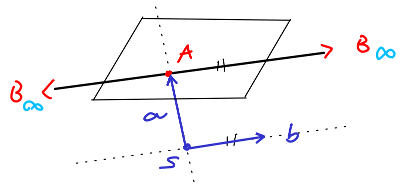
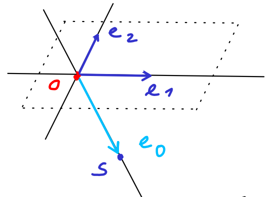
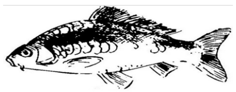
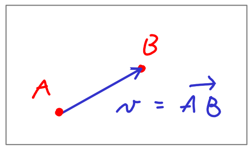
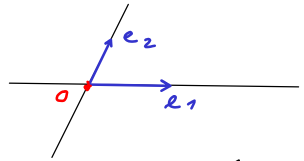
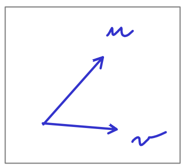
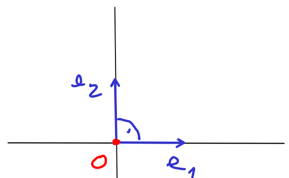
Geometrie 3

Obsah

Poslední aktualizace 10. dubna 2021
`https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2021/MA0013/index.qwarp`

ÚVODNÍ PŘEHLED

DOPLNÍME

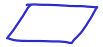
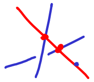
ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
 projektivní	polohové	projektivní	$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$  pomocí $W \supset V$	homogenní souř.  = rozšířené
 afinní		afinní	$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$  body ...... vektor	afinní souř.  = libovolné
 ekvi-afinní  podobná  shodná	metrické	eukleidovské	$\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + skalární součin  ...... $u \cdot v$ vektory ...... číslo	kartézské souř.  = orto-normální

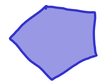
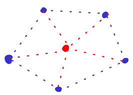
UMÍME

AFINNÍ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod, přímka , rovina 
- rovnoběžnost , poměry 
- příčky  a příčkové plochy 
- uspořádání 

, úsečky , konvexní množiny 
- těžiště 

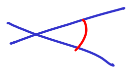
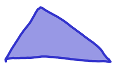
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecné af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, příčky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. a pod.

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ EUKL. POJMY ...

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

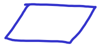
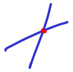
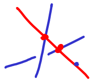
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
- vzdálenost
- odchylka

  ob. podprostorů
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

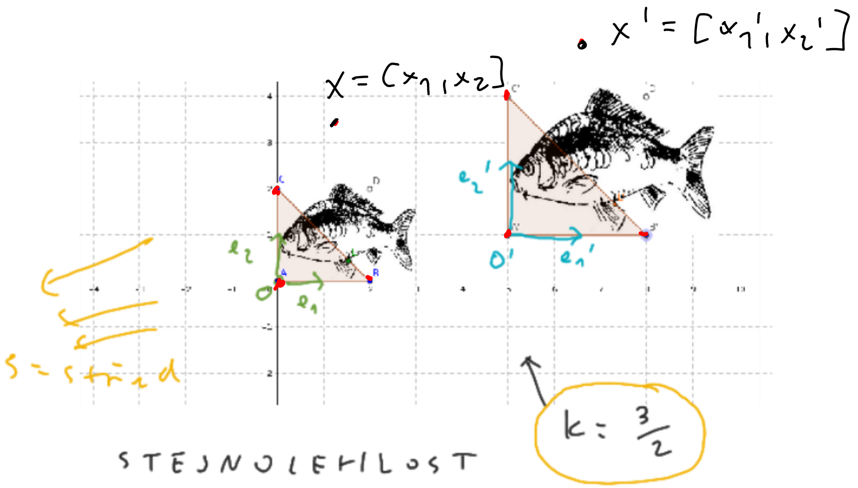
TYPICKÉ PROJ. POJMY ...

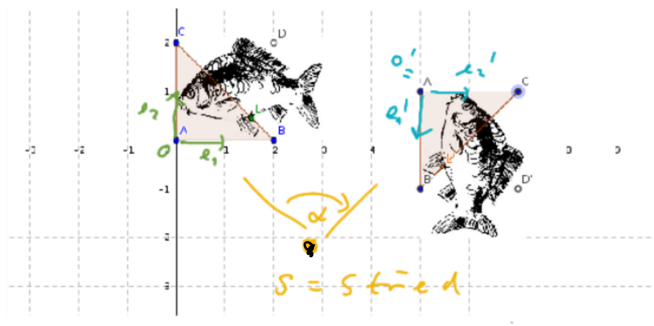
- bod ·, přímka /, rovina  UMÍME
- incidence , dvojpoměry 
- příčky  a příčkové plochy 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- **projektivní rozšíření**, homogenní souřadnice DOPLNÍME
- proj. pod-prostory a vzájemné polohy
- proj. zobrazení, **ZÁKLADNÍ VĚTA**, zákl. transformace

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — OPAKOVÁNÍ





Afinní zobr. v rovině je určeno ...

STEJNOLEHLOST

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [8,1]$
$[0,2] \mapsto [5,4]$

OTÁČENÍ ...

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [5,-1]$
$[0,2] \mapsto [7,1]$

... třemi body

g

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}}_{K} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{M}$$

$e_1' = k e_1$ $e_2' = k e_2$ o'

h

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{N}$$

$e_1' = -e_2$ $e_2' = e_1$ o'

... předpisem

S = STŘED $\Longrightarrow$ $S' \doteq S$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$ SOUSTAVA LIN. ROVNIC

... význačnými prvky

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= 3/2\, x_1 + 5 \\ x_2' &= 3/2\, x_2 + 1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{G} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}$$!

obraz vzor

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{H} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}$$!

... JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ!

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU?

• SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ $\longleftrightarrow$ NÁSOBENÍ MATIC

$$f = h \circ g \qquad \longleftrightarrow \qquad F = H \cdot G$$

$$L:\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \xmapsto{\;g\;} \left[\overset{K}{\boxed{\begin{pmatrix}3/2&0\\0&3/2\end{pmatrix}}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\overset{M}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}}\right] \xmapsto{\;h\;} \overset{L}{\boxed{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}}\left[\overset{K}{\boxed{\begin{pmatrix}3/2&0\\0&3/2\end{pmatrix}}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\overset{M}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}}\right]+\overset{N}{\boxed{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}} =$$

$$= \underset{L\cdot K}{\boxed{\begin{pmatrix}0&3/2\\-3/2&0\end{pmatrix}}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}}_{\boxed{\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}}\ L\cdot M+N}$$

$$P:\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} \xmapsto{\;g\;} \underset{G}{\overset{K\qquad M}{\left(\begin{array}{cc|c}3/2&0&5\\0&3/2&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} \xmapsto{\;h\;} \underset{H}{\overset{L\qquad N}{\left(\begin{array}{cc|c}0&1&5\\-1&0&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right)}}\cdot\underset{G}{\overset{K\qquad M}{\left(\begin{array}{cc|c}3/2&0&5\\0&3/2&1\\\hline 0&0&1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix} =$$

$$= \underset{H\cdot G}{\overset{L\cdot K\qquad L\cdot M+N}{\left(\begin{array}{cc|c}0&3/2&6\\-3/2&0&-4\\\hline 0&0&1\end{array}\right)}}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline 1\end{pmatrix}$$

PLATÍ OBECNĚ ✓

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU?

- PEVNÉ BODY $\longleftrightarrow$ CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY

$$g(x) = x \quad \longleftrightarrow \quad G \cdot X = \lambda X$$

$\leftarrow \lambda \in \mathbb{R}$

STEJNOLEHLOST:

soustava LINEÁRNÍCH rovnic (nehomog.)

$$L: \quad g(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

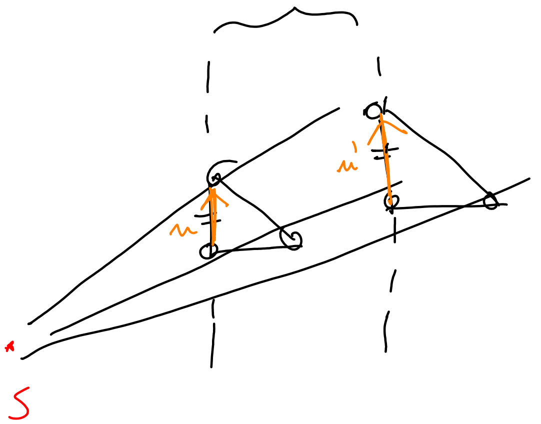
$$\sim \begin{matrix} 3/2\, x_1 + 5 = x_1 \\ 3/2\, x_2 + 1 = x_2 \end{matrix} \quad \sim \quad \begin{matrix} 1/2\, x_1 = -5 \\ 1/2\, x_2 = -1 \end{matrix} \quad \sim \quad \boxed{\begin{matrix} x_1 = -10 \\ x_2 = -2 \end{matrix}} \quad \rightsquigarrow \text{ pevný bod } \textbf{VLASTNÍ}!$$

$S = [-10, -2]$

(= střed stejnol.) ✓

JAK NEVLASTNÍ?

$$\underbrace{U_\infty = U'_\infty}_{} \iff u' = \lambda u \iff u = \text{char. vektor matice } \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}$$



... všechny vektory odp. char. čísla $\lambda = 3/2$

(= koef. stejnol.) ✓

... tj. $\boxed{\text{všechny NEVLASTNÍ}}$ body jsou pevné

(... "osa v nekonečnu") ✓

Pi char. vektory ROZŠÍŘENÉ matice $\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow$ uvidíme všechno NAJEDNOU!

① char. polynom ... $\det \begin{pmatrix} 3/2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3/2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 \cdot (1-\lambda)$ $\rightsquigarrow$ kořeny $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$

② Dosazujeme char. čísla

- $\lambda = 1$ ... $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\sim$ $\begin{array}{l} 1/2\, x_1 + 5 x_0 = 0 \\ 1/2\, x_2 + x_0 = 0 \end{array}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_0 = \text{lib} \\ x_1 = -10 x_0 \\ x_2 = -2 x_0 \end{array}}$ (dim 1)

- $\lambda = \frac{3}{2}$ ... $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = \text{lib} \\ x_2 = \text{lib} \end{array}}$ (dim 2)

③ INTERPRETUJEME!

- řešení pro $\lambda = 1$ odp. VLASTNÍMU pevnému bodu (dim 0) (střed) ✓

  $S = [-10, -2]$ .... $x_0 = 1$

- řešení pro $\lambda = 3/2$ odp. přímce NEVLASTNÍCH pevných bodů (dim 1) (osa) ✓

  .... $x_0 = 0$

ANALOGICKY...

... pro OTÁČENÍ s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ...

⇝ vyjdou char. čísla $\lambda = 1$ a $\lambda = \pm i$

⇝ jeden **VLASTNÍ** pevný bod $S = [3, -2]$ (= STŘED otáčení) ✓
a žádná další REÁLNÁ řešení ...

(... ovšem argument $\lambda = \pm i$
odpovídá ÚHLU otáčení) ✓

---

předchozí úvahy ZOBECNÍME / DOPLNÍME později ...

CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY — OPAKOVÁNÍ Z ALGEBRY

$F : V \to V$ ... LIN. TRANSFORMACE vekt. prostoru V

Def.. vektor $X \in V$ je char. vektorem zobr. F,

pokud obraz X' je násobkem X, tj.

(*) $\boxed{F \cdot X = \lambda X}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ (... char. číslo ...)

Pozn

- soustava (*) $\rightsquigarrow$ $(F \cdot X - \lambda X) = 0$,

  resp. $\boxed{(F - \lambda E) \cdot X = 0}$ ... homogenní soustava lin. rov.

- soustava (*) má NETRIVIÁLNÍ řešení

  $\Longleftrightarrow$ matice $F - \lambda E$ obs. lin. ZÁVISLÉ řádky

  $\Longleftrightarrow$ $\det(F - \lambda E) = 0$ (... char. polynom ...)

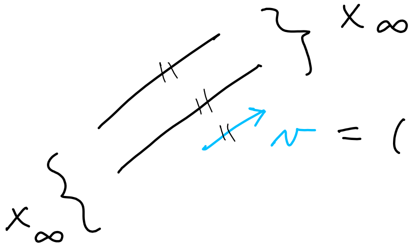
ROZŠÍŘENÍ KONZUMNÉ

• bod vlastní $\cdot X = [x_1, x_2]$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = X$,

přičemž připouštíme, že vektory X a kX

„UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

• bod nevlastní



$v = (x_1, x_2)$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = X$,

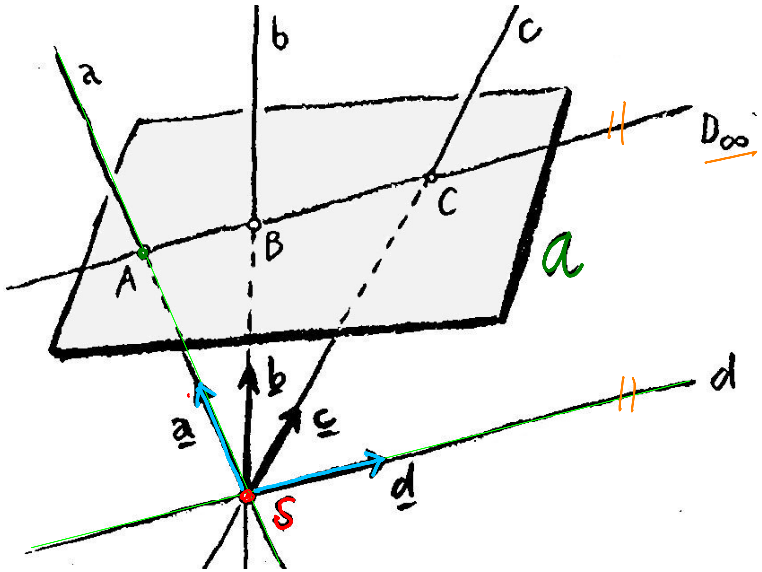
přičemž vektory v a kv, resp. X a kX

„UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

↑ ↑ ↗

všude $k \in \mathbb{R}$ lib. $\neq 0$

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{A}$ = afinní prostor (dim n)

  $S \not\in \mathcal{A}$, $\mathcal{N} = \mathcal{A} + S$ ... nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

  $A \in \mathcal{A} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S$

- přidejme VEKTORY

  $A \in \mathcal{A} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} a = A + S \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \underline{a} = \overrightarrow{SA}$ až na NÁSOBEK!

  (ozn. zaměření $V = \vec{\mathcal{A}}$, $W = \vec{\mathcal{N}}$)

- uvažme LIMITY (= ROZŠÍŘENÍ)

  {body vlastní} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {přímky proch. S různoběžné s $\mathcal{A}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W nepatřící do V}

  {body nevlastní} $\longleftrightarrow$ {přímky proch. S rovnoběžné s $\mathcal{A}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W patřící do V}

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\mathcal{P}$, resp. proj. rozšíření $\tilde{\mathcal{A}}$ af. prostoru $\mathcal{A}$

W

- Projektivní prostor dim $\boxed{n}$

  $\approx$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$

… přičemž **nevlastní** (= rozšířené) prvky odp. směrům v **nadrovině**

$V \subset W$

Bod v $\mathcal{P}$ … směr = 1-dim podprostor ve W

Přímka v $\mathcal{P}$ …… 2-dim podprostor ve W

⋮

- Projektivní podprostor $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ dim $\boxed{k}$

  $\approx$ vektorový podprostor $U \subseteq W$ dim $\boxed{k+1}$

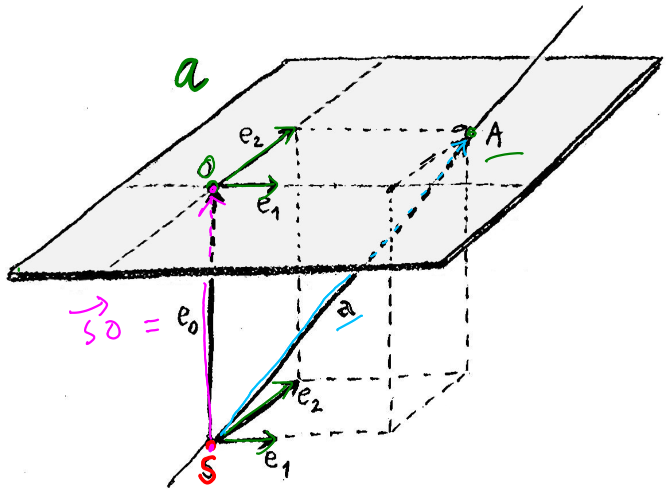
… přičemž af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ **rovnoběžné**

$\rightsquigarrow$ odp. rozšíření $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}'$ **nevlastní**

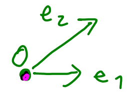
$\rightsquigarrow$ odp. vekt. podpr. $U \cap U'$ v **nadrovině** $V \subset W$

HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

- bod vlastní



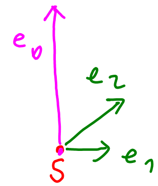
$A \doteq [3, 1]$ = souřadnice vzhledem k



$\vec{SA}$ $\quad 2\cdot\vec{SA}$ $\quad k\cdot\vec{SA}$

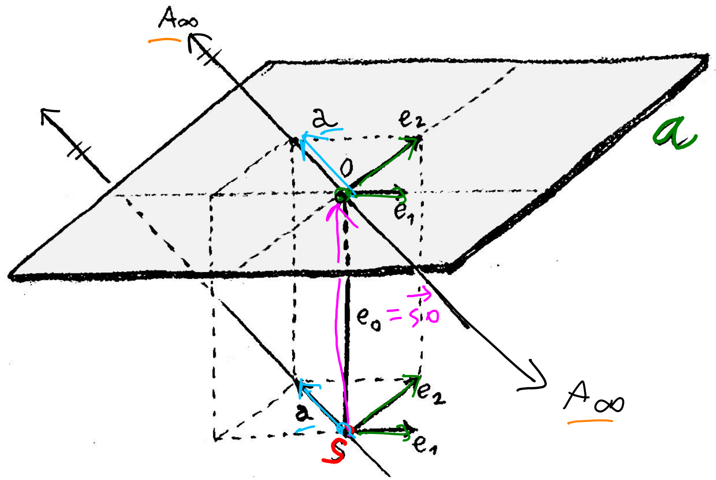
$a \doteq (3, 1, 1) \sim (6, 2, 2) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



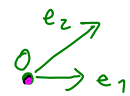
ozn.. $A = (3 : 1 : 1) = (6 : 2 : 2) = \dots$

- bod nevlastní



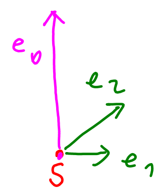
$a \doteq (-2, 1) \sim (6, -3) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



$a \doteq (-2, 1, 0) \sim (6, -3, 0) \sim \dots$

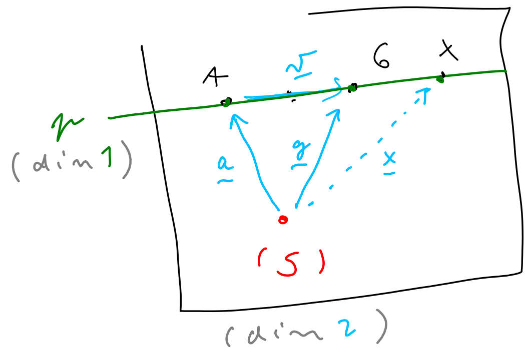
souřadnice vzhledem k



ozn.. $A = (-2 : 1 : 0) = (6 : -3 : 0) = \dots$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr.

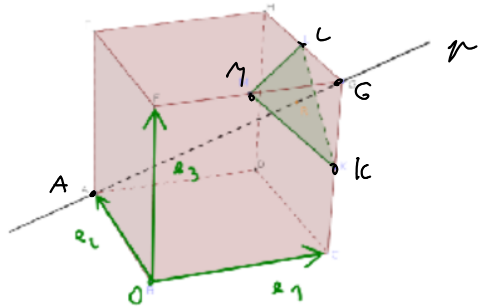
p = přímka AG



$A = [0,1,0]$, $G = [1,0,1]$ } p

⋮

$K = [1, 0, 1/2]$, $L = [1, 1/2, 1]$, $M = [1/2, 0, 1]$ } α



HOMOG. SOUŘ. (nové) | **AF. SOUŘ. (umíme)**

$A = (0 : 1 : 0 : \underline{1})$
$G = (1 : 0 : 1 : \underline{1})$
$V = (1 : -1 : 1 : \underline{0})$

$A = [0, 1, 0]$
$G = [1, 0, 1]$
$v = \overrightarrow{AG} = (1, -1, 1)$

(a) parametricky

$$p = \text{"}\{X = rA + sG \mid r, s \in \mathbb{R}\}\text{"}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_0 = r + s \end{array} \middle| \; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \{(s : r : s : r+s) \mid \dots\}$$

$$= \text{"}\{X = \check{r}A + \check{s}V \mid \check{r}, \check{s} \in \mathbb{R}\}\text{"}$$
$$= \{X = (\check{s} : \check{r} - \check{s} : \check{s} : \check{r}) \mid \dots\}$$

$r + s = 1$, $s = t$

$\check{r} = 1$, $\check{s} = 1$

$\check{r} = 1$, $\check{s} = 1 - \check{t}$

(a) parametricky

$$p = \{X = A + t\overrightarrow{AG} \mid t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = t \end{array} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \{[t, 1-t, t] \mid \dots\}$$

$$= \{X = G + \check{t}\overrightarrow{GA} \mid \check{t} \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{[1 - \check{t}, \check{t}, 1 - \check{t}] \mid \dots\}$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nové) | **AF. SOUŘ. (umíme)**

HOMOG. SOUŘ. (nové)

(b) rovnicové

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - \underline{x_0} = 0 \\ x_1 + x_2 - \underline{x_0} = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$$4 - \underset{\sim}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$x_0 = 1$

AF. SOUŘ. (umíme)

(b) rovnicové

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots$$

ekviv. soustavy

počet NEZÁV. rovnic:

$$3 - \underset{\sim}{1} = \underline{\underline{2}}$$

MOŽNOSTI ŘEŠENÍ (stále stejné)

- z hlavy (... pokud to je možné)
- systematická eliminace

$$\left(\begin{array}{lll} x_1 = & & s \\ x_2 = & r & \\ x_3 = & & s \\ x_0 = & r & + s \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{rcc} x_1 = & 0 & s \\ x_2 = & r & 0 \\ \hline x_1 - x_3 = & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = & 0 & 0 \end{array} \right)$$

✓

- (sub)determinanty

$$\left(\begin{array}{ccc} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_0 & 1 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

✓

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. α = rovina KLM

HOMOG. SOUŘ. (nově) | AF. SOUŘ. (umíme)

$K = (2 : 0 : 1 : 2) = (1 : 0 : 1/2 : 1)$
$L = (2 : 1 : 2 : 2)$
$M = (1 : 0 : 2 : 2)$
$u = (0 : 1 : 1 : 0)$
$v = (-1 : 0 : 1 : 0)$

$K = [1, 0, 1/2]$
$L = [1, 1/2, 1]$
$M = [1/2, 0, 1]$
$u = \overrightarrow{KL} = (0, 1/2, 1/2)$
$v = \overrightarrow{KM} = (-1/2, 0, 1/2)$

(a) parametricky

$$\alpha = \text{“}\{X = kK + lL + mM \mid k, l, m \in \mathbb{R}\}\text{”}$$
$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2k + 2l + m \\ x_2 &= l \\ x_3 &= k + 2l + 2m \\ x_0 &= 2k + 2l + 2m \end{aligned} \;\middle|\; \dots \right\}$$

$k + l + m = 1/2$

$l = 1/2\, r,\ m = 1/2\, s$

(a) parametricky

$$\alpha = \{X = K + r\overrightarrow{KL} + s\overrightarrow{KM} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 1 - 1/2\, s \\ x_2 &= 0 + 1/2\, r \\ x_3 &= 1/2 + 1/2\, r + 1/2\, s \end{aligned} \;\middle|\; \dots \right\}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0\}$$

$x_0 = 1$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2}\}$$

počet NEZÁV. rovnic:
$4 - 3 = 1$

počet NEZÁV. rovnic:
$3 - 2 = 1$

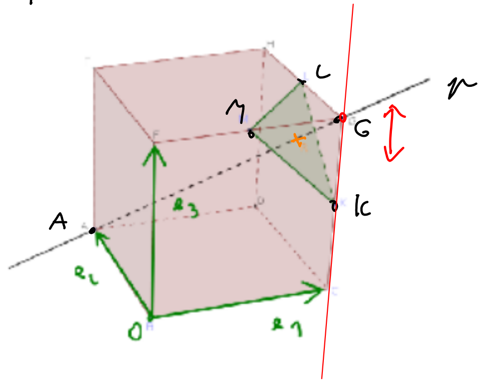
PŘÍKLAD – vzájemná poloha podprostorů

... v závislosti na hodnotě $k \in \mathbb{R}$

$A = [0, 1, 0]$, $G = [1, 0, k]$ } p

⋮

$K = [1, 0, 1/2]$, $L = [1, 1/2, 1]$, $M = [1/2, 0, 1]$ } α



HOMOG. SOUŘ. (nově)

$p = \{(s : r : ks : r+s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$

$\alpha = \{2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0\}$

$$p \cap \alpha: \quad 2s - 2r + 2ks - 3(r+s) = 0$$
$$-5r + (2k-1)s = 0$$
$$(2k-1)s = 5r$$

$p \cap \alpha = \text{BOD}$

... jmenovitě

$p \cap \alpha = (5 : 2k-1 : 5k : 2k+4)$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ NEVLASTNÍ

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ VLASTNÍ

AF. SOUŘ. (umíme)

$p = \{[t, 1-t, kt] \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\alpha = \{x_1 - x_2 + x_3 = \frac{3}{2}\}$

$$p \cap \alpha: \quad t - (1-t) + kt = 3/2$$
$$(2+k)t = 5/2$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \emptyset \rightsquigarrow p \parallel \alpha$

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \text{BOD} \rightsquigarrow p \nparallel \alpha$

... jmenovitě

$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{4+2k}, \frac{2k-1}{4+2k}, \frac{5k}{4+2k}\right]$

... spec. pro $k = 1$:

$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$

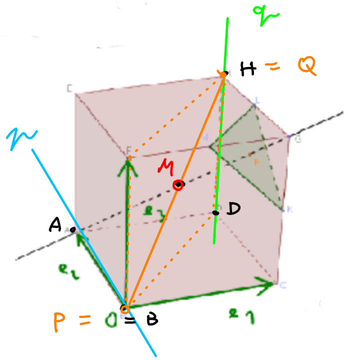
viz obr. ✓

PŘÍKLAD — příčky

$A = (0:1:0:1)$, $B = (0:0:0:1)$ $\Big\}$ $p = \{(0:a:0:a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$D = (1:1:0:1)$, $H = (1:1:1:1)$ $\Big\}$ $q = \{(d+h : d+h : h : d+h) \mid d,h \in \mathbb{R}\}$

$M = (1:1:1:2) = (m:m:m:2m)$



$A = [0,1,0]$, $B = [0,0,0]$ $\Big\}$ p

$D = [1,1,0]$, $H = [1,1,1]$ $\Big\}$ q

$M = [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$

PŘÍMO PODLE (b)

$\alpha = A + B + M = \{(m : a+m : m : a+b+2m) \mid a,b,m \in \mathbb{R}\}$
$= \{\ x_1 - x_3 = 0\ \}$

parametricky

rovnicově

$\beta = D + H + M = \{(d+h+m : d+h+m : h+m : d+h+2m) \mid \dots\}$
$= \{\ x_1 - x_2 = 0\ \}$

$P = p \cap \beta$

1 rov./2 neznámé

• pomocí rovnice ... $\boxed{0 - a = 0}$ $\sim$ $a = 0$, $b =$ lib.

$\rightsquigarrow P = (0:0:0:*) = B$ ✓

• pomocí param.:

4 rov./5 neznám.

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= d+h+m \\ a &= d+h+m \\ 0 &= h+m \\ a+b &= d+h+2m \end{aligned}} \sim \dots \sim \begin{aligned} a &= 0 \\ d &= 0 \\ h &= -m \\ b &= m \\ m &= \text{lib.} \end{aligned} \rightsquigarrow P = B \ ✓$$

Q obdobně .... $d = 0$, $h =$ lib. $\rightsquigarrow Q = H$ ✓

NÁPADY

(a) koncové body:

$P \in p$, $Q \in q$ obecné

tak, aby $\boxed{\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MQ}}$ ...

$\rightsquigarrow$ příčka = PQ

(b) průnik nadprostorů

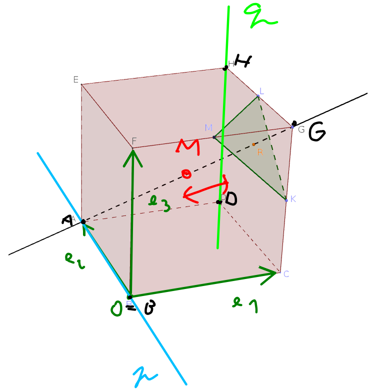
$\alpha = p + M$, $\beta = q + M$ $\Big\}$ příčka $= \alpha \cap \beta$

resp. koncové body:

$P = p \cap \beta$, $Q = q \cap \alpha$

PŘÍKLAD – příčky

ditto s proměnným bodem $M \in$ přímce AG ...



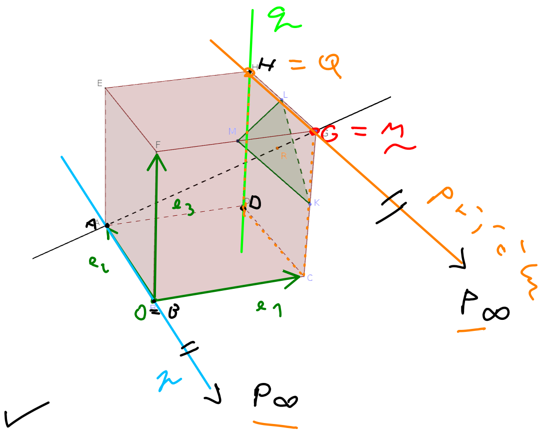
... "SPEC." PŘÍPADY :

$M = G = (1:0:1:1)$

$\beta = q + M = \{ (d+h+m : d+h : h+m : d+h+m) \}$
$= \{ x_1 - x_0 = 0 \}$

$p = p \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0-(a+b)=0} \rightsquigarrow a = -b = 1 \text{ i } b$
$\rightsquigarrow p = (0:1:0:0)$

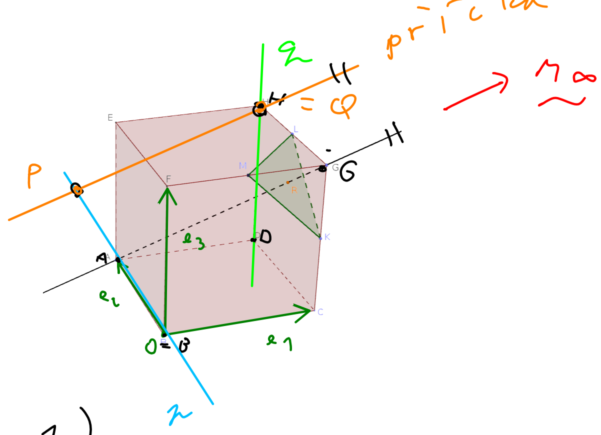
... nevlastní ✓



$M = (1:-1:1:0)$ ... nevlastní $(\overrightarrow{AG})$

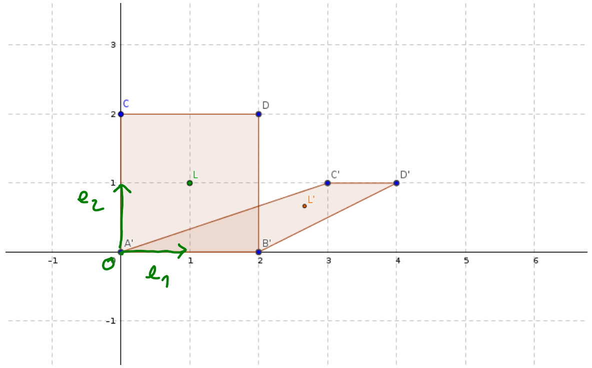
$\beta = q + M = \{ (d+h+m : d+h-m : h+m : d+h) \}$
$= \{ x_1 + x_2 - 2x_0 = 0 \}$

$p = p \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0 + a - 2(a+b) = 0} \rightsquigarrow a = 2b = 1 \text{ i } b$
$\rightsquigarrow p = (0:2:0:1)$ ✓

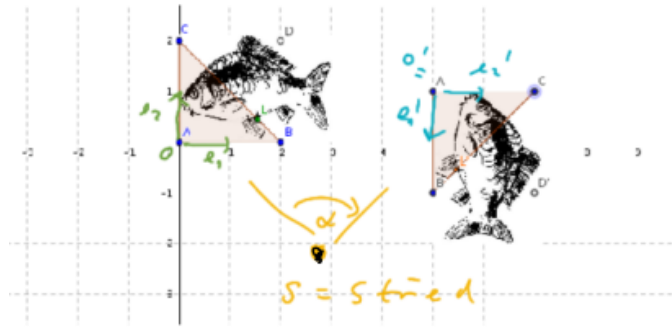


PŘÍKLAD – transformace

PROJ. zobr. v rovině je určeno ...



Afinní zobr. v rovině je určeno ...



OTÁČENÍ ...

čtyřmi body ..

[0,0] ↦ [0,0]
[2,0] ↦ [2,0]
[0,2] ↦ [3,1]
[2,2] ↦ [4,1]

[0,0] ↦ [5,1]
[2,0] ↦ [5,-1]
[0,2] ↦ [7,1]

... třemi body

předpisem ...

Jak by to mohlo vypadat TADY ?

$x_1' = f(x_1, x_2)$
$x_2' = g(x_1, x_2)$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{N}$$

$e_1' = -e_2$ $e_2' = e_1$ o'

$x_1' = x_2 + 5$
$x_2' = -x_1 + 1$

... předpisem

JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ! ...

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}_{L} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}}_{N} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

... JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ!

Jak SPRÁVNĚ interpretovat ?

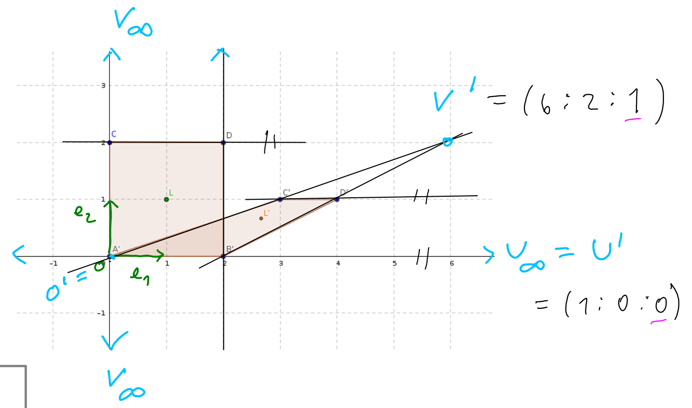
SPRÁVNÁ INTERPRETACE MATICE ZOBR.

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\\hline 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\hline 0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\\hline 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\\hline 0.5\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\hline 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\hline 1\end{pmatrix}$$

V_∞ $\quad V'$ $\quad O$ $\quad O'$

homog. souř. V_∞ .. NEVL. bod 1. souřadné osy

U' .. obraz U_∞ = 1. ÚBĚŽNÍK



Tedy rozšířená matice $\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

po sloupcích ... homogenní souřadnice

$\boxed{\text{1. ÚBĚŽNÍKU, 2. ÚBĚŽNÍKU, ..., OBRAZU POČÁTKU}}$

PROJ. ZOBR. V AF. SOUŘADNICÍCH

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\hline x_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\hline x_0\end{pmatrix}\rightsquigarrow \boxed{\begin{aligned}x_1' &= x_1+3x_2\\ x_2' &= x_2\\ \hline x_0' &= \tfrac{1}{2}x_2+x_0\end{aligned}}\xrightarrow[\text{děl. } x_0']{\text{subs. } x_0=1}\boxed{\begin{aligned}x_1' &= \frac{x_1+3x_2}{\frac{x_2}{2}+1}=\frac{2x_1+6x_2}{x_2+2}\\ x_2' &= \frac{x_2}{\frac{x_2}{2}+1}=\frac{2x_2}{x_2+2}\end{aligned}}$$

homogenní souř. .. LINEÁRNÍ FCE

afinní souř. ... RAC. LOMENÉ FCE (stupně 1)

POSTŘEHY & POZNÁMKY

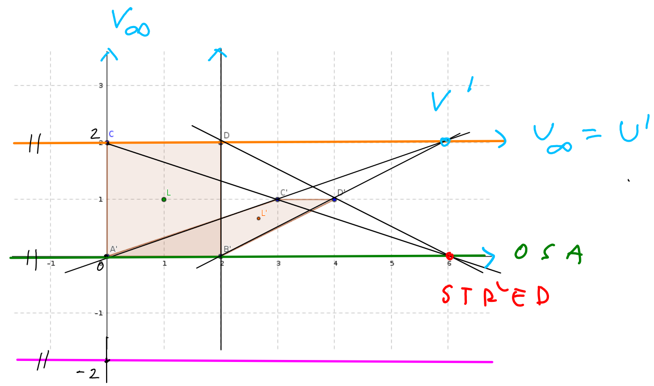
PROJ. zobrazení v AFINNÍ rovině

• def. obor a obor hodnot:

Předchozí vyjádření OK $\iff$ $x_0' = \frac{1}{2}x_2 + 1 \neq 0 \iff x_2 \neq -2$

Tedy .. def. obor $= \mathcal{A} \setminus \{x_2 = -2\}$ ← "přeběžnice"

obor hodnot $= \mathcal{A} \setminus \{x_2 = 2\}$ ← úběžnice



• pevné body

... char. vektory rozšířené matice:

1) char. polynom $= (1-\lambda)^3 \rightsquigarrow$ kořen $\lambda = 1$

2) řešení pro $\lambda = 1 \rightsquigarrow$ přímka $\{x_2 = 0\}$,

tj. OSA (= přímka pevných bodů $A = A'$, $B = B'$)

③ Desarguesova věta $\rightsquigarrow$ MUSÍ mít STŘED!

(každá incid. přímka pevná $p = p'$, $q = q'$, S)

Umíme najít KONSTRUKČNĚ $\rightsquigarrow$ (6 : 0 : 1)

... a co POČETNĚ?

POZNÁMKY K URČENOSTI — 3 body NESTAČÍ!

- pro

$$O = (0:0:\underline{1}) \longmapsto (0:0:\underline{1}) = O'$$
$$U = (1:0:\underline{0}) \longmapsto (1:0:\underline{0}) = U'$$
$$V = (0:1:\underline{0}) \longmapsto (6:2:\underline{1}) = V'$$

víme akorát
$$F = \begin{array}{ccc} U' & V' & O' \end{array}$$
$$F = \left(\begin{array}{c|c|c} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right),$$
kde $a, b, c \in \mathbb{R}$!!

- zobrazení určeno JEDNOZNAČNĚ např. s podmínkou

$$D = (2:2:\underline{1}) \longmapsto (4:1:\underline{1}) = D'$$

LIN. ROUNICE

3 rov. / 4 neznámé ✓

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2a+12b \\ \underline{4b} \\ 2b+c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4k \\ \underline{1k} \\ 1k \end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ $k = 4b$, $b = \text{lib}$

$a = 2b$, $c = 2b$

$\xrightarrow[(b=1/2)]{}$ $F = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{array}\right)$ ✓

- Jak se to vlastně ZOBECŇOVALO?

"Kolik bodů potřeba v prostoru dim $\boxed{n}$?"

... připomeneme / doplníme po ZÁKLADNÍ VĚTĚ ...

MEZISHRNUTÍ

- Pro SHODNÁ → PODOBNÁ → AFINNÍ → **PROJEKTIVNÍ** zobr. prostoru dim $\boxed{n}$

  jsme se zatím vždy vlezli do **MATICE** řádu $\boxed{n+1}$!

- **MATICE** představuje **LINEÁRNÍ** zobr. vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \ldots \text{ dim } n+1 \\
P \arrow[r, "f"'] & P & \ldots \text{ dim } n
\end{tikzcd}
$$

- Přirozená otázka (očekávání):

  FUNGUJE TO TAK **OBECNĚ** ?

- Nejprve předp. všechno **BIJEKTIVNÍ** a **dim ≥ 2** . . .

MASÁŽ I.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

- Předp. $F: W \longrightarrow W$ .. LINEÁRNÍ

  $\Longrightarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je zase vekt. podprostorem.

- Zejména:

  a) $\dim U = 1 \rightsquigarrow$ MÁME zobr. $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$,

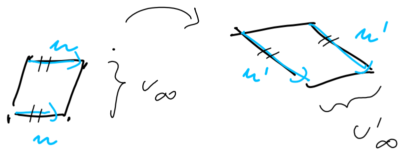
  b) $\dim U = 2 \rightsquigarrow$ f zobrazuje přímky na přímky,

  tj. f = KOLINEACE !

(obecně: $\dim U = \underline{k} \rightsquigarrow$ f zobrazuje proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ na proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ ..)

MASÁŽ II.

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{F}{\dashrightarrow} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{a} & \xrightarrow[f]{} & \tilde{a} \end{array}$$



- Předp. $f : a \to a$ ... AFINNÍ

  $\implies$ máme indukované LINEÁRNÍ

  $$\vec{f} : V \to V, \qquad V = \vec{a}$$

  ... popisuje zobr. ∞ bodů při rozšíření $\rho = \tilde{a}$.

- Zejména:

  a) rozšířené zobr. $\tilde{f} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ ... "$\tilde{f} = f + \vec{f}$"

  b) je určeno LINEÁRNÍM zobr.

  $$F : W \to W,$$

  ... přičemž $F(V) \subseteq V$ a $F|_V = \vec{f}$!

viz úvodní př. ... $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM ≥ 2 platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : W \to W'$

- Směr "$\Uparrow$" ... rozumíme OBECNĚ (viz MASÁŽ I.)
- Směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro AFINNÍ (viz MASÁŽ II.)
  ... doplníme pro obecné KOLINEACE ...

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

- **Postřeh**: zatím nikde nemluvíme o DVOJPOMĚRECH!

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ ... KOLINEACE

  $\Longrightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je proj. podpr.,
  zejména obraz NADROVINY $n \subseteq \mathcal{P}$ je NADROVINA $n' \subseteq \mathcal{P}'$.

- INTERPRETUJME n a n' jako nadroviny "∞ bodů":

  ozn. $\mathcal{a} := \mathcal{P} \setminus n$, tj. $\mathcal{P} = \mathcal{a} \cup n = \tilde{\mathcal{a}}$ atd.

  zúžené zobr. $f : \mathcal{a} \longrightarrow \mathcal{a}'$ je KOLINEACE.

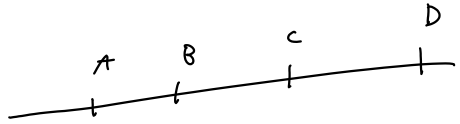
- ZÁKL. VĚTA AFINNÍ GEOM. $\Longrightarrow$ $f : \mathcal{a} \longrightarrow \mathcal{a}'$ je AFINNÍ!

  "ROZŠÍŘENÍ" $\tilde{f} = f$,

  a to je určeno LINEÁRNÍM $F : W \longrightarrow W'$!

  (viz MASÁŽ II.)

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY ? — vzpomínáme



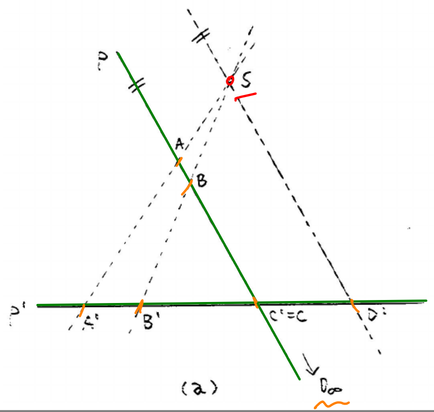
- Definice $$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

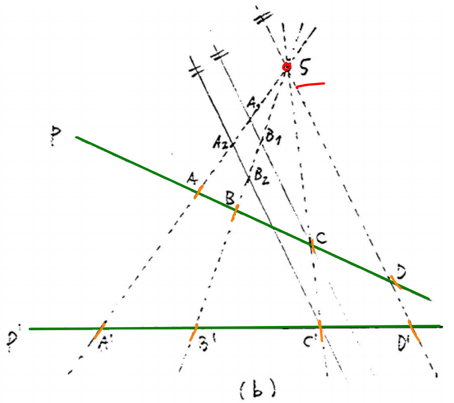
$\lim\limits_{D \to \infty} \dots = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot 1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$

obyč. poměr

- **Věta (Pappova)**

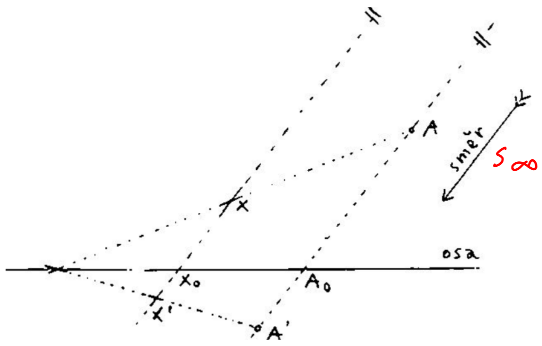
  Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.

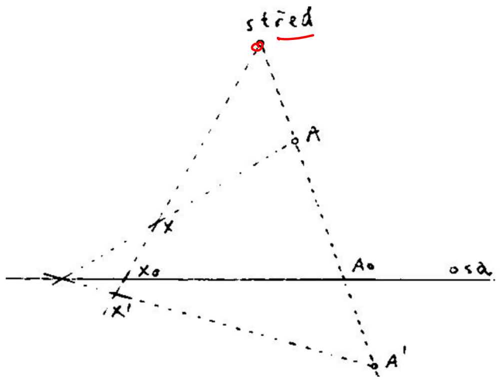




← obrázky k důkazu

- Pozn. Osová afinita vs. osová kolineace:





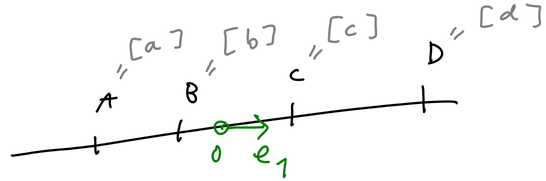
← další zákl. souvislosti

- $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr, $\qquad X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- $(X'X\,X_o) = (A'A\,A_o) = \dots$ modul, $\qquad (X'X\,X_oS) = (A'A\,A_oS) = \dots$ modul.

$\lim\limits_{S \to \infty} \dots$

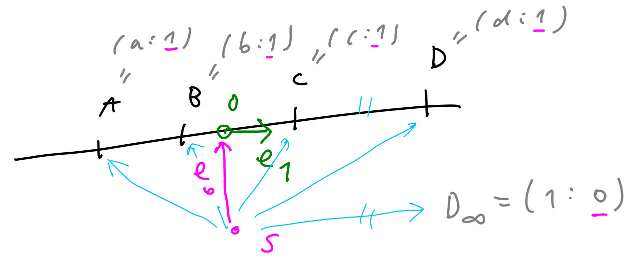
JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — NOVĚ

- v af. souřadnicích



$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$

- postřeh



$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1\end{vmatrix}}$$

$$\lim_{D\to\infty} \dots\dots = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{vmatrix}} = 1$$

$\leftarrow$ $D = (d:1) = (1 : \frac{1}{d}) = \dots$

$\lim_{d\to\infty} \dots = (1:0)$ ✓

- v hom. souřadnicích

$$\boxed{(AB\,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_0 & a_0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d & b \\ d_0 & b_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ c_0 & b_0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d & a \\ d_0 & a_0\end{vmatrix}}}$$

krásně HOMOGENNÍ
(zahrnuje vlastní/nevlastní ...)

a DOBŘE DEF!
(nezávislé na násobcích ukazovacích vektorů!)

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY ?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY :

> Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM ≥ 2 platí:
>
> f zachovává KOLINEÁRNOST ← vlastnost (a)
>
> vlastnost (b)
>
> $\Updownarrow$
>
> f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY)

DŮKAZ (směru "$\Downarrow$")

- ZÁKL. VĚTA PROJ. GEOM. $\Longrightarrow$ f je určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$
- zúžení na lib. přímku je určeno LINEÁRNÍM $\underline{F} : U \to U'$ (dim 1) (dim 2)
- HOMOGENNÍ popis dvojpoměru + CAUCHYHO věta : ← o součinu determinantů

$$(A'B'C'D') = \frac{|(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)| \cdot |(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)|}{|(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)| \cdot |(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)|} \overset{!}{=} \frac{|\cancel{\underline{F}}| \cdot |\vdots\,\vdots| \cdot |\cancel{\underline{F}}| \cdot |\vdots\,\vdots|}{|\cancel{\underline{F}}| \cdot |\vdots\,\vdots| \cdot |\cancel{\underline{F}}| \cdot |\vdots\,\vdots|} = (ABCD)$$

JAK TO JE S DIM 1?

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

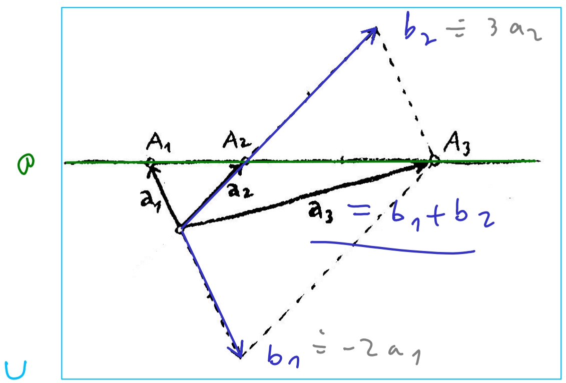
$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

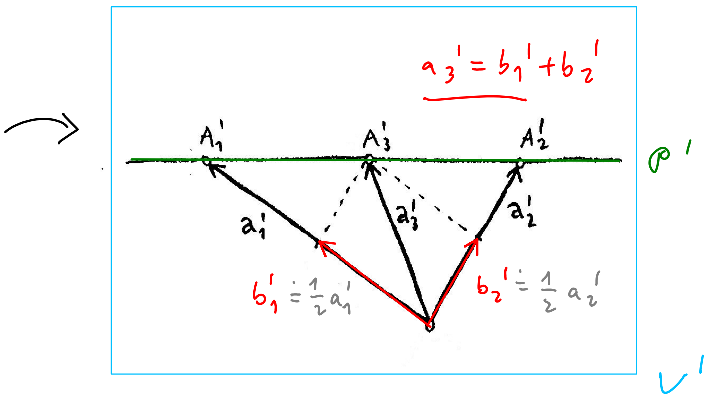
- První "$\iff$" zřejmá (dim 1)
- Druhá "$\Leftarrow$" taky (viz důkaz předch. věty)
- Druhá "$\Rightarrow$":

f určeno TŘEMI navzájem různými body v $\mathcal{P}$, tj. TŘEMI vektory v U,

dim $U = 2$ $\rightsquigarrow$ stačí DVA NEZÁVISLÉ vektory ...

... tak, aby to sedělo na TŘETÍM!





$F : U \to U'$ určeno obrazy
$$\boxed{\begin{aligned} F(b_1) &= b_1' \\ F(b_2) &= b_2' \end{aligned}}$$

$$F(a_3) = F(b_1 + b_2) = b_1' + b_2' = a_3' \checkmark$$

JAK TO JE S URČENOSTÍ?

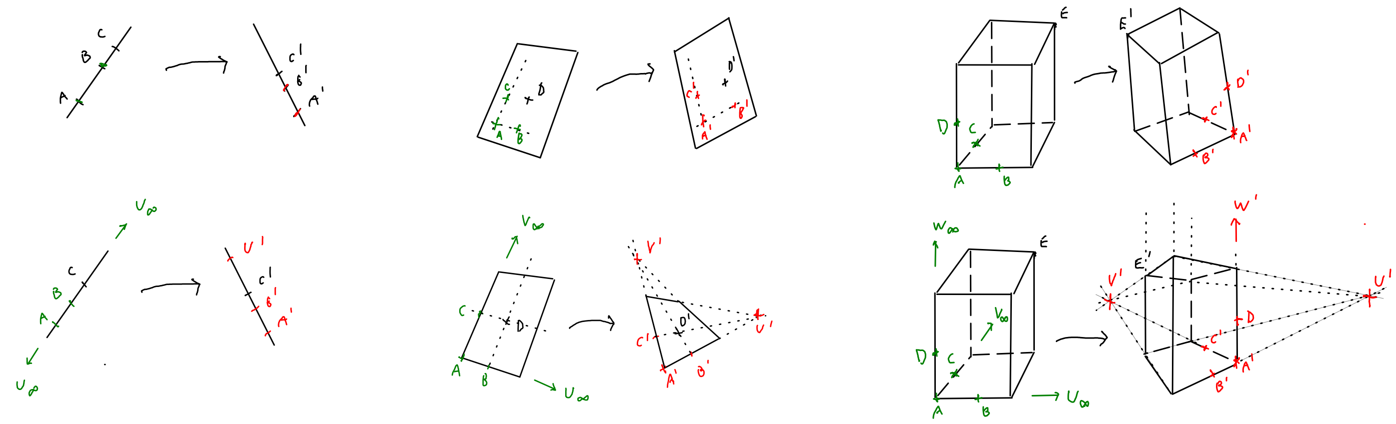
- vzpomínáme

> PROSTÉ zobrazení z prostoru dim n ...
> a) AFINNÍ je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze,
> b) PROJEKTIVNÍ ..... + navíc n odp. ÚBĚŽNÍKY.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$

a)

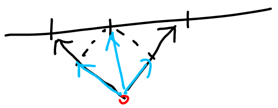
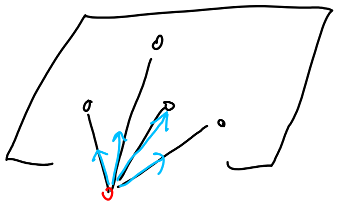
b)



- s algebrou snadno rozumíme, že

> PROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobrazení z prostoru dim n
> je určeno obrazy $n+2$ bodů ...
> ... v "dostatečně obecné" poloze!

JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU ?

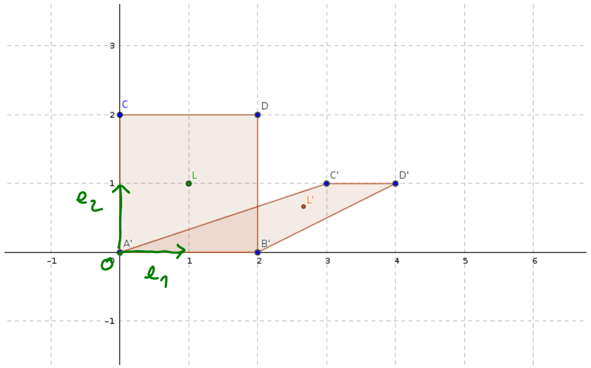
- $n = 1$  3 navzájem různé body
- $n = 2$  4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce
- n obecně ... $n+2$ bodů, z nichž žádných $n+1$ neleží v NADROVINĚ, resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $n+1$ tvoří BÁZI a zbylý je jejich SOUČTEM.

JAK TO JE S DŮKAZEM ?

... ZÁKL. VĚTA + zobecnění diskuze pro $n = 1$:

- PROSTÉ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$,
- LINEÁRNÍ $F : W \to W'$ určeno obrazem BÁZE,
- PROSTÉ $\Rightarrow$ {body v "dost. obecné" poloze} $\longmapsto$ {body v "dost. obecné" poloze},
- stačí vybrat tak, aby "SOUČET" $\longmapsto$ "SOUČET".

PŘÍKLAD — starý známý ... $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

$\Big\}$ $n+2$ bodů ...

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ?$$

← $(n+1)\cdot(n+1)$ neznámých

$A \mapsto A'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

← $k, l, m, n \in \mathbb{R}$

.. dalších $n+2$

$B \mapsto B'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ ... $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

⇝ soustava lin. rovnic :

$\boxed{12}$ rovnic

$\boxed{13}$ neznámých

$13 - 12 = \underline{\underline{1}}$ volný param.. ✓

OBECNĚ :

$(n+1)\cdot(n+2) = n^2 + 3n + 2$ rovnic

$(n+1)\cdot(n+1) + (n+2) = n^2 + 3n + 3$ neznámých

$\Big\}$ rozdíl $= \underline{\underline{1}}$ ✓

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

- **OBECNĚ**

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.
* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

GEOMETRIE

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \dim n+1 \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \dim n \end{tikzcd}$$

- **ALGEBRA**

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. NEZÁVISLÉ (a)

* char. vektory odp. číslu λ tvoří VEKT. PODPROSTOR, jehož dimenze $\leq$ násobnost kořene λ (b)

* $n+1$ = LICHÉ $\Longrightarrow$ ASPOŇ JEDEN reálný kořen (c)
  (komplexní po dvojicích)

* DETERMINANT / STOPA matice F =
  = součin / součet všech char. čísel vč. násobností (d)
  (obecně komplexních)

* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

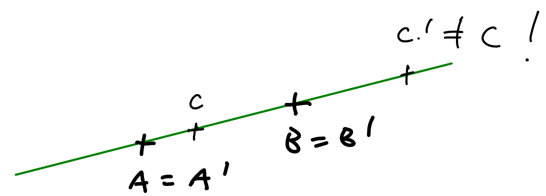
- **PROJEKTIVNÍ**

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

  * pevné body odp. RŮZNÝM char. číslům jsou RŮZNÉ (viz a)
  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří proj. PODPROSTOR (viz b)
  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN pevný bod! (viz c)
  * izolovaných pevných bodů není víc než $n+1$! (viz a)
  * apod.

- **POZN.**

  * pro obecné PROJEKTIVNÍ vskutku může být



JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

• **AFINNÍ**

$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \to \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

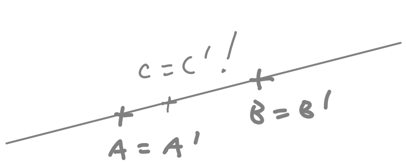
* VŽDY ASPOŇ JEDEN pevný bod!

... char. polynom $= \det\begin{pmatrix} *-\lambda & * & * \\ * & *-\lambda & * \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} *-\lambda & * \\ * & *-\lambda \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\lambda = 1$ je $\mathbb{R}$-kořen

* VLASTNÍ pevné body tvoří af. PODPROSTOR!

... plyne z geom. vlastností: kolin., poměry ..



... plyne z alg. počítání:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} K & L \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff (K)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (L) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

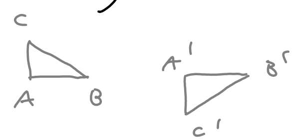
$$\iff \boxed{(K - E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)} \longleftarrow \text{soustava (nehom.) lin. rovnic}$$

* apod.

• **POZN.**

* VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\Longrightarrow$ všechny NEVLASTNÍ

... viz např. posunutou souměrnost



JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

• **PODOBNÉ**

resp. SHODNÉ ← $k = 1$

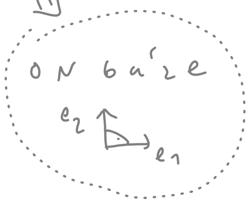
$$\left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

D

$D^T \cdot D = k^2 E$, k = koef. podobnosti

⇕

ON báze e_2, e_1 → k - násobek ON báze e_1', e_2'

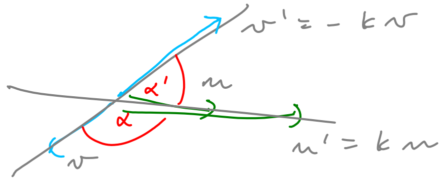


* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm k$

... $\|u'\| = k \|u\|$ pro lib. $u \in V$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou KOLMÉ

... různé $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = +k$, $\lambda_2 = -k$ ...



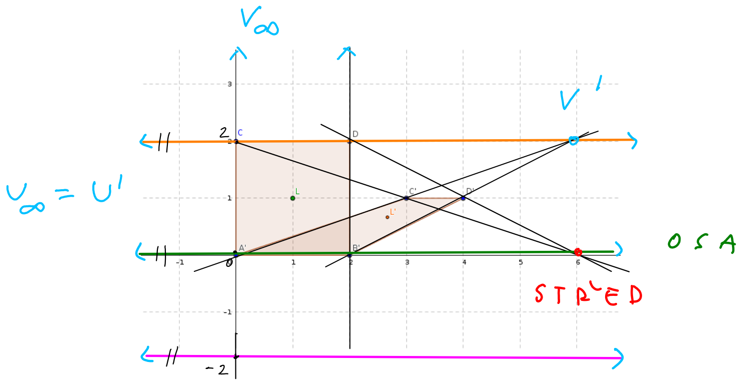
* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ PRÁVĚ JEDEN VLASTNÍ pevný bod!

... neshodné $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\det(k - E) \neq 0$

$\Longrightarrow$ soust. $(k-E)\cdot\binom{x_1}{x_2} = -(L)$ právě jedno řešení.

* apod.

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3$ ⤳ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

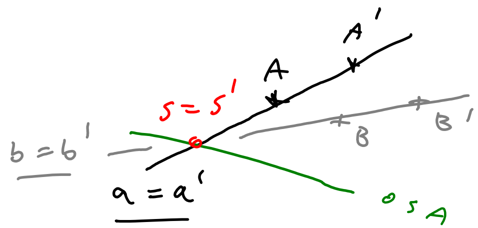
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{přímka } \{x_2 = 0\} = \text{OSA}$$

dim: $2 \neq 3$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM ?

JE TAM . . .

. . . a umíme to ZDŮVODNIT :



- lib. bod A mimo osu ⤳ $A' \neq A$
  ⤳ S ... průnik přímky $a = AA'$ s osou
  ⤳ $S' = S$ ⤳ obraz $a' = a$ ⤳ S = STŘED ?
- lib. jiný bod B mimo osu ⤳ tentýž STŘED S !
  (jinak průnik $a \cap b$ pevný bod mimo osu ... SPOR)

JAK TO JE OSAMÍ / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix}}_{X'}$$

JE TAM . . .

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT:

- S = STŘED $\Leftrightarrow$ pro lib. X … S, X, X' KOLINEÁRNÍ

$\Leftrightarrow$ … hodnost $\begin{array}{c} S \quad X \quad X' \\ \left(\vdots \,\middle|\, \vdots \,\middle|\, \vdots \right) \end{array} = 2$

$\Leftrightarrow$ … det $\begin{array}{c} S \quad X \quad X' \\ \left(\vdots \,\middle|\, \vdots \,\middle|\, \vdots \right) \end{array} = 0$

- $$\det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & x_1+3x_2 \\ s_2 & x_2 & x_2 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & 3x_2 \\ s_2 & x_2 & 0 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}s_1 x_2^2 + 3 s_2 x_2 x_0 - 3 s_0 x_2^2 - \frac{1}{2} s_2 x_1 x_2$$

$$= \left(\frac{1}{2}s_1 - 3s_0\right) x_2^2 + 3 s_2 x_2 x_0 - \frac{1}{2} s_2 x_1 x_2$$

(−1)

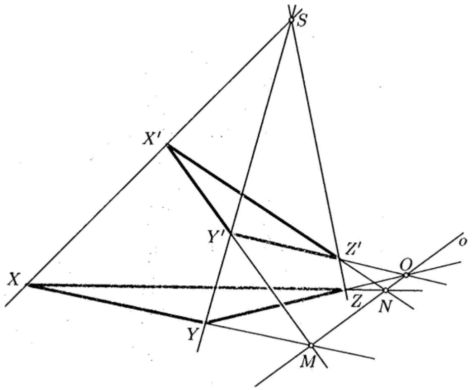
Tedy det … = 0 pro lib. X $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}s_1 - 3s_0 &= 0 \\ 3s_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}s_2 &= 0 \end{aligned}}$ ← soustava (hom.) lin. rovnic!

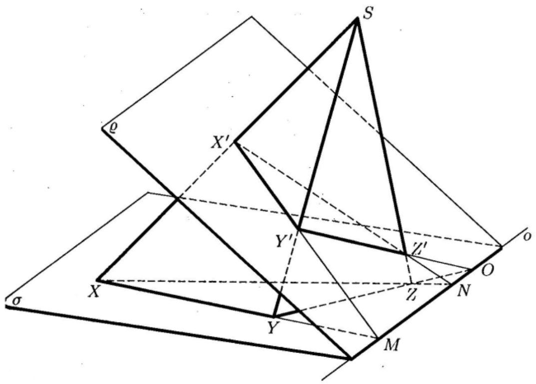
$\Leftrightarrow$ $S = (6 : 0 : 1)$ ← souhlasí s obr. ✓

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — VZPOMÍNÁME DIM 2

- Věta

  Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\Longleftrightarrow$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.





Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

- Důsl.

  neidentická bijektivní

  proj. transf. v rovině má osu $\Longleftrightarrow$ má STŘED

  přímka (= nadrovina) pevných bodů

  pevný bod: $\forall$ incid. přímka je pevná

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ? — NOVÉ

... ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

Pro neid. bijektivní PROJEKTIVNÍ $f: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mezi proj. prostory DIM $\underline{n} \geq 2$ platí:

(1) f má (NAD)OSU $\iff$ f má STŘED.

(2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

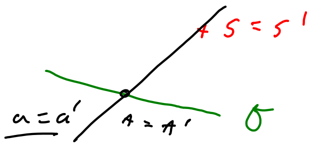
(1) směr "$\Rightarrow$"

* o = NADOSA ... vekt. nadrovina (dim $\underline{n-1}$)

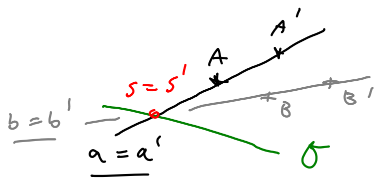
... char. číslo násobnosti aspoň $\underline{n}$ (dim $\underline{n}$) ... ozn. $\underline{\lambda}$

$\rightsquigarrow$ ex. další $\mathbb{R}$-kořen ... ozn. $\underline{\mu}$

* $\underline{\mu} \neq \underline{\lambda}$ $\rightsquigarrow$ STŘED $\notin$ NADOSE



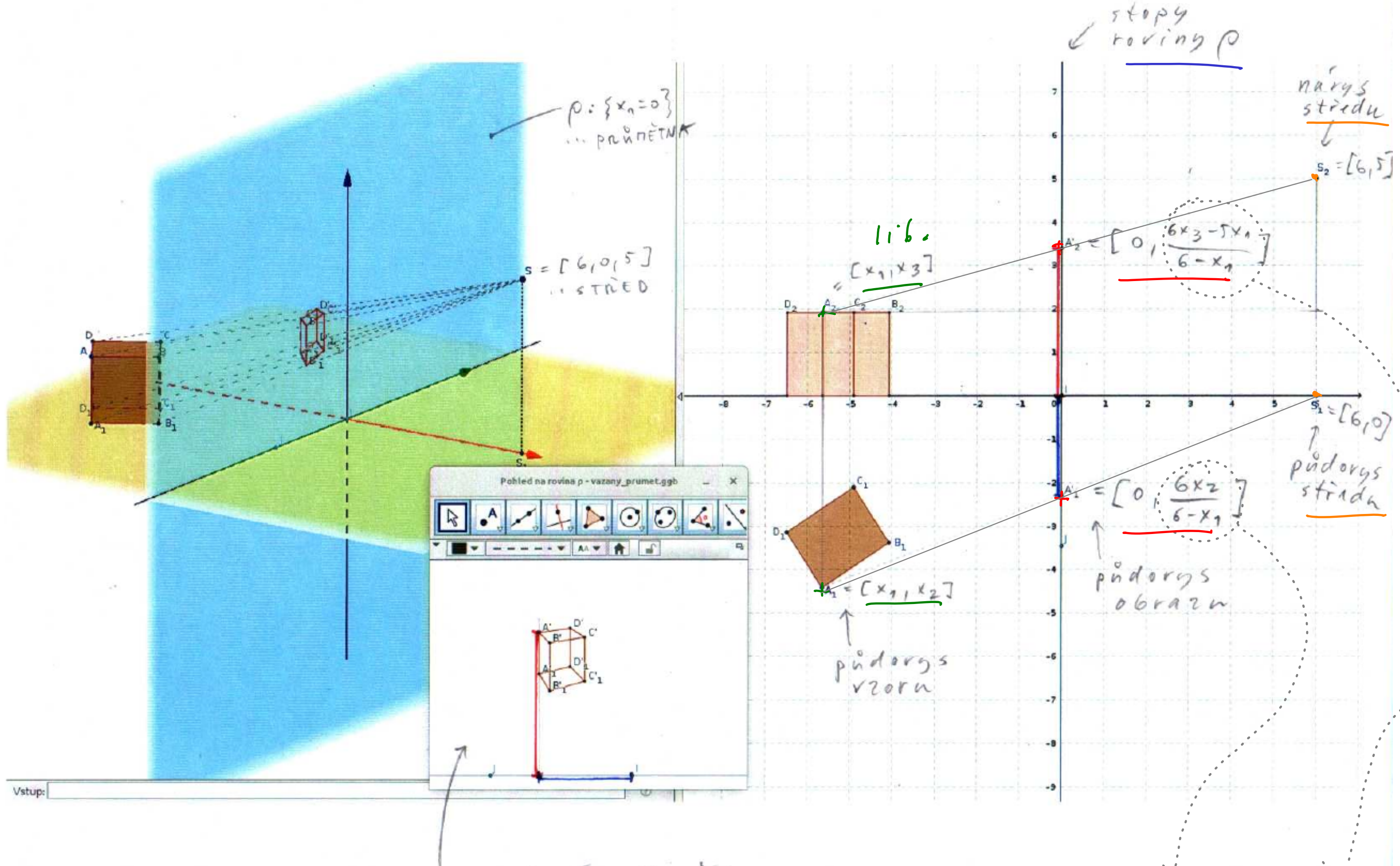
* $\underline{\mu} = \underline{\lambda}$ $\rightsquigarrow$ STŘED $\in$ NADOSE



směr "$\Leftarrow$" ... víc práce ...

(2) Předp. víc nados, resp. středů $\rightsquigarrow$ SPOR ...

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD



skutečný průmět ...

STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6,0,5]$
do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

← KONSTRUKCE vs. POČÍTÁNÍ ↓

- afinní souř. … $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6 - x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1}\right]$ $(x_1 \neq 6)$
- homogenní souř. … $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : 6x_0 - x_1)$
- matice ….. $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ $\rightsquigarrow$ hodnost F není MAX $\rightsquigarrow$ $\det F = 0$

  $\rightsquigarrow$ F má NETRIV. JÁDRO $= \{ v : F(v) = 0 \}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{l} x_1 = 6x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5x_0 \\ \underline{x_0 = 1;6} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ tj. bod $(6 : 0 : 5 : \underline{1}) = S$

- Tedy DEF. OBOR $f = \mathcal{P} \setminus \{S\}$! $\leftarrow$ STŘED promítání ✓

  resp. v af. prostoru ... $a \setminus \{x_1 = 6\}$ $\leftarrow$ "přeúběžnice"
  (rovina $\parallel \rho$ proch. S) ✓

- Pozn. ... f = PROJEKCE $\rightsquigarrow$ $f \circ f = f$ $\rightsquigarrow$ $F \cdot F = kF$, $k \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \dots = 6 \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \quad ✓$$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? – OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$
  NENÍ def. na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. jádru $\ker F \subseteq W$ ...

  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

  ... NEROZUMÍME uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s URČENOSTÍ! :(

- s "ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme! :)

  ... zejména v AFINNÍM případě