podpr.

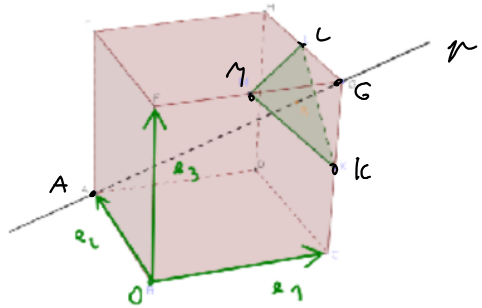
$A = [0,1,0]$, $G = [1,0,1]$ } p

$\vdots$

$K = [1,0,1/2]$, $L = [1,1/2,1]$, $M = [1/2,0,1]$ } α

p = přímka AG





HOMOG. SOUŘ. (nové)

$A = (\; : \; : \; : \;)$

$G = (\; : \; : \; : \;)$

$V = (\; : \; : \; : \;)$

(a) parametricky

AF. SOUŘ. (umíme)

$A = [0,1,0]$

$G = [1,0,1]$

$v = \overrightarrow{AG} = (1,-1,1)$

(a) parametricky

$$p = \{ X = A + t\overrightarrow{AG} \mid t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \;\; t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = \;\; t \end{array} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

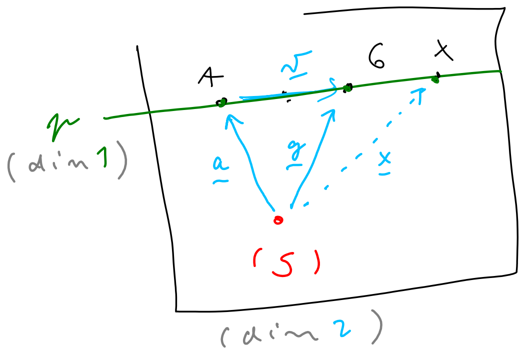
$$= \{ [t, 1-t, t] \mid \dots \}$$

$$= \{ X = G + \check{t}\,\overrightarrow{GA} \mid \check{t} \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ [1-\check{t}, \check{t}, 1-\check{t}] \mid \dots \}$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr.

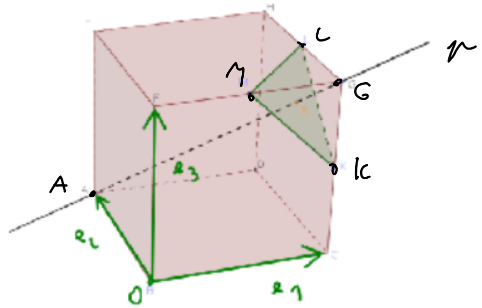
p = přímka AG



$$\left.\begin{array}{l} A = [0,1,0] \\ G = [1,0,1] \end{array}\right\} p$$

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} K = [1,0,1/2] \\ L = [1,1/2,1] \\ M = [1/2,0,1] \end{array}\right\} \alpha$$



HOMOG. SOUŘ. (nově)

$A = (0 : 1 : 0 : 1)$

$G = (1 : 0 : 1 : 1)$

$V = (1 : -1 : 1 : 0)$

(a) parametricky

$$p = \text{"}\{X = rA + sG \mid r, s \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \phantom{r+{}} s \\ x_2 = r \\ x_3 = \phantom{r+{}} s \\ x_0 = r + s \end{array} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{(s : r : s : r+s) \mid \dots\}$$

$$= \text{"}\{X = \check{r}A + \check{s}V \mid \check{r}, \check{s} \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \{X = (\check{s} : \check{r} - \check{s} : \check{s} : \check{r}) \mid \dots\}$$

$r + s = 1$

$s = t$

$\check{r} = 1$

$\check{s} = 1$

$\check{r} = 1$

$\check{s} = 1 - \check{t}$

AF. SOUŘ. (umíme)

$A = [0, 1, 0]$

$G = [1, 0, 1]$

$v = \overrightarrow{AG} = (1, -1, 1)$

(a) parametricky

$$p = \{X = A + t\,\overrightarrow{AG} \mid t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \phantom{1-{}} t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = \phantom{1-{}} t \end{array} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \{[t, 1-t, t] \mid \dots\}$$

$$= \{X = G + \check{t}\,\overrightarrow{GA} \mid \check{t} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{[1-\check{t}, \check{t}, 1-\check{t}] \mid \dots\}$$

PŘÍKLAD — vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nově)

AF. SOUŘ. (umíme)

(b) rovnicově

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \ldots$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nově)

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \\ x_1 + x_2 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\} =$$

$= \dots$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$4 - \underset{\sim}{2} = \underline{\underline{2}}$

$x_0 = 1$

AF. SOUŘ. (umíme)

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$= \dots$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$3 - \underset{\sim}{1} = \underline{\underline{2}}$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nové) | AF. SOUŘ. (umíme)

Homogenní souřadnice

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_0 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic: $4 - 2 = 2$

$x_0 = 1$

Afinní souřadnice

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic: $3 - 1 = 2$

MOŽNOSTI ŘEŠENÍ (stále stejné)

- z hlavy (... pokud to je možné)
- systematická eliminace

$$\left(\begin{array}{lll} x_1 = & & s \\ x_2 = & r & \\ x_3 = & & s \\ x_0 = & r & +s \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rcc} x_1 = & 0 & s \\ x_2 = & r & 0 \\ x_1 - x_3 = & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = & 0 & 0 \end{array} \right) \checkmark$$

- (sub)determinanty

$$\left(\begin{array}{ccc} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_0 - x_2 - x_3 = 0 \quad \checkmark$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. α = rovina KLM

HOMOG. SOUŘ. (nově)

$K = (2 : 0 : 1 : 2) = (1 : 0 : 1/2 : 1)$

$L = (2 : 1 : 2 : 2)$

$M = (1 : 0 : 2 : 2)$

$u = (0 : 1 : 1 : 0)$

$v = (-1 : 0 : 1 : 0)$

(a) parametricky

(b) rovnicově

AF. SOUŘ. (umíme)

$K = [1, 0, 1/2]$

$L = [1, 1/2, 1]$

$M = [1/2, 0, 1]$

$u = \overrightarrow{KL} = (0, 1/2, 1/2)$

$v = \overrightarrow{KM} = (-1/2, 0, 1/2)$

(a) parametricky

$$\alpha = \{ X = K + r\,\overrightarrow{KL} + s\,\overrightarrow{KM} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 1/2\, s \\ x_2 = 0 + 1/2\, r \\ x_3 = 1/2 + 1/2\, r + 1/2\, s \end{array} \;\middle|\; \dots \right\}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{ x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2} \}$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. α = rovina KLM

HOMOG. SOUŘ. (nově) | **AF. SOUŘ. (umíme)**

$K = (2 : 0 : 1 : 2) = (1 : 0 : 1/2 : 1)$
$L = (2 : 1 : 2 : 2)$
$M = (1 : 0 : 2 : 2)$
$u = (0 : 1 : 1 : 0)$
$v = (-1 : 0 : 1 : 0)$

$K = [1, 0, 1/2]$
$L = [1, 1/2, 1]$
$M = [1/2, 0, 1]$
$u = \overrightarrow{KL} = (0, 1/2, 1/2)$
$v = \overrightarrow{KM} = (-1/2, 0, 1/2)$

(a) parametricky

$$\alpha = \text{"}\{X = kK + lL + mM \mid k, l, m \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2k + 2l + m \\ x_2 = l \\ x_3 = k + 2l + 2m \\ x_0 = 2k + 2l + 2m \end{array} \middle| \ \dots \right\}$$

$k + l + m = 1/2$

$l = 1/2\, r, \ m = 1/2\, s$

(a) parametricky

$$\alpha = \{X = K + r\overrightarrow{KL} + s\overrightarrow{KM} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 1/2\, s \\ x_2 = 0 + 1/2\, r \\ x_3 = 1/2 + 1/2\, r + 1/2\, s \end{array} \middle| \ \dots \right\}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0\}$$

$x_0 = 1$

počet NEZÁV. rovnic: $4 - 3 = 1$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2}\}$$

počet NEZÁV. rovnic: $3 - 2 = 1$

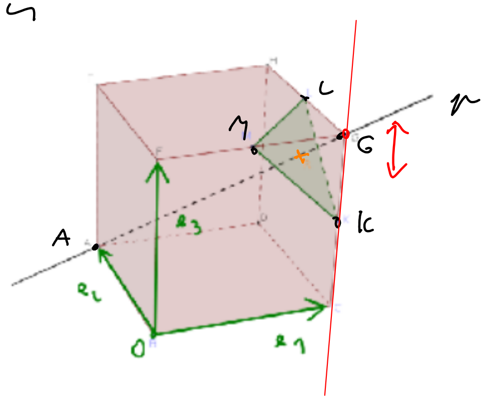
PŘÍKLAD – vzájemná poloha podprostorů

... v závislosti na hodnotě $k \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A = [0, 1, 0] \\ G = [1, 0, k] \end{array}\right\} p$$

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} K = [1, 0, 1/2] \\ L = [1, 1/2, 1] \\ M = [1/2, 0, 1] \end{array}\right\} \alpha$$



HOMOG. SOUŘ. (nově)

$$p = \{ (s : r : ks : r+s) \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0 \}$$

AF. SOUŘ. (umíme)

$$p = \{ [t, 1-t, kt] \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2} \}$$

$$p \cap \alpha : \quad t - (1-t) + kt = 3/2$$

$$(2+k)\,t = 5/2$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \emptyset \rightsquigarrow p \parallel \alpha$

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \text{bod} \rightsquigarrow p \times \alpha$

... jmenovitě

$$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{4+2k}, \frac{2k-1}{4+2k}, \frac{5k}{4+2k} \right]$$