ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro $\boxed{\text{bijektivní } f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \text{ mezi proj. prostory } \dim \geq 2}$ platí:

f zachovává KOLINEARNOST

$$\Updownarrow$$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : W \to W'$

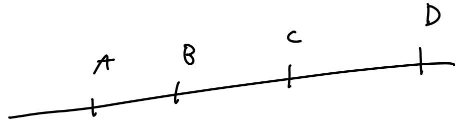
- směr "$\Uparrow$" ... rozumíme obecně $\boxed{\text{(viz MASÁŽ I.)}}$
- směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro AFINNÍ $\boxed{\text{(viz MASÁŽ II.)}}$
  ... doplníme pro obecné KOLINEACE ...

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- **Postřeh**: zatím nikde nemluvíme o $\boxed{\text{DVOJPOMĚRECH}}$!

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — VZPOMÍNÁME

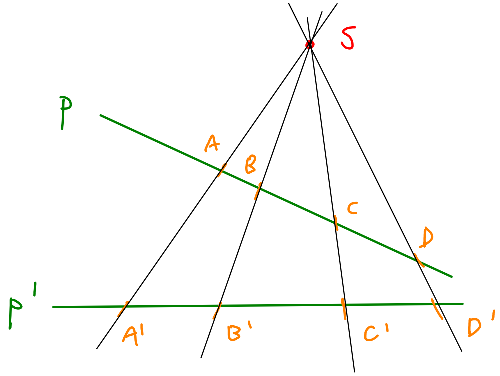
- Definice $$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$



$\lim\limits_{D \to \infty} \ldots =$

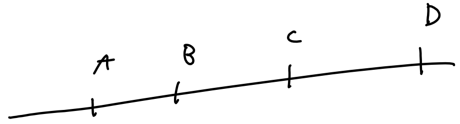
- Věta (Pappova)

  Při ______ *se zachovávají* *dvojpoměry* *čtveřic kolineárních bodů.*



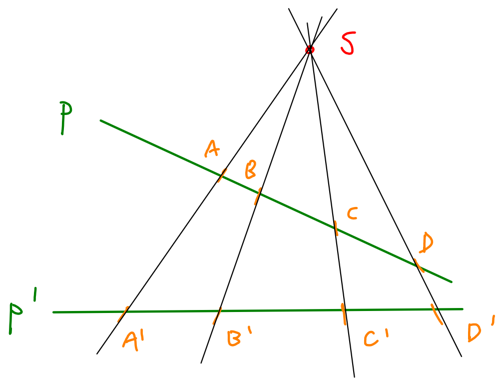
JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — VZPOMÍNÁME

- Definice $$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

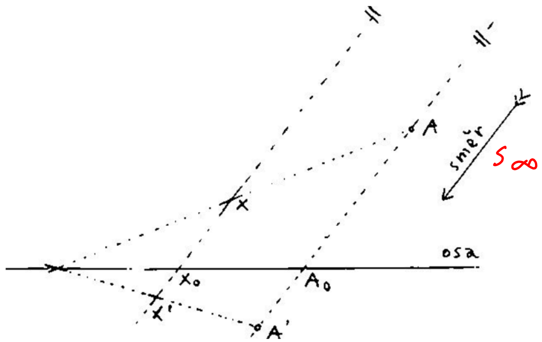


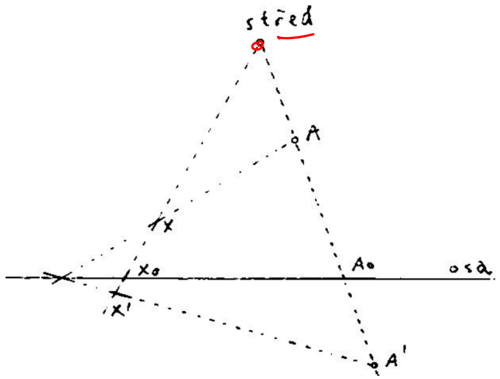
$$\lim_{D\to\infty} \dots = \boxed{\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot 1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}}$$

- Věta (Pappova)
Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



- Pozn. Osová afinita vs. osová kolineace:

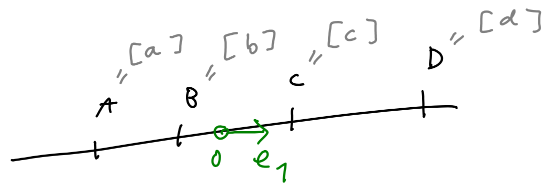




$\boxed{\lim_{S\to\infty}}$ ...

- $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- $(X'X\,X_o) = (A'A\,A_o) = \dots$ modul, $(X'X\,X_oS) = (A'A\,A_oS) = \dots$ modul.

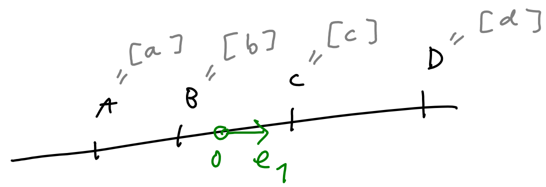
JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — NOVĚ



- v af. souřadnicích

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — NOVĚ



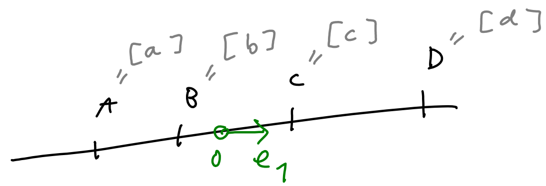
- v af. souřadnicích

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$

- postřeh

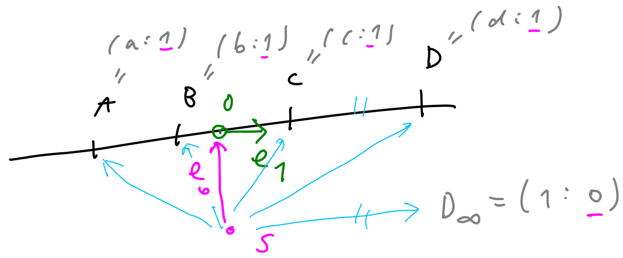
$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — NOVĚ



- v af. souřadnicích

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$



- postřeh

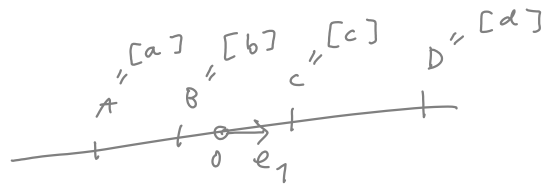
$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\lim_{D\to\infty} \cdots\cdots = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

- v hom. souřadnicích

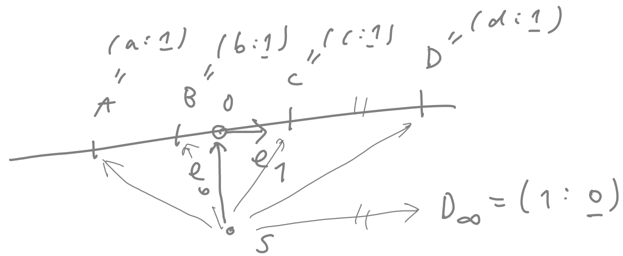
$$\boxed{(AB\,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_0 & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & b \\ d_0 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ c_0 & b_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & a \\ d_0 & a_0 \end{vmatrix}}}$$

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY ? — NOVĚ



- v af. souřadnicích

$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$



- postřeh

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1\end{vmatrix}}$$

$$\lim_{D\to\infty} \cdots\cdots = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{vmatrix}} = 1$$

- v hom. souřadnicích

$$\boxed{(AB\,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_0 & a_0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d & b \\ d_0 & b_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ c_0 & b_0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d & a \\ d_0 & a_0\end{vmatrix}}}$$

krásně HOMOGENNÍ

a DOBŘE DEF!

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY ?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY :

pro $\boxed{f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'}$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY)

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY:

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM $\geqq 2$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY)

DŮKAZ (směru "$\Downarrow$")

- ZÁKL. VĚTA PROJ. GEOM. $\Longrightarrow$ f je určeno $F : W \to W'$
- zúžení na lib. přímku je určeno $\underline{F} : U \to U'$

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY:

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ } f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \text{ mezi proj. prostory DIM} \geq 2}$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY)

DŮKAZ (směru "$\Downarrow$")

- ZÁKL. VĚTA PROJ. GEOM. $\Longrightarrow$ f je určeno $\boxed{\text{LINEÁRNÍM}}$ $F : W \to W'$
- zúžení na lib. přímku (dim 1) je určeno $\boxed{\text{LINEÁRNÍM}}$ $\underline{F} : U \to U'$ (dim 2)
- HOMOGENNÍ popis dvojpoměru + $\boxed{}$:

$$(A'B'C'D') = \frac{|(\underline{F})\cdot(:\,:)|\cdot|(\underline{F})\cdot(:\,:)|}{|(\underline{F})\cdot(:\,:)|\cdot|(\underline{F})\cdot(:\,:)|} \overset{!}{=} \frac{|\cancel{\underline{F}}|\cdot|:\,:|\cdot|\cancel{\underline{F}}|\cdot|:\,:|}{|\cancel{\underline{F}}|\cdot|:\,:|\cdot|\cancel{\underline{F}}|\cdot|:\,:|} = (ABCD)$$

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY?

... důsledek zákl. věty, zobecnění Pappovy věty:

> Pro $\boxed{\text{bijektivní } f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}' \text{ mezi proj. prostory dim} \geq 2}$ platí:
>
> f zachovává kolinearitu
>
> $\Updownarrow$
>
> f je projektivní (tj. navíc zach. dvojpoměry)

Důkaz (směru "$\Downarrow$")

- zákl. věta proj. geom. $\Longrightarrow$ f je určeno $\boxed{\text{lineárním}}$ $F : W \to W'$
- zúžení na lib. přímku (dim 1) je určeno $\boxed{\text{lineárním}}$ $\underline{F} : U \to U'$ (dim 2)
- homogenní popis dvojpoměru + $\boxed{\text{Cauchyho věta}}$:

  o součinu determinantů

$$(A'B'C'D') = \frac{\left|(\underline{F})\cdot\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\end{pmatrix}\right| \cdot \left|(\underline{F})\cdot\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\end{pmatrix}\right|}{\left|(\underline{F})\cdot\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\end{pmatrix}\right| \cdot \left|(\underline{F})\cdot\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\end{pmatrix}\right|} \overset{!}{=} \frac{\cancel{|\underline{F}|}\cdot\left|\begin{matrix}\vdots & \vdots\end{matrix}\right| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot\left|\begin{matrix}\vdots & \vdots\end{matrix}\right|}{\cancel{|\underline{F}|}\cdot\left|\begin{matrix}\vdots & \vdots\end{matrix}\right| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot\left|\begin{matrix}\vdots & \vdots\end{matrix}\right|} = (ABCD)$$

JAK TO JE S DIM 1?

Pro [ ] $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F: U \to U'$

- První "$\iff$" zřejmá ([ ])
- Druhá "$\Leftarrow$" taky (viz [ ])

JAK TO JE S DIM 1?

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ}}$ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

- první "$\Rightarrow$" zřejmá ($\boxed{\text{dim } 1}$)
- Druhá "$\Leftarrow$" taky (viz $\boxed{\text{důkaz předch. věty}}$)

JAK TO JE S DIM 1?

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ}}$ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

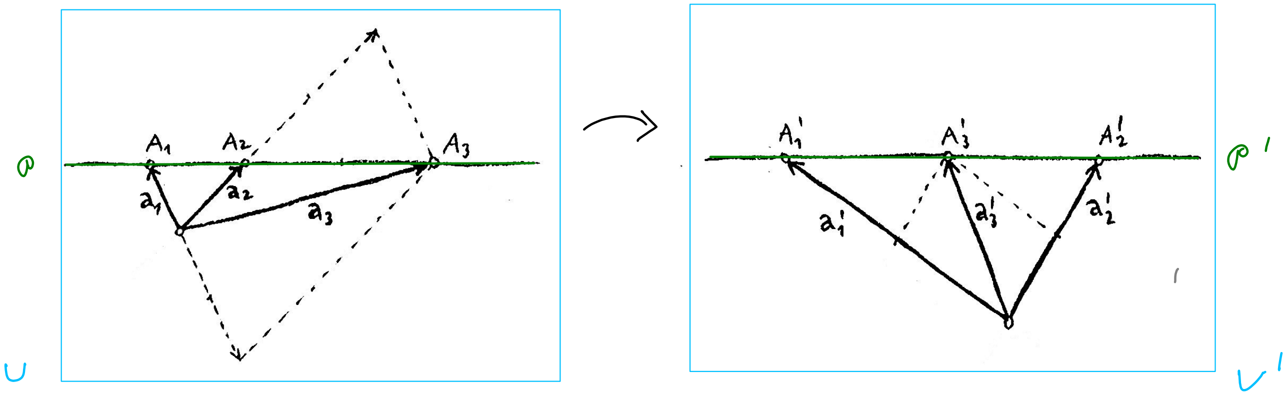
$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

• Druhá "$\Longrightarrow$":

f určeno $\boxed{\quad\quad}$ body v $\mathcal{P}$, tj. $\boxed{\quad\quad}$ vektory v U,

dim $U = 2$ $\rightsquigarrow$ stačí $\boxed{\quad}$ NEZÁVISLÉ vektory ...

... tak, aby to sedělo $\boxed{\quad\quad\quad}$!



JAK TO JE S DIM 1 ?

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ}}$ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\Longleftrightarrow$ f zach. DVOJPOMĚRY

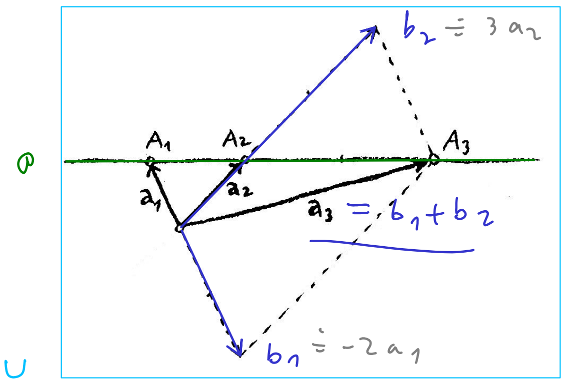
$\Longleftrightarrow$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

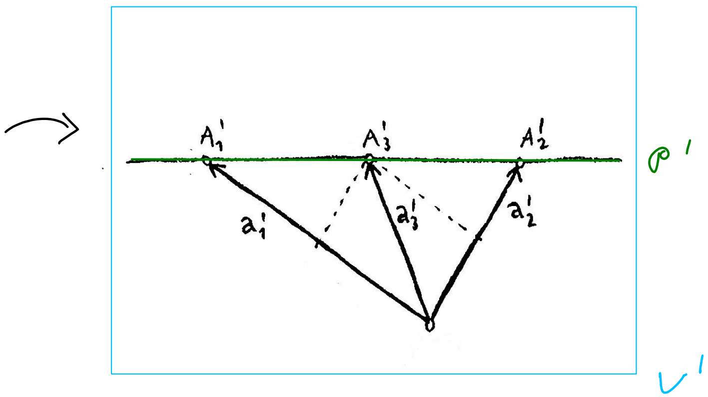
• Druhá "$\Longrightarrow$":

f určeno $\boxed{\text{TŘEMI}}$ navzájem různými body v $\mathcal{P}$, tj. $\boxed{\text{TŘEMI}}$ vektory v U,

dim U = 2 ⇝ stačí $\boxed{\text{DVA}}$ NEZÁVISLÉ vektory ...

... tak, aby to sedělo $\boxed{}$!





$F : U \to U'$ určeno

obrazy $\boxed{\begin{array}{l} F(\quad) = \\ F(\quad) = \end{array}}$

JAK TO JE S DIM 1?

Pro $\boxed{\text{BIJEKTIVNÍ}}$ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

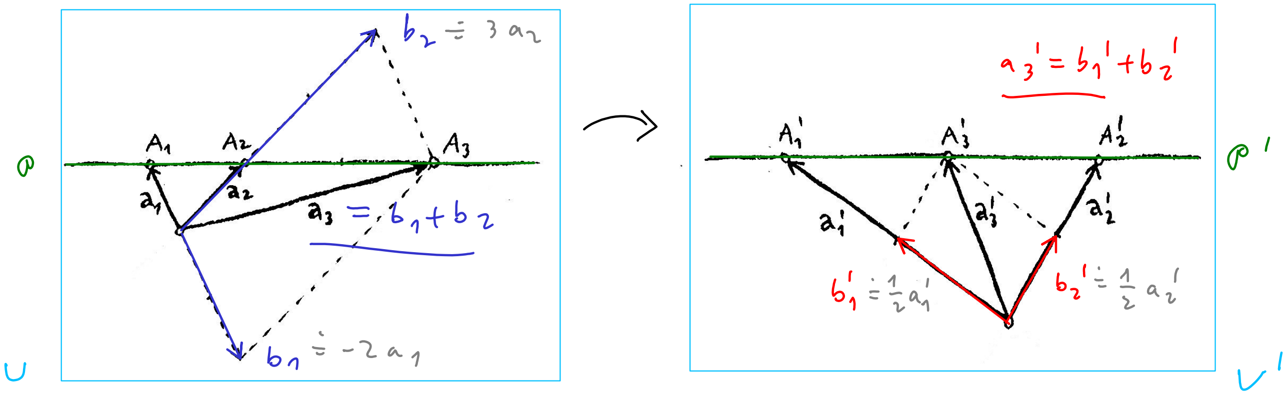
- Druhá "$\Longrightarrow$":

navzájem různými

f určeno $\boxed{\text{TŘEMI}}$ body v $\mathcal{P}$, tj. $\boxed{\text{TŘEMI}}$ vektory v U,

$\dim U = 2$ $\rightsquigarrow$ stačí $\boxed{\text{DVA}}$ NEZÁVISLÉ vektory ...

... tak, aby to sedělo $\boxed{\text{na TŘETÍM}}$!



$F : U \to U'$ určeno

obrazy $\boxed{\begin{array}{l} F(b_1) = b_1' \\ F(b_2) = b_2' \end{array}}$

$F(a_3) = F(b_1 + b_2) =$

$= b_1' + b_2' = a_3'$

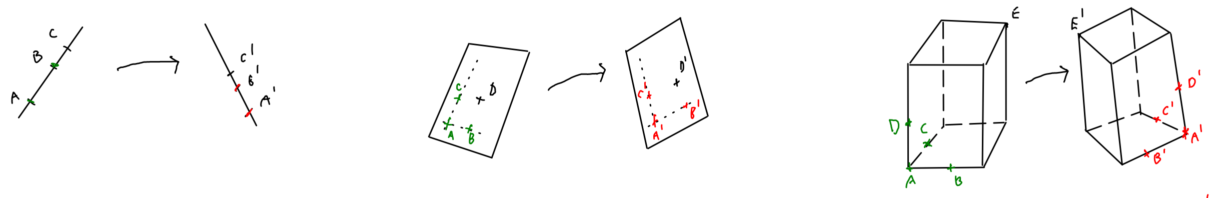
JAK TO JE S URČENOSTÍ?

- vzpomínáme

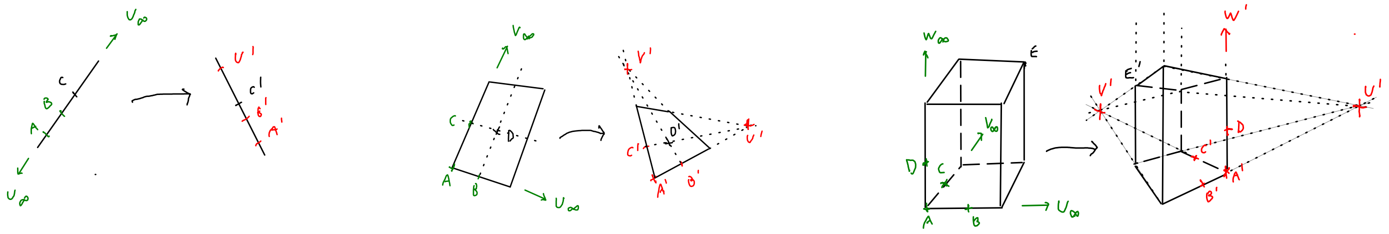
PROSTÉ zobrazení z prostoru dim $\boxed{}$ ...
a) AFINNÍ je určeno obrazy $\boxed{}$ bodů v obecné poloze,
b) PROJEKTIVNÍ ..... + navíc $\boxed{}$ odp. $\boxed{}$.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$

a)



b)



- s algebrou snadno rozumíme, že

PROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobrazení z prostoru dim $\boxed{}$
je určeno obrazy $\boxed{}$ bodů ...
... v "dostatečně obecné" poloze!

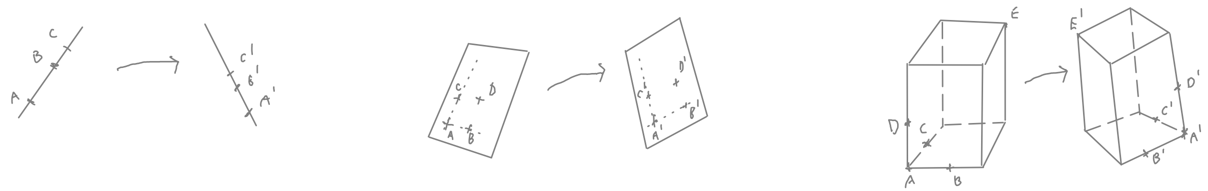
JAK TO JE S URČENOSTÍ?

- vzpomínáme

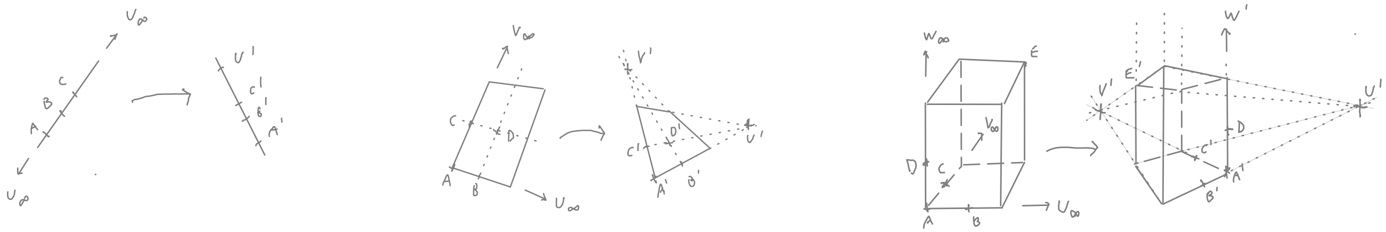
PROSTÉ zobrazení z prostoru dim $\boxed{n}$ ...
a) AFINNÍ je určeno obrazy $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze,
b) PROJEKTIVNÍ ...... + navíc $\boxed{n}$ odp. $\boxed{\text{ÚBĚŽNÍKY}}$.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$

a)



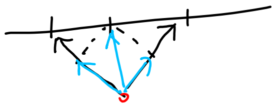
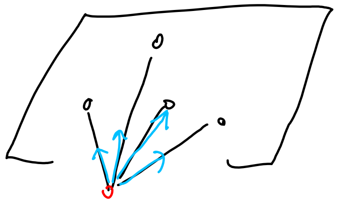
b)



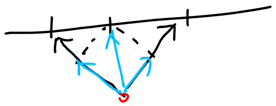
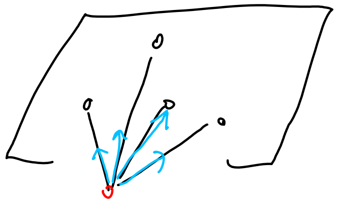
- s algebrou snadno rozumíme, že

PROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobrazení z prostoru dim $\boxed{n}$
je určeno obrazy $\boxed{n+2}$ bodů ...
... v "dostatečně obecné" poloze!

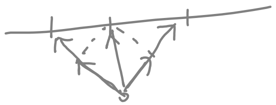
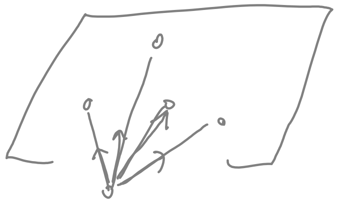
JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU?

- $n = 1$  3 body
- $n = 2$  4 body, z nichž žádné 3
- n obecně . . . bodů, z nichž žádných neleží v)

JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU ?

- $m = 1$  3 navzájem různé body
- $m = 2$  4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce
- m obecně . . . $m+2$ bodů, z nichž žádných $m+1$ neleží v NADROVINĚ, resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $m+1$ tvoří BÁZI a zbylý je jejich SOUČTEM.

JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU ?

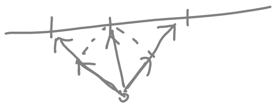
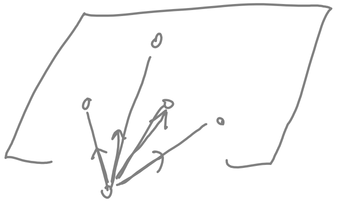
- $m = 1$  3 navzájem různé body
- $m = 2$  4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce
- m obecně ... $m+2$ bodů, z nichž žádných $m+1$ neleží v NADROVINĚ, resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $\boxed{m+1}$ tvoří $\boxed{\text{BÁZI}}$ a zbylý je jejich $\boxed{\text{SOUČTEM}}$.

JAK TO JE S DŮKAZEM ?

... ZÁKL. VĚTA + zobecnění diskuze pro $m = 1$:

- PROSTÉ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ určeno $\boxed{\quad\quad}$ $F : W \to W'$,
- LINEÁRNÍ $F : W \to W'$ určeno obrazem $\boxed{\quad\quad}$,
- PROSTÉ $\Rightarrow$ {body v "dost. obecné" poloze} $\mapsto$ {body $\boxed{\quad\quad}$},
- stačí vybrat tak, aby "SOUČET" $\mapsto$ $\boxed{\quad\quad}$.

JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU?

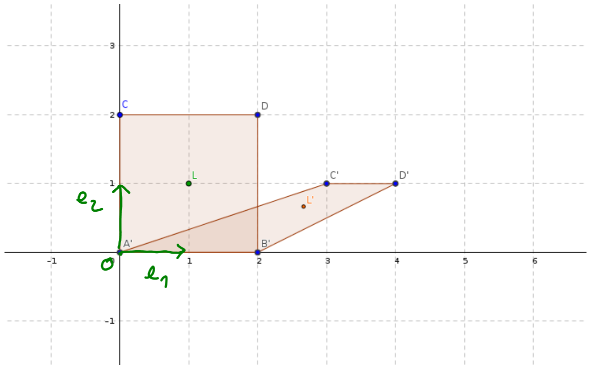
- $n = 1$  3 navzájem různé body
- $n = 2$  4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce
- n obecně ... $n+2$ bodů, z nichž žádných $n+1$ neleží v NADROVINĚ, resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $\boxed{n+1}$ tvoří $\boxed{\text{BÁZI}}$ a zbylý je jejich $\boxed{\text{SOUČTEM}}$.

JAK TO JE S DŮKAZEM?

... ZÁKL. VĚTA + zobecnění diskuze pro $n = 1$:

- PROSTÉ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ určeno $\boxed{\text{LINEÁRNÍM}}$ $F : W \to W'$,
- LINEÁRNÍ $F : W \to W'$ určeno obrazem $\boxed{\text{BÁZE}}$,
- PROSTÉ $\Rightarrow$ {body v "dost. obecné" poloze} $\longmapsto$ {body $\boxed{\text{v "dost. obecné" poloze}}$},
- stačí vybrat tak, aby "SOUČET" $\longmapsto$ $\boxed{\text{"SOUČET"}}$.

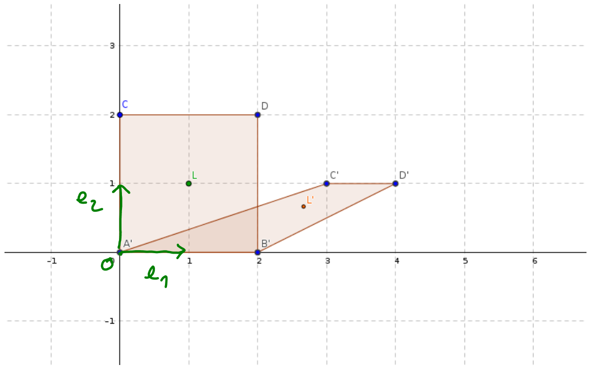
PŘÍKLAD — starý známý ... $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \longmapsto (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ \underline{b} & \underline{e} & \underline{h} \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ?$$

PŘÍKLAD – starý známý ... $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \longmapsto (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ?$$

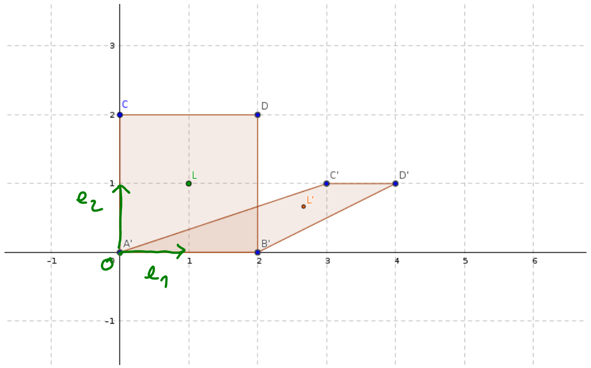
$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + g \\ 2b + h \\ 2c + i \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d + g \\ 2e + h \\ 2f + i \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

PŘÍKLAD – starý známý ... $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{pmatrix} \quad ?$$

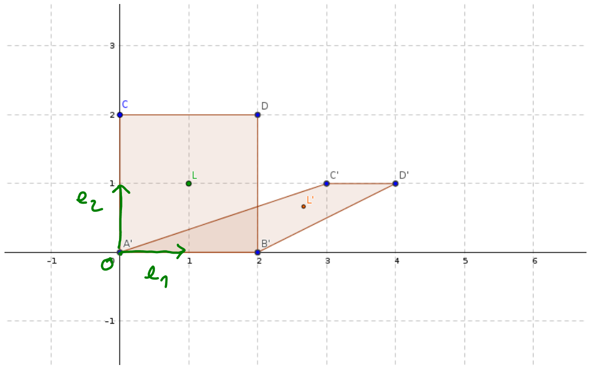
$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ $\quad \leftarrow k, l, m, n \in \mathbb{R}$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + g \\ 2b + h \\ 2c + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d + g \\ 2e + h \\ 2f + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

PŘÍKLAD — starý známý ... $n = 2$:



$A = (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A'$

$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$

$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$

$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ?$$

$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ ← $k, l, m, n \in \mathbb{R}$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

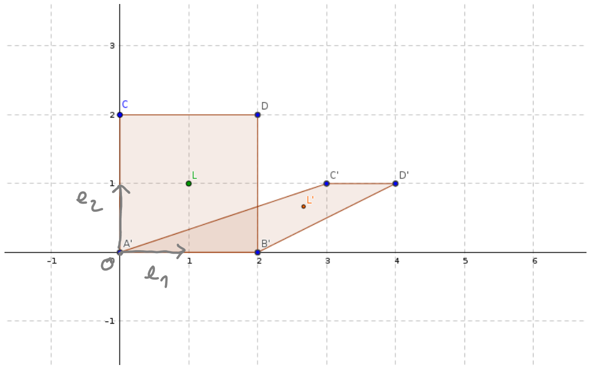
soustava lin. rovnic :

☐ rovnic

☐ neznámých

1 volný param..?

PŘÍKLAD — starý známý ... $n = 2$:



$$\left.\begin{aligned} A &= (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A' \\ B &= (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B' \\ C &= (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C' \\ D &= (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D' \end{aligned}\right\} \boxed{\quad\quad} \text{ bodů} \ldots$$

$$F = \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \; ? \quad \leftarrow \boxed{\quad\quad\quad\quad} \text{ neznámých}$$

$A \mapsto A' \ldots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ ← $\underline{k, l, m, n \in \mathbb{R}}$

... dalších $\boxed{\quad\quad}$

$B \mapsto B' \ldots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C' \ldots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D' \ldots \quad \left(\begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

⇝ soustava lin. rovnic :

$\boxed{12}$ rovnic

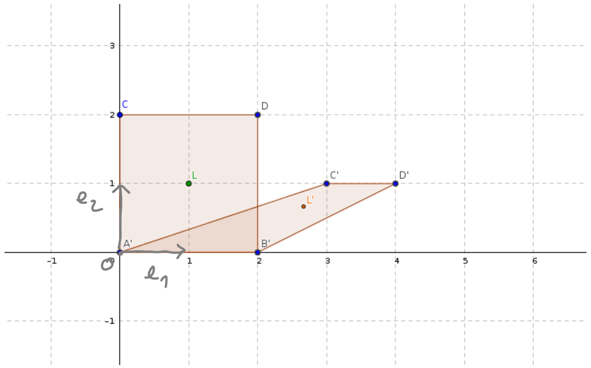
$\underbrace{\boxed{13}}$ neznámých

$13 - 12 = \underline{\underline{1}}$ volný param. ✓

OBECNĚ:

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \text{ rovnic} \\ &\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \text{ neznámých} \end{aligned}\right\} \text{ rozdíl} = 1 \; ?$$

PŘÍKLAD — starý známý ... $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

} $\boxed{n+2}$ bodů ...

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ? \quad \leftarrow \boxed{(n+1).(n+1)} \text{ neznámých}$$

$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

← $k, l, m, n \in \mathbb{R}$

... dalších $\boxed{n+2}$

⟶ soustava lin. rovnic:

$\boxed{12}$ rovnic

$\boxed{13}$ neznámých

$13 - 12 = \underline{\underline{1}}$ volný param. ✓

OBECNĚ:

$\boxed{(n+1)\cdot(n+2) = n^2+3n+2}$ rovnic

$\boxed{(n+1)\cdot(n+1)+(n+2) = n^2+3n+3}$ neznámých

} rozdíl $= \underline{\underline{1}}$ ✓