MEZISHRNUTÍ

- Pro SHODNÁ $\to$ PODOBNÁ $\to$ AFINNÍ $\to$ **PROJEKTIVNÍ** zobr. prostoru dim $\boxed{n}$

  jsme se zatím vždy vlezli do **MATICE** řádu $\boxed{n+1}$!

- **MATICE** představuje **LINEÁRNÍ** zobr. vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \text{ dim } n+1 \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \text{ dim } n \end{tikzcd}$$

- Přirozená otázka (očekávání):

  FUNGUJE TO TAK **OBECNĚ** ?

- Nejprve předp. všechno **BIJEKTIVNÍ** a **dim $\geqq 2$** . . .

MASÁŽ I.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

- Předp. $F: W \to W$ .. LINEÁRNÍ

  $\Rightarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je zase .

- Zejména:

  a) $\dim U = 1 \rightsquigarrow$

  b) $\dim U = 2 \rightsquigarrow$

tj. $f =$!

MASÁŽ I.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

- Předp. $F : W \longrightarrow W$ .. LINEÁRNÍ

  $\Longrightarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je zase $\boxed{\text{vekt. podprostorem}}$.

- <u>Zejména</u>:

  a) $\dim U = 1 \rightsquigarrow$ MÁME zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$,

  b) $\dim U = 2 \rightsquigarrow f$ zobrazuje přímky na přímky,

  tj. $f = \boxed{\text{KOLINEACE}}$!

MASÁŽ II.

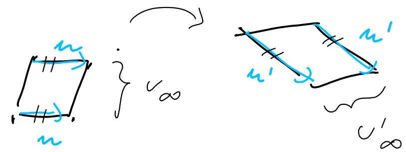
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \tilde{a} \arrow[r, "f"'] & \tilde{a} \end{tikzcd}$$

- Předp. $f : a \to a$ ... AFINNÍ

  $\Longrightarrow$ máme indukované LINEÁRNÍ

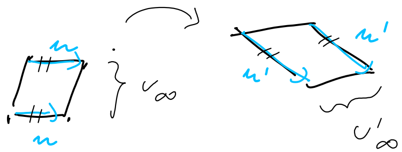
  $$\vec{f} : V \to V, \quad V = \vec{a}$$

  ... popisuje $\boxed{}$.



MASÁŽ II.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \tilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "f"'] & \tilde{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$



- Předp. $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ... AFINNÍ

  $\Longrightarrow$ máme indukované LINEÁRNÍ

$$\vec{f} : V \to V, \qquad V = \vec{\mathcal{A}}$$

  ... popisuje $\boxed{\text{zobr. } \infty \text{ bodů při rozšíření } \mathcal{P} = \tilde{\mathcal{A}}}$.

- Zejména :

  a) rozšířené zobr. $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}$ ... "$\tilde{f} = f + \vec{f}$"

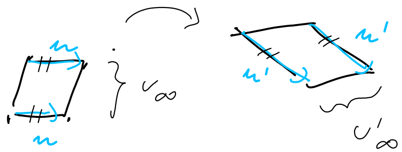
  b) je určeno LINEÁRNÍM zobr.

$$F : W \to W,$$

  ... přičemž $F(V) \subseteq V$ a $F|_V = \vec{f}$!

MASÁŽ II.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \tilde{a} \arrow[r, "f"'] & \tilde{a} \end{tikzcd}$$



- Předp. $f : a \to a$ ... AFINNÍ

  $\Longrightarrow$ máme indukované LINEÁRNÍ

  $\vec{f} : V \to V$, $\quad V = \vec{a}$

  ... popisuje $\boxed{\text{zobr. } \infty \text{ bodů při rozšíření } \rho = \tilde{a}}$.

- Zejména :

  a) rozšířené zobr. $\tilde{f} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ ... "$\tilde{f} = f + \vec{f}$"

  b) je určeno LINEÁRNÍM zobr.

  $F : W \to W$,

  ... přičemž $F(V) \subseteq V$ a $F|_V = \vec{f}$!

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

pro $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$\Updownarrow$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F: W \to W'$

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro bijektivní $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory $\dim \geq 2$ platí:

f zachovává kolinearnost

$$\Updownarrow$$

f je určeno lineárním izo. $F: W \to W'$

- Směr "$\Uparrow$" ... rozumíme obecně
- Směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro afinní
  ... doplníme pro obecné kolineace ..

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{F}{\dashrightarrow} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P} & \underset{f}{\longrightarrow} & \mathcal{P} \end{array}$$

- Postřeh: zatím nikde nemluvíme o !

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ } f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}' \text{ mezi proj. prostory DIM} \geq 2}$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : W \longrightarrow W'$

- směr "$\Uparrow$" ... rozumíme OBECNĚ $\boxed{\text{(viz MASÁŽ I.)}}$
- směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro AFINNÍ $\boxed{\text{(viz MASÁŽ II.)}}$

  ... doplníme pro obecné KOLINEACE ..

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- **Postřeh**: zatím nikde nemluvíme o $\boxed{\text{DVOJPOMĚRECH}}$!

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ ... KOLINEACE

  $\Longrightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je ,

  zejména obraz NADROVINY $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$ je .

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ . . . KOLINEACE

  $\Rightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{proj. podpr.}}$,
  zejména obraz NADROVINY $n \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{NADROVINA } n' \subseteq \mathcal{P}'}$.

- INTERPRETUJME n a n' jako nadroviny "∞ bodů":

  ozn. $\mathcal{A} := \mathcal{P} \setminus n$, tj. $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup n = \tilde{\mathcal{A}}$ atd.

zúžené zobr. $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je $\boxed{}$.

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ . . . KOLINEACE

  $\Longrightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{proj. podpr.}}$,
  zejména obraz NADROVINY $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{NADROVINA } \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{P}'}$.

- INTERPRETUJME $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}'$ jako nadroviny "∞ bodů":

  ozn. $\mathcal{A} := \mathcal{P} \setminus \mathcal{N}$, tj. $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \mathcal{N} = \tilde{\mathcal{A}}$ atd.

  zúžené zobr. $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je $\boxed{\text{KOLINEACE}}$.

- ZÁKL. VĚTA AFINNÍ GEOM. $\Longrightarrow$ $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je $\boxed{}$!

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ . . . KOLINEACE

  $\Rightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{proj. podpr.}}$,
  zejména obraz NADROVINY $n \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{NADROVINA } n' \subseteq \mathcal{P}'}$.

- INTERPRETUJME n a n' jako nadroviny "∞ bodů":

  ozn. $a := \mathcal{P} \setminus n$, tj. $\mathcal{P} = a \cup n = \tilde{a}$ atd.

  zúžené zobr. $f : a \to a'$ je $\boxed{\text{KOLINEACE}}$.

- ZÁKL. VĚTA AFINNÍ GEOM. $\Rightarrow$ $f : a \to a'$ je $\boxed{\text{AFINNÍ}}$!

  "ROZŠÍŘENÍ" $\tilde{f} = f$,

  a to $\boxed{}$ $F : w \to w'$!

DŮKAZ

- Předp. $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ ... KOLINEACE

  $\Rightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{proj. podpr.}}$,
  zejména obraz NADROVINY $n \subseteq \mathcal{P}$ je $\boxed{\text{NADROVINA } n' \subseteq \mathcal{P}'}$.

- INTERPRETUJME n a n' jako nadroviny "∞ bodů":

  $\underbrace{\text{ozn. } a := \mathcal{P} \setminus n}$, tj. $\mathcal{P} = a \cup n = \tilde{a}$ atd.

  zúžené zobr. $f: a \to a'$ je $\boxed{\text{KOLINEACE}}$.

- $\underbrace{\text{ZÁKL. VĚTA AFINNÍ GEOM.}}$ $\Rightarrow$ $f: a \to a'$ je $\boxed{\text{AFINNÍ}}$!

  "ROZŠÍŘENÍ" $\tilde{f} = f$,

  a to $\boxed{\text{je určeno LINEÁRNÍM}}$ $F: W \to W'$!

  (viz MASÁŽ II.)