JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

• OBECNĚ

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.

$\Updownarrow$

* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \dim n+1 \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \dim n \end{tikzcd}$$

• ALGEBRA

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. $\boxed{\qquad}$
* char. vektory odp. číslu λ tvoří $\boxed{\qquad}$, jehož dimenze $\boxed{\quad}$ násobnost kořene λ
* $n+1$ = LICHÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN $\boxed{\qquad}$ kořen
* DETERMINANT / STOPA matice F = = $\boxed{\qquad}$ / $\boxed{\qquad}$ všech char. čísel vč. násobností
* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

- **OBECNĚ**

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.

* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

$$\begin{array}{ccccl} W & \xrightarrow{F} & W & \cdots & \dim n+1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{P} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{P} & \cdots & \dim n \end{array}$$

- **ALGEBRA**

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. $\boxed{\text{NEZÁVISLÉ}}$

* char. vektory odp. číslu λ tvoří $\boxed{\text{VEKT. PODPROSTOR}}$, jehož dimenze $\boxed{\leq}$ násobnost kořene λ

* $n+1$ = LICHÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN $\boxed{\text{reálný}}$ kořen

* DETERMINANT / STOPA matice F =
= $\boxed{\text{součin}}$ / $\boxed{\text{součet}}$ všech char. čísel vč. násobností

* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

- **OBECNĚ**

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.
* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

GEOMETRIE

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \dim n+1 \\
P \arrow[r, "f"'] & P & \cdots \dim n
\end{tikzcd}
$$

- **ALGEBRA**

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. $\boxed{\text{NEZÁVISLÉ}}$ (a)
* char. vektory odp. číslu λ tvoří $\boxed{\text{VEKT. PODPROSTOR}}$, jehož dimenze $\boxed{\leq}$ násobnost kořene λ (b)
* $n+1$ = LICHÉ $\Longrightarrow$ ASPOŇ JEDEN $\boxed{\text{reálný}}$ kořen (c)
* DETERMINANT / STOPA matice F = = $\boxed{\text{součin}}$ / $\boxed{\text{SOUČET}}$ všech char. čísel vč. násobností
* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- PROJEKTIVNÍ

  * pevné body odp. RŮZNÝM char. číslům jsou

  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří

  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN !

  * apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- PROJEKTIVNÍ

  * pevné body odp. RŮZNÝM char. číslům jsou $\boxed{\text{RŮZNÉ}}$ (viz a)

  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří $\boxed{\text{proj. PODPROSTOR}}$ (viz b)

  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN $\boxed{\text{pevný bod}}$! (viz c)

  * apod.

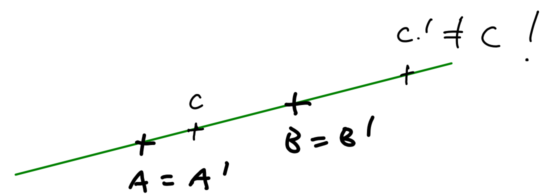
JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **PROJEKTIVNÍ**

  * pevné body odp. RŮZNÝM char. číslům jsou $\boxed{\text{RŮZNÉ}}$ (viz a)
  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří $\boxed{\text{proj. PODPROSTOR}}$ (viz b)
  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN $\boxed{\text{pevný bod}}$! (viz c)
  * izolovaných pevných bodů není víc než $\boxed{n+1}$! (viz a)
  * apod.

- **POZN.**

  * pro obecné PROJEKTIVNÍ vskutku může být



JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **AFINNÍ**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}\iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \longrightarrow \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

  * VŽDY ASPOŇ JEDEN !

  * VLASTNÍ pevné body tvoří !

  * apod.

- **POZN.**

  * VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\Longrightarrow$ všechny

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **AFINNÍ**

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \rightarrow \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

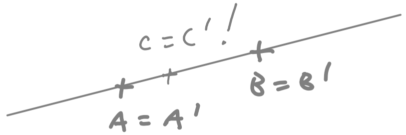
  * VŽDY ASPOŇ JEDEN $\boxed{\qquad\qquad}$!

    ... char. polynom $= \det\begin{pmatrix} *-\lambda & * & * \\ * & *-\lambda & * \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} *-\lambda & * \\ * & *-\lambda \end{pmatrix}$

  * VLASTNÍ pevné body tvoří $\boxed{\qquad\qquad}$!

    ... $\begin{array}{cc} K & L \end{array}$ $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \dots \iff (K-E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)$

    ... resp.



  * apod.

- **POZN.**

  * VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\Rightarrow$ všechny $\boxed{\qquad\qquad}$

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

• **AFINNÍ**

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \longrightarrow \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

* VŽDY ASPOŇ JEDEN $\boxed{\text{pevný bod}}$!

... char. polynom $= \det\begin{pmatrix} *-\lambda & * & * \\ * & *-\lambda & * \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} *-\lambda & * \\ * & *-\lambda \end{pmatrix}$

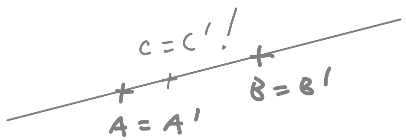
$\leadsto \lambda = 1$ je $\mathbb{R}$ - kořen

* VLASTNÍ pevné body tvoří $\boxed{\text{af. PODPROSTOR}}$!

$$\begin{array}{c} \quad K \qquad\quad L \\ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \dots \iff (K-E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)$$

$\longleftarrow$ soustava (nehom.) lin. rovnic

... resp.



$\longleftarrow$ poměry

* apod.

• **POZN.**

* VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\Longrightarrow$ všechny $\boxed{\text{NEVLASTNÍ}}$

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **PODOBNÉ**

  resp. SHODNÉ

  $k = 1$

$$\overbrace{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}^{D}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D^T \cdot D = k^2 E$, k = koef. podobnosti

$\Updownarrow$

ON báze e_1, e_2 $\longrightarrow$ k - násobek ON báze e_1', e_2'

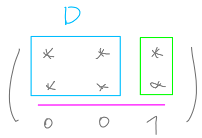
* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \boxed{\quad}$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou $\boxed{\quad}$

* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ $\boxed{\quad}$ VLASTNÍ pevný bod!

* apod.

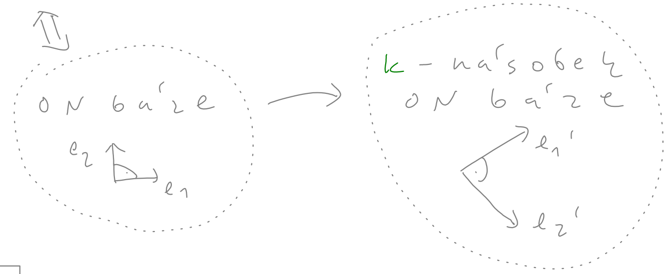
JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE



• **PODOBNÉ**

resp. **SHODNÉ** ← $k = 1$

$D^T \cdot D = k^2 E$, k = koef. podobnosti

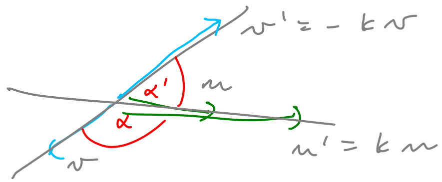


* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \boxed{\quad}$

  ... $\|u'\| = k\,\|u\|$ pro lib. $u \in V$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou $\boxed{\quad}$

  ... různé $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = +k$, $\lambda_2 = -k$ ...



* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ $\boxed{\quad}$ VLASTNÍ pevný bod !

  ... VLASTNÍ pevné body $\Longrightarrow$ soust. $(k - E) \cdot \binom{x_1}{x_2} = -(t)$

  ... neshodné $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\det(k - E) \neq 0$

* apod.

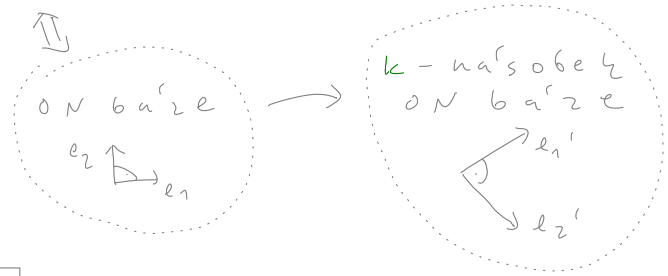
JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

• **PODOBNÉ**

resp. **SHODNÉ** ← $k = 1$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}_{D} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D^T \cdot D = k^2 E$, k = koef. podobnosti;

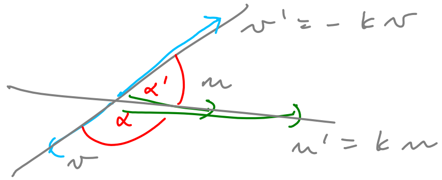


* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \boxed{\pm k}$

... $\|u'\| = k\,\|u\|$ pro lib. $u \in V$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou **KOLMÉ**

... různé $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = +k$, $\lambda_2 = -k$ ...



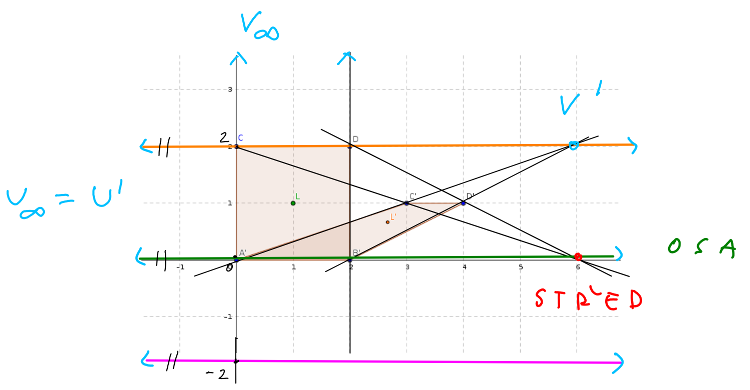
* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ **PRÁVĚ JEDEN** VLASTNÍ pevný bod !

... vlastní pevné body $\Longrightarrow$ soust. $(K - E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)$

... neshodné $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\det(K - E) \neq 0$

* apod.

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

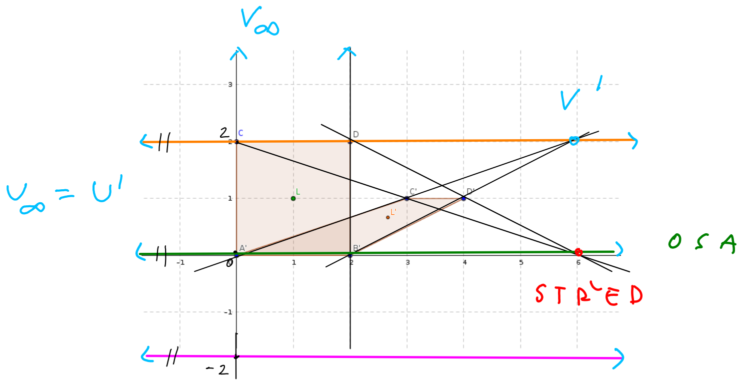
násobnost 3

* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \text{OSA}$$

dim: $\boxed{}$!

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

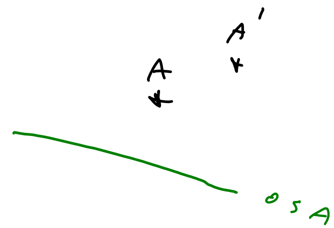
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \text{OSA}$$

dim: $\boxed{2 \neq 3}$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM?

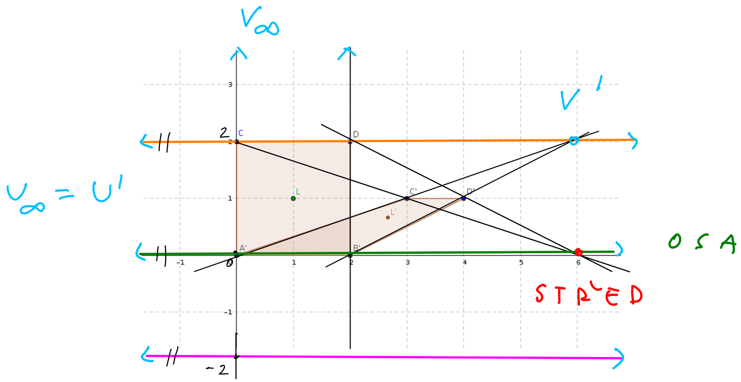
JE TAM . . .

. . . a umíme to ZDŮVODNIT:



- lib. bod A mimo osu $\rightsquigarrow A' \neq A$

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

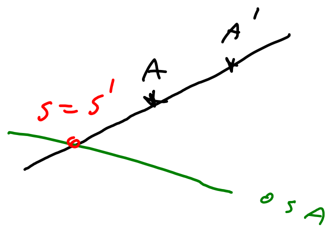
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \text{OSA}$$

dim: $\boxed{2 \neq 3}$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM?

JE TAM ...

... a umíme to ZDŮVODNIT:

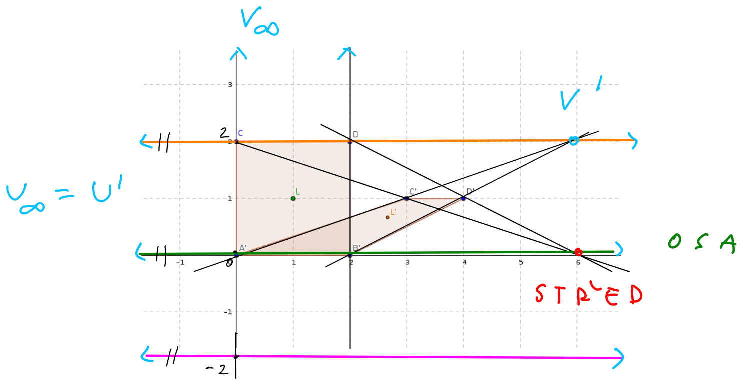


• lib. bod A mimo osu $\rightsquigarrow A' \neq A$

$\rightsquigarrow s$ ... průnik přímky $a = AA'$ s osou

$\rightsquigarrow s' = s \rightsquigarrow$ obraz $\boxed{}$ $\rightsquigarrow s =$ STŘED ?

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

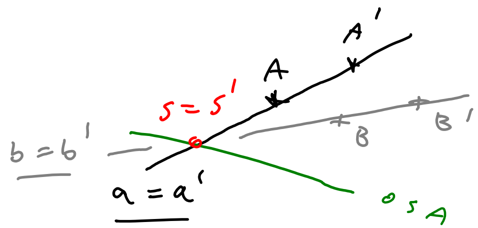
* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \underline{\text{OSA}}$$

dim: $\boxed{2 \neq 3}$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM ?

JE TAM . . .



. . . a umíme to ZDŮVODNIT :

- lib. bod A mimo osu $\rightsquigarrow$ $A' \neq A$

  $\rightsquigarrow$ s ... průnik přímky $a = AA'$ s osou

  $\rightsquigarrow$ $s' = s$ $\rightsquigarrow$ obraz $\boxed{a' = a}$ $\rightsquigarrow$ s = STŘED ?

- lib. jiný bod B mimo osu $\rightsquigarrow$ tentýž STŘED S !

  (jinak průnik $a \cap b$ pevný bod mimo osu ... SPOR)

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

JE TAM . . .

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT :

- S = STŘED $\iff$ pro lib. x . . . S, x, x' $\boxed{}$

$\iff$ . . . hodnost $\begin{array}{ccc} S & x & x' \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) = \boxed{}$

$\iff$ . . . det $\begin{array}{ccc} S & x & x' \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) = \boxed{}$

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix}$$

$X \qquad X'$

JE TAM . . .

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT :

- S = STŘED $\iff$ pro lib. X . . . S, X, X' $\boxed{\text{KOLINEÁRNÍ}}$

$\iff$ . . . hodnost $\begin{pmatrix} S & X & X' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \boxed{2}$

$\iff$ . . . det $\begin{pmatrix} S & X & X' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \boxed{0}$

- $$\det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & x_1+3x_2 \\ s_2 & x_2 & x_2 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2+x_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & 3x_2 \\ s_2 & x_2 & 0 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}s_1x_2^2 + 3s_2x_2x_0 - 3s_0x_2^2 - \frac{1}{2}s_2x_1x_2$$

$$= \left(\frac{1}{2}s_1 - 3s_0\right)x_2^2 + 3s_2x_2x_0 - \frac{1}{2}s_2x_1x_2$$

Tedy det . . . = 0 pro lib. X $\iff$ $\boxed{}$

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix}$$

X $\qquad$ X'

JE TAM . . .

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT :

- S = STŘED $\iff$ pro lib. X . . . S, X, X' $\boxed{\text{KOLINEÁRNÍ}}$

$\iff$ . . . hodnost $\begin{array}{ccc} S & X & X' \\ \end{array}\left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) = \boxed{2}$

$\iff$ . . . det $\begin{array}{ccc} S & X & X' \\ \end{array}\left(\begin{array}{c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) = \boxed{0}$

- $\underbrace{\det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & x_1+3x_2 \\ s_2 & x_2 & x_2 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2+x_0 \end{pmatrix}}$ $= \det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & 3x_2 \\ s_2 & x_2 & 0 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}s_1 x_2^2 + 3 s_2 x_2 x_0 - 3 s_0 x_2^2 - \frac{1}{2} s_2 x_1 x_2$

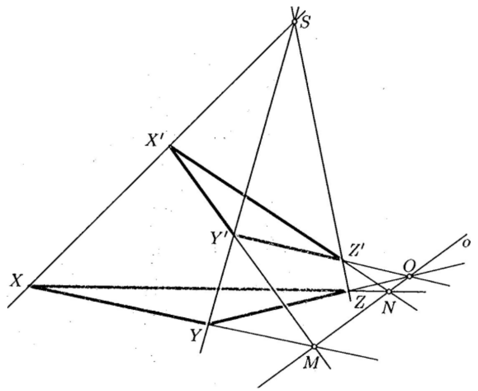
$= \left(\frac{1}{2}s_1 - 3s_0\right) x_2^2 + 3 s_2 x_2 x_0 - \frac{1}{2} s_2 x_1 x_2$

Tedy det . . . = 0 pro lib. X $\iff$ $\boxed{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}s_1 - 3s_0 &= 0 \\ 3s_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}s_2 &= 0 \end{aligned}}$ ← soustava (hom.) lin. rovnic !

$\iff$ $S = (6 : 0 : 1)$ ← souhlasí s obr. ✓

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ? – VZPOMÍNÁME DIM 2

- Věta
  Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\Longleftrightarrow$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



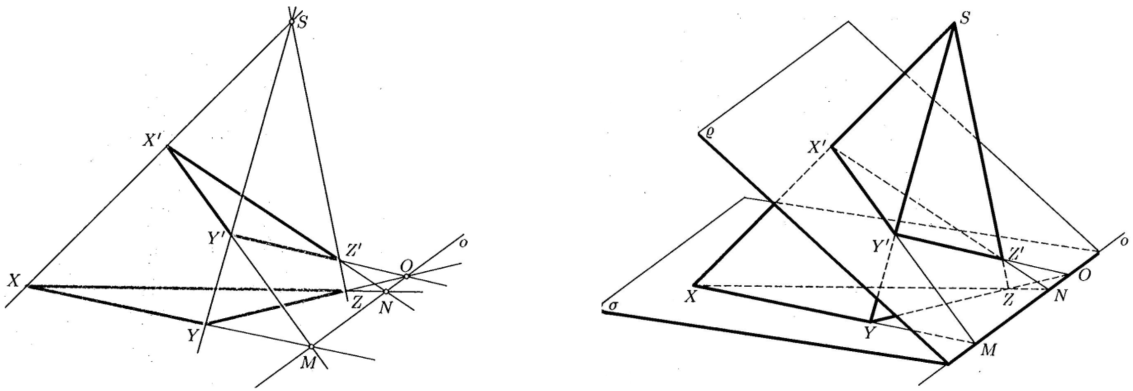
Desarguesova věta

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ?

— VZPOMÍNÁME DIM 2

- Věta

  Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

- Důsl.

  proj. transf. v rovině má osu $\iff$ má střed

  neidentická bijektivní

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — NOVĚ

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

mezi proj. prostory platí:

(1) f má (NAD)OSU $\Longleftrightarrow$ f má STŘED.

(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — NOVĚ

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro $\boxed{\text{neid. bijektivní}}$ PROJEKTIVNÍ $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ $\underline{n}$ mezi proj. prostory $\boxed{\text{DIM} \geq 2}$ platí:

(1) f má (NAD)OSU $\iff$ f má STŘED.

(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

(1) směr "$\Rightarrow$"

dim $\boxed{}$ dim $\boxed{}$

* $\mathcal{O}$ = NADOSA ... vekt. nadrovina

... char. číslo násobnosti aspoň $\boxed{}$ ... ozn. $\underline{\lambda}$

$\rightsquigarrow$ ex. další $\boxed{}$ kořen ... ozn. $\underline{\mu}$

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — NOVÉ

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro $\boxed{\text{neid. bijektivní}}$ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ mezi proj. prostory $\boxed{\mathrm{DIM} \geq 2}$ platí:

(1) f má (NAD)OSU $\Longleftrightarrow$ f má STŘED.

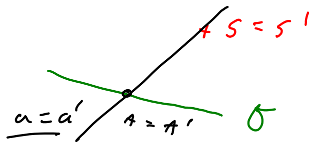
(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

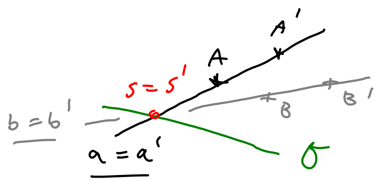
(1) směr "$\Rightarrow$"

* σ = NADOSA ... vekt. nadrovina (dim $\boxed{n-1}$)
  ... char. číslo násobnosti aspoň $\boxed{n}$ (dim $\boxed{n}$) ... ozn. λ
  $\leadsto$ ex. další $\boxed{\mathbb{R}-}$kořen ... ozn. μ

* $\mu \neq \lambda$ $\leadsto$ STŘED $\notin$ NADOSE



* $\mu = \lambda$ $\leadsto$ STŘED $\in$ NADOSE



JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? – NOVĚ

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro $\boxed{\text{neid. bijektivní}}$ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mezi proj. prostory $\boxed{\text{DIM} \geq 2}$ platí:

(1) f má (NAD)OSU $\iff$ f má STŘED.

(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

(1) směr "$\Leftarrow$"

... viz hlavní text

(2) Předp. víc nados, resp. středů

$\rightsquigarrow$ SPOR ...

118 V Geometrická zobrazení blížeji

17.2 Základní transformace obecně

V předchozím přehledu základních transformací v rovině jsme začali postřehem, že každá taková transformace má osu a střed. V tomto odstavci ukážeme, že existence těchto prvků spolu velmi úzce souvisí. Úvodní definice vypadají takto:

Definice. *Střed* projektivní transformace je samodružný bod takový, že každá přímka procházející tímto bodem je samodružná.

Nadosa projektivní transformace je nadrovina samodružných bodů.

Projektivní transformace, která má nadosu, se nazývá *základní transformace*.

Jinak můžeme říct, že základní transformace jsou neidentické transformace s maximálním možným podprostorem samodružných bodů.

Nejzákladnější transformací v obecném projektivním prostoru je **nadosová kolineace** a podobně modifikujeme ostatní pojmenování z předchozího odstavce. Základní singulární transformací je promítání do nadroviny. Klasifikace základních transformací je až na tyto změny v názvosloví úplně stejná jako v tab. 17.2, proto se jí dále nezabývat nebudeme.

Místo toho dokážeme dvě obecná tvrzení, jež jsme zatím přehlíželi. Jedná se o působivé zobecnění **Desarguesovy věty**:

Věta. *Předpokládejme, že f je neidentická **regulární** projektivní transformace. Potom platí:*

(1) f má nadosu právě tehdy, když f má střed.

(2) f má buď právě jednu nadosu (a právě jeden střed), nebo žádnou nadosu (a žádný střed).

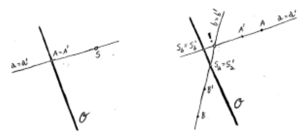
Nejdřív trochu značení: dimenze projektivního prostoru je n, tzn. dimenze zastupujícího vektorového prostoru je $n+1$ (což je také stupeň charakteristického polynomu (16.9)).

Důkaz. (1) Nadosa $\mathcal{O}$ je nadrovina samodružných bodů, jež odpovídá všem řešením soustavy (16.8). Odpovídající charakteristické číslo λ proto musí být kořenem charakteristického polynomu s násobností alespoň n. Protože má tento polynom reálné koeficienty a známe n jeho reálných kořenů, musí mít ještě jeden reálný kořen, který si označíme třeba μ.

(a) Pokud je $\mu \neq \lambda$, pak charakteristický vektor odpovídající μ je lineárně nezávislý vzhledem ke všem vektorům odpovídajícím číslu λ. To znamená, že tento vektor reprezentuje samodružný bod S, který neleží v nadose $\mathcal{O}$. Libovolná přímka jdoucí bodem S protíná nadrovinu $\mathcal{O}$ v bodě, který je samodružný. Proto je libovolná přímka jdoucí bodem S samodružná, tudíž S je střed.

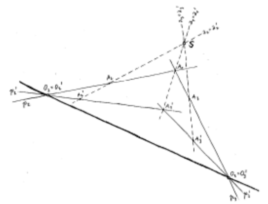
(b) Pokud je $\mu = \lambda$, pak střed musí ležet v nadose $\mathcal{O}$ a v následujícím jej vymezíme. Uvažme libovolný bod $A \notin \mathcal{O}$ a jeho obraz A'. Protože transformace není identita, platí $A' \neq A$ a tyto dva body určují přímku, kterou označíme a. Přímka a protíná nadosu $\mathcal{O}$ v samodružném bodě S_a, a proto je a samodružná. Podobně pro libovolný jiný bod $B \notin \mathcal{O}$ platí, že $b = BB'$ je samodružná přímka; průsečík b s nadosou $\mathcal{O}$ označíme S_b. Protože a i b jsou samodružné přímky, je jejich průsečík samodružným bodem, a proto musí ležet v nadose $\mathcal{O}$. Odtud plyne, že $S_a = S_b$ je hledaný střed.

17 Základní transformace 119



Obrázek 17.11: Pokud existuje nadosa $\mathcal{O}$, potom existuje střed: (a) $S \notin \mathcal{O}$, (b) $S \in \mathcal{O}$ jakožto společný bod $S_a = S_b = S_b' = S_a'$.

Naopak, předpokládejme, že S je středem transformace f. Uvažme $n+1$ libovolných bodů $A_1, A_2, \ldots$ takových, že spolu s bodem S jsou v nejobecnější možné poloze (tzn. žádná $(n+1)$-tice neleží v jedné nadrovině). Podle předpokladu se aspoň jeden z těchto bodů musí zobrazit někam jinam než sám na sebe; řekněme, že $A_1' \neq A_1$. Nyní postupně uvažujeme dvojice přímek $p_i = A_1A_i$ a $p_i' = A_1'A_i'$, kde $i = 2, 3, \ldots$. Protože každý bod A_i' leží na přímce SA_i, patří každá dvojice přímek p_i, p_i' do nějaké roviny. Proto se p_i a p_i' protínají, a to v samodružném bodě, který označíme O_i. Z úvodních předpokladů lze vydedukovat, že body $O_2, O_3, \ldots$ tvoří nadrovinu $\mathcal{O}$, jejíž každý bod je samodružný. Proto je $\mathcal{O}$ nadosou.

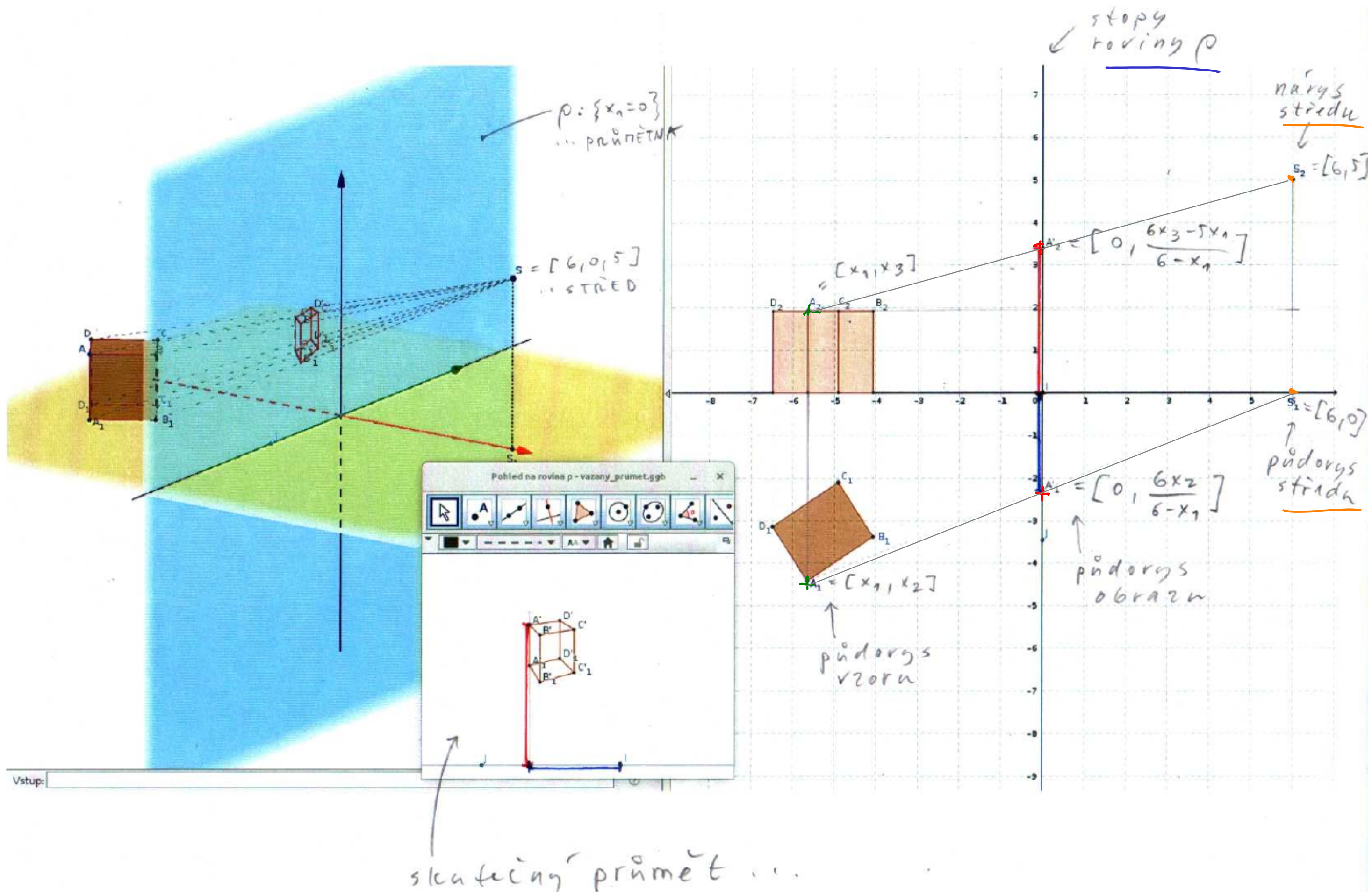


Obrázek 17.12: Pokud existuje střed S, potom existuje nadosa $\mathcal{O}$ jakožto nadrovina určená body $O_1, O_2, \ldots$

(2) Přemýšlejme, co by se stalo, kdyby transformace f měla dvě různé nadosy: Uvažme dvě libovolné přímky a a b jdoucí libovolným bodem C, který neleží ani v jedné nadose. Jak a, tak b by protínala každou z nados v samodružných bodech, proto by jak a, tak b byla samodružnou přímkou. Odtud by plynulo, že C by byl samodružný bod, což by v důsledku znamenalo, že transformace by byla identická.

Podobně, se by se dalo zdůvodnit, že kdyby transformace měla dva různé středy, pak by to nutně byla identita, což by opět bylo ve sporu s předpokladem věty. □

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

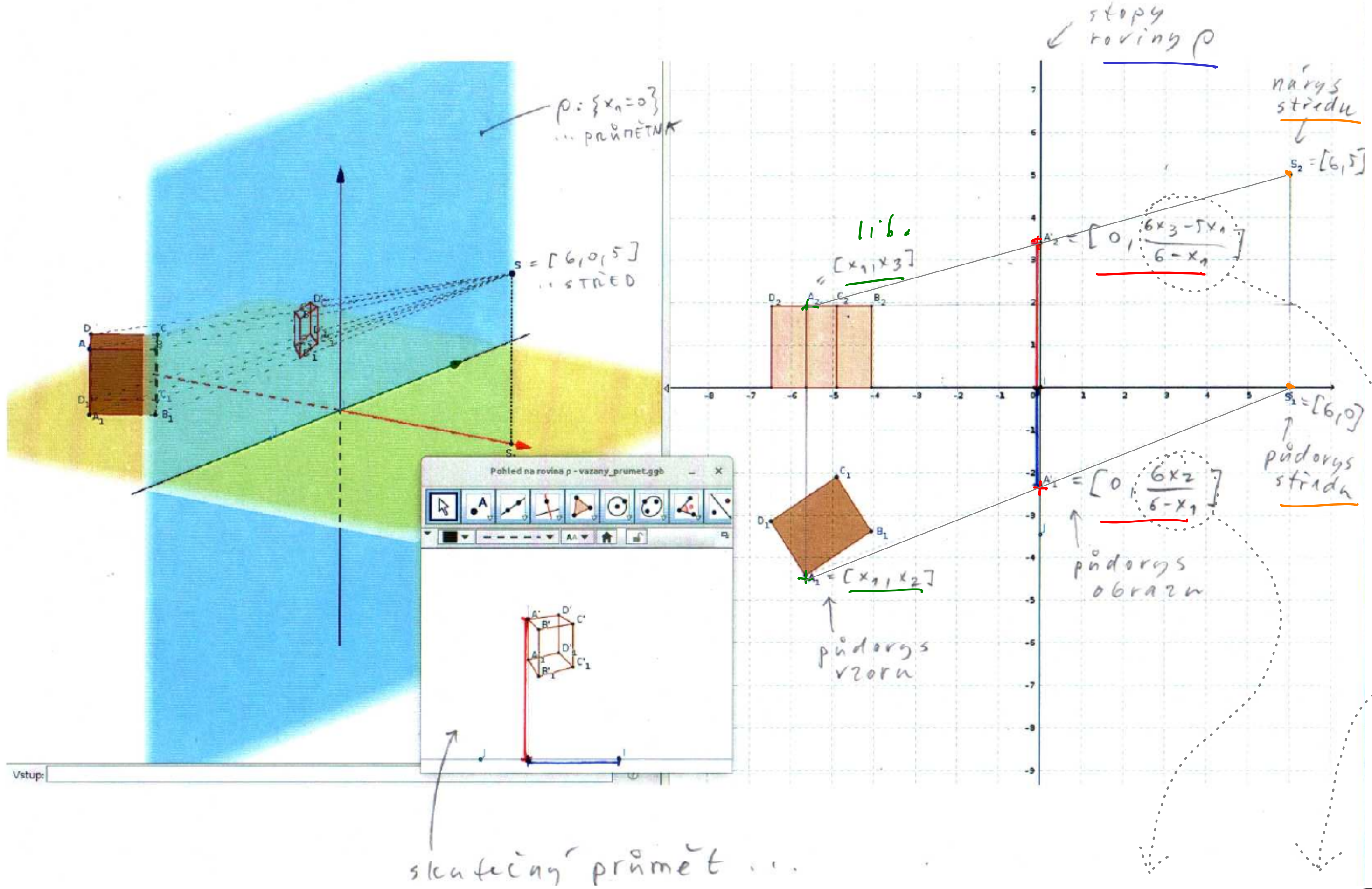


STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6, 0, 5]$
do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

- afinní souř. ... $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto [\quad , \quad , \quad]$
- homogenní souř ... $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (\quad : \quad : \quad : \quad)$
- matice ..... $F = \left(\quad \right)$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

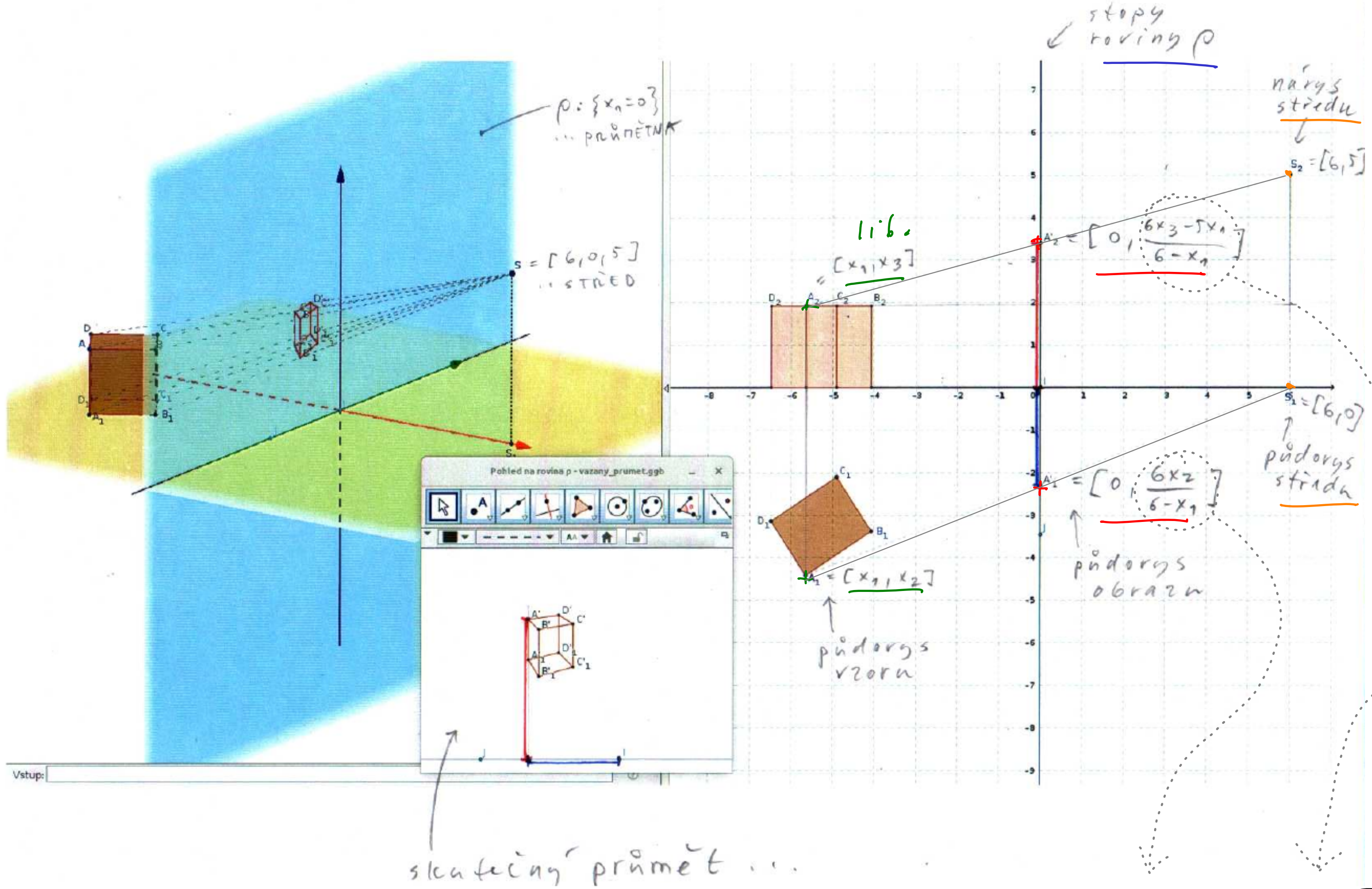


STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6,0,5]$
do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

- afinní souř. ... $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1}\right]$ $(x_1 \neq 6)$
- homogenní souř ... $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (\quad : \quad : \quad : \quad)$
- matice ..... $F = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD



STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6, 0, 5]$

do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

- afinní souř. ... $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6-x_1}\right]$ $(x_1 \neq 6)$
- homogenní souř ... $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : 6x_0 - x_1)$
- matice ..... $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ $\iff$ hodnost F $\boxed{\quad}$

  $\iff$ F má $\boxed{\quad}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots$$

- Tedy DEF. OBOR $f = \mathcal{P} \setminus \boxed{\quad}$!

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ ⇝ hodnost F $\boxed{\text{není MAX}}$

  ⇝ F má $\boxed{\text{NETRIV. JÁDRO}}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{l} x_1 = 6x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5x_0 \\ x_0 = 1 : 6 \end{array}$$

⇝ tj. bod $(6 : 0 : 5 : \underline{1}) = S$

- Tedy DEF. OBOR f = $\mathcal{P} \setminus \boxed{\{S\}}$! ← STŘED promítání V

- Pozn. ... f = PROJEKCE ⇝ $f \circ f = \boxed{}$ ⇝ $F \cdot F = \boxed{}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \dots$$

- OBRAZ f = určen "sloupci F" = ...

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ $\rightsquigarrow$ hodnost F $\boxed{\text{není MAX}}$

  $\rightsquigarrow$ F má $\boxed{\text{NETRIV. JÁDRO}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{l} x_1 = 6x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5x_0 \\ x_0 = 1 \text{ či } 6 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ tj. bod $(6 : 0 : 5 : 1) = S$

- Tedy DEF. OBOR f = $\mathcal{P} \setminus \boxed{\{S\}}$! $\leftarrow$ STŘED promítání ✓

- Pozn. ... f = PROJEKCE $\rightsquigarrow$ $f \circ f = \boxed{f}$ $\rightsquigarrow$ $F \cdot F = \boxed{kF}$, $k \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \dots = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad ✓$$

- OBRAZ f = určen "sloupci F" = ... = $\{x_1 = 0\}$ $\leftarrow$ PRŮMĚTNA ρ ✓

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? – OBECNĚ

- neprosté projektivní zobr. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$

  . na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. $\subseteq W$ ...

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

  ... uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s !

- s "ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme !

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ $\boxed{\text{NENÍ def.}}$ na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. $\boxed{\text{jádru } \ker F}$ $\subseteq W$ ...

  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

  ... uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s !

- s „ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme !

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$

  NENÍ def. na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. jádru $\ker F \subseteq W$ ..

  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

  ... NEROZUMÍME uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s URČENOSTÍ !

☹

- s "ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme !

$\square$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? – OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$
  $\boxed{\text{NENÍ def}}$. na celém $\mathcal{P}$!
  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. $\boxed{\text{jádru } \ker F} \subseteq W$ ...
  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

  ... $\boxed{\text{NEROZUMÍME}}$ uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s $\boxed{\text{URČENOSTÍ}}$!

- S "ne příliš degenerovanými" zobrazeními
  ... se vždy nějak domluvíme !
  ... zejména v AFINNÍM případě