Irena Budínová

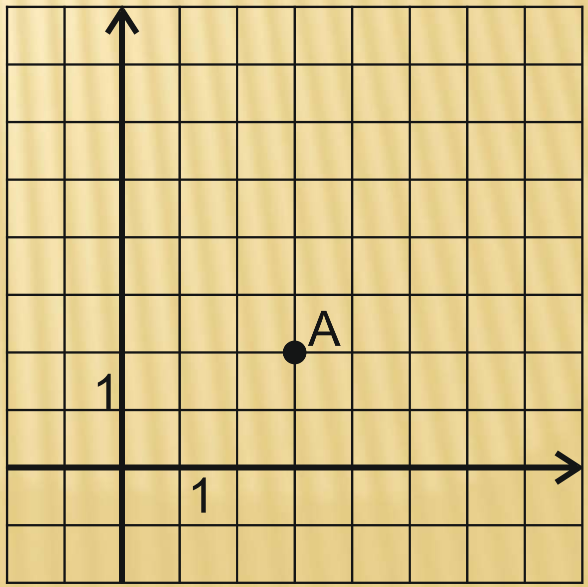
# FUNKCE NA ZŠ

# VÝUKA FUNKCÍ NA ZŠ

- Funkce jsou jedním z nejnáročnějších témat školské matematiky, které činí potíže žákům základní školy, studentům středních i vysokých škol.
- Zamysleme se nad tím, co vše musíme chápat a umět, abychom porozuměli zápisu $y=ax+b$.
- K předávání učiva je možné přistupovat značně formálně. Výsledkem je ale chybějící představa a neporozumění pojmům i postupům.

# PRAVOÚHLÁ SOUSTAVA SOUŘADNIC

- Celým učivem funkcí nás provází zakreslování grafu funkce. Proto musíme žáky seznámit s pravoúhlou soustavou souřadnic.
- Poloha každého bodu roviny je jednoznačně určena dvěma čísly, tzv. souřadnicemi
- A[3; 2] - žáci si tento zápis mnohdy pletou s des. číslem.

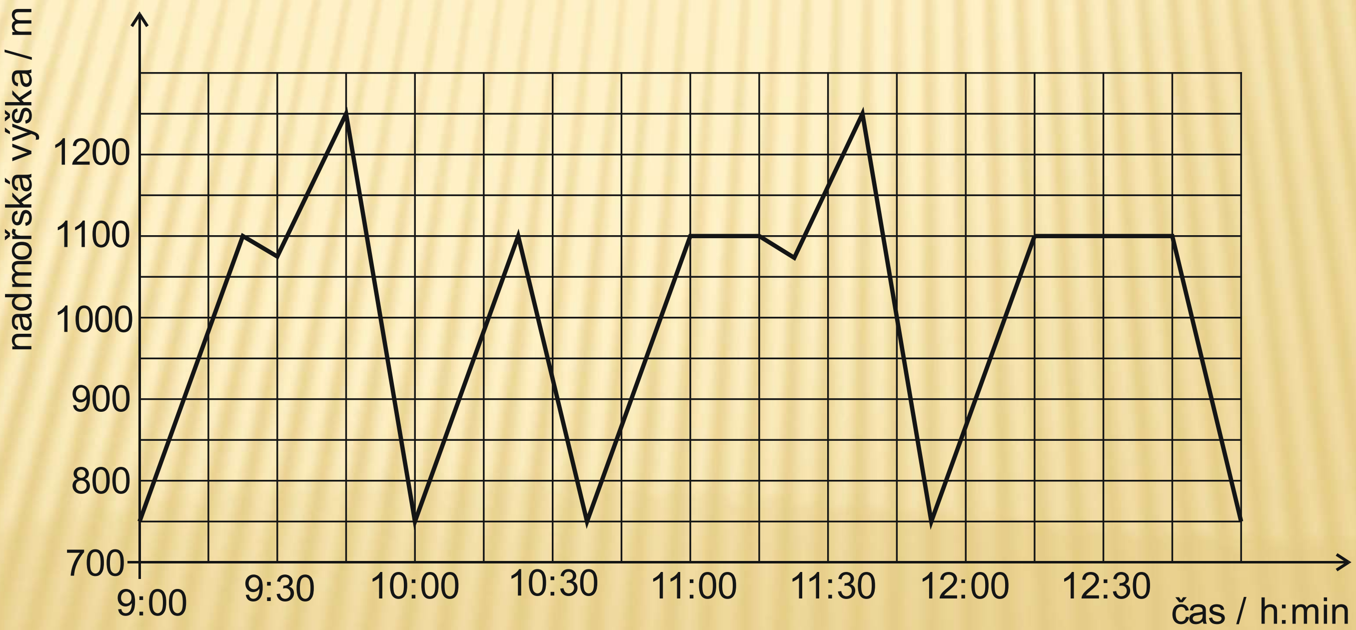


- Pro lepší motivaci a co nejlepší fixaci můžeme pomocí zadaných souřadnic zakreslovat obrázky.
- Začínáme prvním kvadrantem. Zadáváme sekvence souřadnic, které se spojují úsečkami.
- Pracujeme se čtverečkovaným papírem.
  - [1; 0], [2; 0], [3; 1], [3; 2], [2; 3], [1; 3], [0; 2], [0; 1], [1; 0], stop

# ZÁVISLOSTI Z BĚŽNÉHO ŽIVOTA

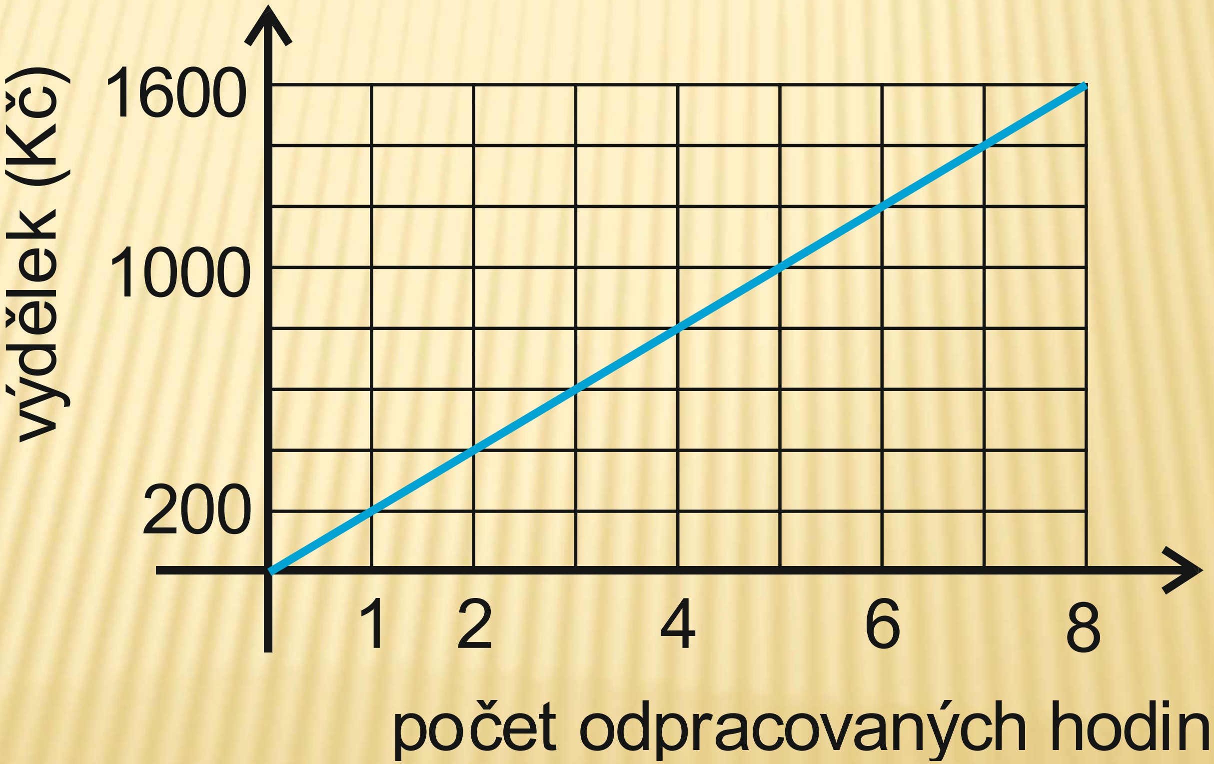
- Většina závislostí, se kterými se setkáváme v běžném životě, jsou analyticky nezadatelné závislosti.
- První dovednost z oblasti funkcí, kterou obvykle v životě potřebujeme, je čtení v grafu.
- Učíme žáky správně číst v grafu z analyticky nezadatelných i zadatelných závislostí.

- Úloha 1: *Lyžař jezdil v lyžařském areálu a zaznamenával si údaje o nadmořské výšce. Z nich pak zakreslil graf. V něm je zanesen čas a nadmořská výška v okamžiku, kdy vyjel nahoru lanovkou, sjel dolů k lanovce nebo odpočíval.*



- Z grafu odpovězte na následující otázky:
  a) Kolikrát jel lyžař lanovkou?
  b) Do jaké nejvyšší nadmořské výšky jel lyžař lanovkou?
  c) Kolikrát během dopoledne sjel zpět do výchozí nadmořské výšky?
  d) Kolik různých lanovek využil?
  e) Kdy si udělal krátkou přestávku na čaj? Jak dlouho tato přestávka trvala?
  f) V kolik hodin šel na oběd a jak dlouho obědval?
  g) Mohl pít čaj ve stejné horské chatě, jako obědval?
  h) Jakou rychlostí stoupala lanovka ve vyšší nadmořské výšce?

- Úloha 2: *Z následujícího grafu zjistěte, jakou má pan Novák hodinovou mzdu. Kolik peněz vydělá za osmihodinovou pracovní dobu?*



# FUNKCE PŘÍMÁ ÚMĚRNOST

- Úloha 3: *Jeden jogurt stojí 12,50 Kč. Zakreslete graf závislosti ceny jogurtů na jejich počtu. Určete funkční předpis závislosti.*
- Žáci obvykle postupují přes tabulku. Do prvního řádku si zapíší počet jogurtů, do druhého cenu. Do posledního sloupce pak zapíšeme obecný předpis.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet jogurtů (ks) | 1 | 2 | 3 | … | $x$ |
| Cena jogurtů (Kč) | 12,50 | 25 | 37,50 | … | $12{,}5\,x$ |

- Z tabulky žáci zakreslí graf. Jedná se o diskrétní závislost, proto jsou grafem izolované body. Lze si ale všimnout, že body leží na úsečce (příp. polopřímce – záleží na úhlu pohledu žáka).
- Postupně lze zavést pojmy definiční obor a obor hodnot.
- Je také potřeba zavést pojmy nezávisle a závisle proměnná.
- Z tabulky je vidět také funkční předpis: $y=12,50\,x$

- Úloha 4: *Jeden litr benzínu stojí 28 Kč. Zakreslete graf závislosti ceny benzínu na objemu natankovaného benzínu, když nádrž má 40 litrů.*
- Úloha 5: *Hana, Lucka, Štěpán a Ondra jsou čtyři sourozenci. Nejmladší Hana dostává kapesné 20 Kč za týden, starší Lucka 50 Kč za týden, Štěpán 75 Kč za týden a nejstarší Ondra 100 Kč za týden. Děti si peníze spoří, ale neutrácejí. Zakreslete graf závislosti uspořených peněz jednotlivých dětí na čase (v týdnech).*

# ZOBECNĚNÍ

- Funkce přímá úměrnost je dána předpisem *y*=*ax*, kde *a* je libovolné kladné reálné číslo. Definičním oborem je množina všech reálných čísel. Grafem je přímka, která prochází počátkem soustavy souřadnic.
- V mnoha příkladech ze života lze za *x* volit jen nezáporné číslo a grafem je pouze polopřímka. Definičním oborem pak je množina nezáporných reálných čísel.

# LINEÁRNÍ FUNKCE

- Úloha 6: *Jarošovi chtějí koupit jablka na zimu na uskladnění. V supermarketu, který je v blízkosti jejich bydliště, stojí kilogram jablek 25 Kč. V sadě, který je vzdálen 25 km od jejich domova, stojí kilo jablek 13 Kč. Auto Jarošových má spotřebu 6 litrů na 100 km. Aktuální cena benzínu byla 36 Kč.*
  a) Zakreslete graf závislosti pro obě možnosti koupě jablek (do jedné soustavy souřadnic).
  b) Kolik peněz zaplatí Jarošovi za 10 kg jablek v sadě? Kolik zaplatí za stejné množství v supermarketu?
  c) Určete funkční předpisy jednotlivých závislostí.
  d) Z grafu určete a poté vypočtěte, od kolika kilogramů je pro Jarošovy výhodnější jet pro jablka do sadu.

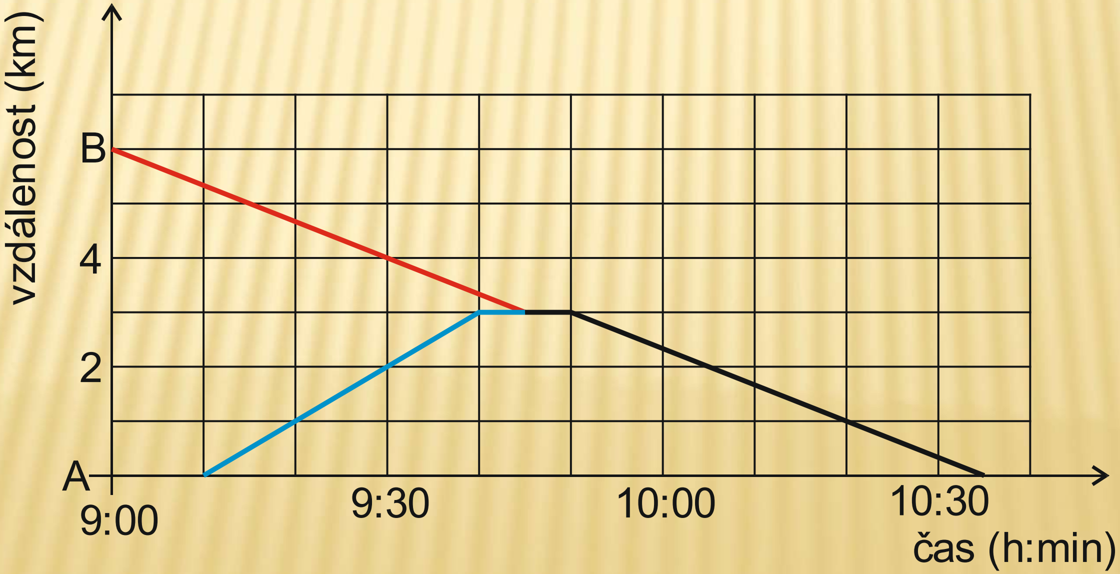
- Úloha 7: *Jakub vyšel v 7:30 z domova do školy, šel rychlostí 3 km/h. Jeho starší sestra Dana zjistila, že zapomněl svačinu a rozhodla se ho dohnat. Vyšla z domova v 7:40 rychlostí 6 km/h. Zakreslete graf závislostí ujitých kilometrů na čase. Z grafu vyčtěte, za jak dlouho Dana dožene Jakuba a jak daleko od domova. Určete funkční předpisy jednotlivých závislostí.*

- Úloha 8: *Dvě kamarádky ze sousedních vesnic se rozhodly, že si dají sraz uprostřed mezi jejich vesnicemi a pak se rozhodnou, jak stráví zbytek dopoledne. Domluvily se, že si vyrazí naproti v 9 hodin.*

  *Barča je z vesnice B a vyrazila přesně na čas. Šla pěšky. Andrea je z vesnice A a vyrazila o několik minut později, proto jela na koloběžce. Chvíli ještě na Barču čekala. Pak se chvíli domlouvaly, co budou dělat a pak šly společně dál.*

# Z grafu vyčtěte následující informace:

a) Jak daleko od sebe jsou vesnice?
b) O kolik minut vyrazila Andrea později než měla?
c) Jakou rychlostí šla Bára?
d) Jakou rychlostí jela Andrea?
e) Jak dlouho čekala na Barču?
f) Jak dlouho se holky domlouvaly, co budou dělat?
g) Kam se potom vydaly a jakou rychlostí?



- Pomocí úloh zakreslujeme grafy, určujeme funkční předpis. Určujeme vlastnosti funkcí, jako je definiční obor, obor hodnot, monotonie, omezenost, minimum, maximum.
- Úloha 9: *Katka má v kasičce 500 Kč. Rozhodla se, že každý den utratí 100 Kč. Určete funkční předpis závislosti a zakreslete graf. Za kolik dní utratí všechny peníze? Určete vlastnosti funkce.*

# ZOBECNĚNÍ LINEÁRNÍ FUNKCE

- Lineární funkce má předpis $y=ax+b$, kde $a$, $b$ jsou reálná čísla.
- Grafem je přímka.
- Je-li $a$ kladné, je funkce rostoucí, je-li $a$ záporné, je funkce klesající, je-li $a=0$, je funkce konstantní. Koeficient $b$ určuje posunutí po ose $y$.
- Definiční obor lineární funkce je množina všech reálných čísel.

- Úloha 10: *Simona si napouštěla vanu. Nejdříve do vany přitékala 7 minut voda konstantním přítokem 0,5 l za sekundu. Pak se Simona půl hodiny koupala, voda nepřitékala ani neodtékala. Potom se voda vypouštěla konstantním odtokem 0,3 l za sekundu. Kolik litrů vody si Simona napustila? Jak dlouho se voda vypouštěla?*
- Pro funkční závislost objem vody ve vaně na čase zakreslete graf, určete funkční předpisy a určete vlastnosti.

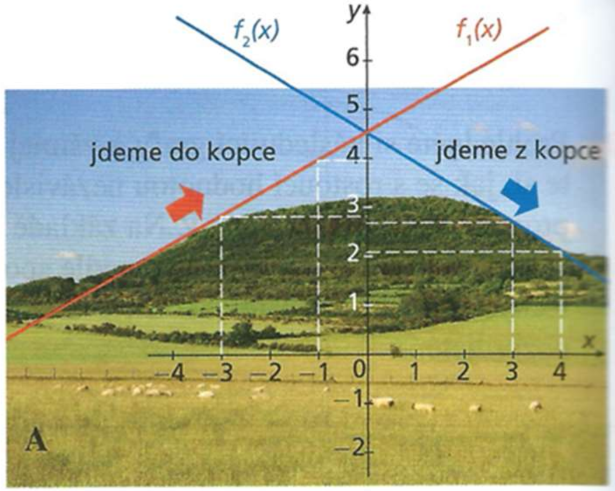
# URČOVÁNÍ MONOTONIE

- Někdy ... e
  funkce ... ají to
  z grafu ... brázek
  pro vys...
- Problé ... t, co
  když p...
- Vhodn ... ko v
  úloze 1...

**Jak na to?**

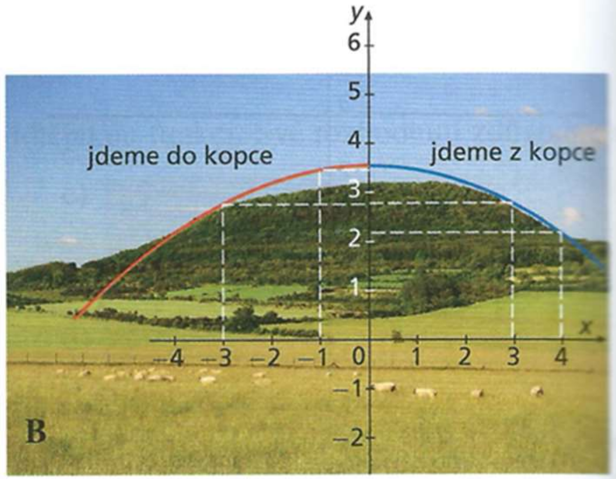
Na obrázcích vidíte horu Říp. Pozorujme nejprve obrázek **A**, na kterém jsou grafy funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Sledujme funkci $f_1(x)$.

Když se po jejím grafu pohybujeme ve směru červené šipky, tj. hodnota $x$ se zvětšuje, vidíme, že se zvětšuje i hodnota závisle proměnné $y$. Můžeme tuto vlastnost funkce $f_1$ nějak popsat? Platí, že když vybereme jakékoli hodnoty $x_1 < x_2$ proměnné $x$, pak pro odpovídající hodnoty proměnné $y$ bude platit $f(x_1) < f(x_2)$.




Například $-3 < -1$ a pro funkční hodnoty platí $2{,}81 < 3{,}94$. Takové vlastnosti funkce říkáme, že **funkce je rostoucí**.

Grafem funkce $f_2(x)$ je také přímka. Když se však po této přímce pohybujeme ve směru modré šipky, tj. tak, aby se hodnota $x$ zvětšovala, vidíme, že se hodnota proměnné $y$ zmenšuje. Pro tuto funkci platí: jestliže $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) > f(x_2)$.




Například $3 < 4$ a pro funkční hodnoty platí $2{,}68 > 2{,}08$. Takové vlastnosti funkce říkáme, že **funkce je klesající**.

Když se podíváme na obrázek **B**, je jasné, že červeně vyznačený graf, který „kopíruje“ povrch Řípu, je grafem funkce, která je nejprve rostoucí a vpravo od vrcholu klesající.

# CO JE A NENÍ FUNKCE

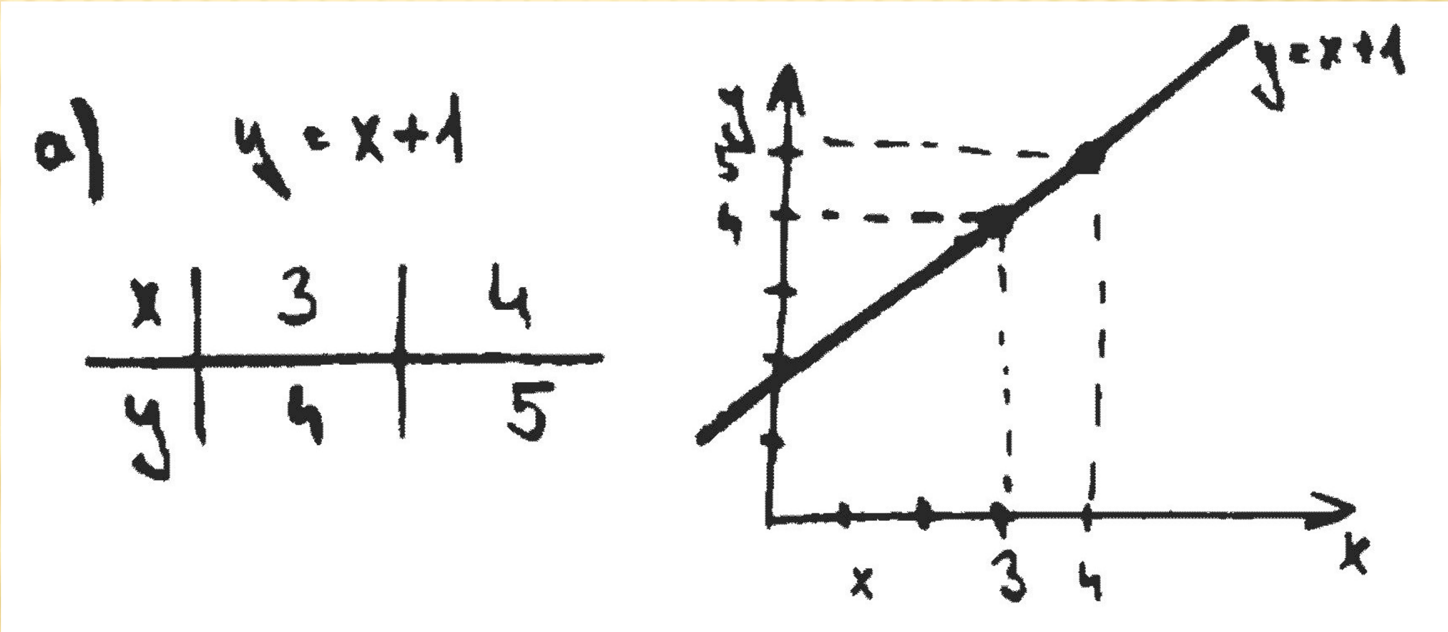
- Definice funkce na ZŠ říká: *Funkce f je předpis, který každému číslu x z nějaké množiny přiřazuje právě jedno číslo y.* Problém je výraz „právě jedno“. Žáci intuitivně nechápou, proč by tomu tak mělo být.
- Vhodné jsou opět časové závislosti, na kterých lze toto pravidlo vysvětlit.

# STATICKÉ A DYNAMICKÉ ZAKRESLOVÁNÍ GRAFU

- Rozlišujeme statické a dynamické metody zakreslování grafu.
- V případě statických metod postupuje žák pomocí dosazení několika hodnot za x. Vytvoří tabulku a zakreslí graf.
- V případě dynamických metod postupuje od základní funkce $y=x$ a postupně ji transformuje.

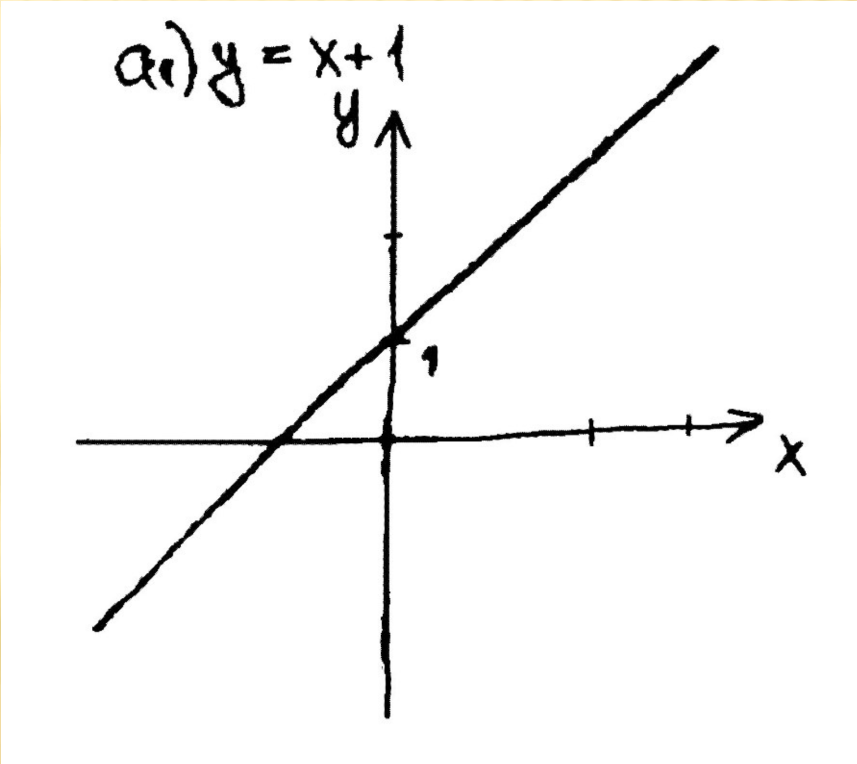
# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Žák gymnázia zakresluje graf funkce $y = x + 1$ statickou metodou:



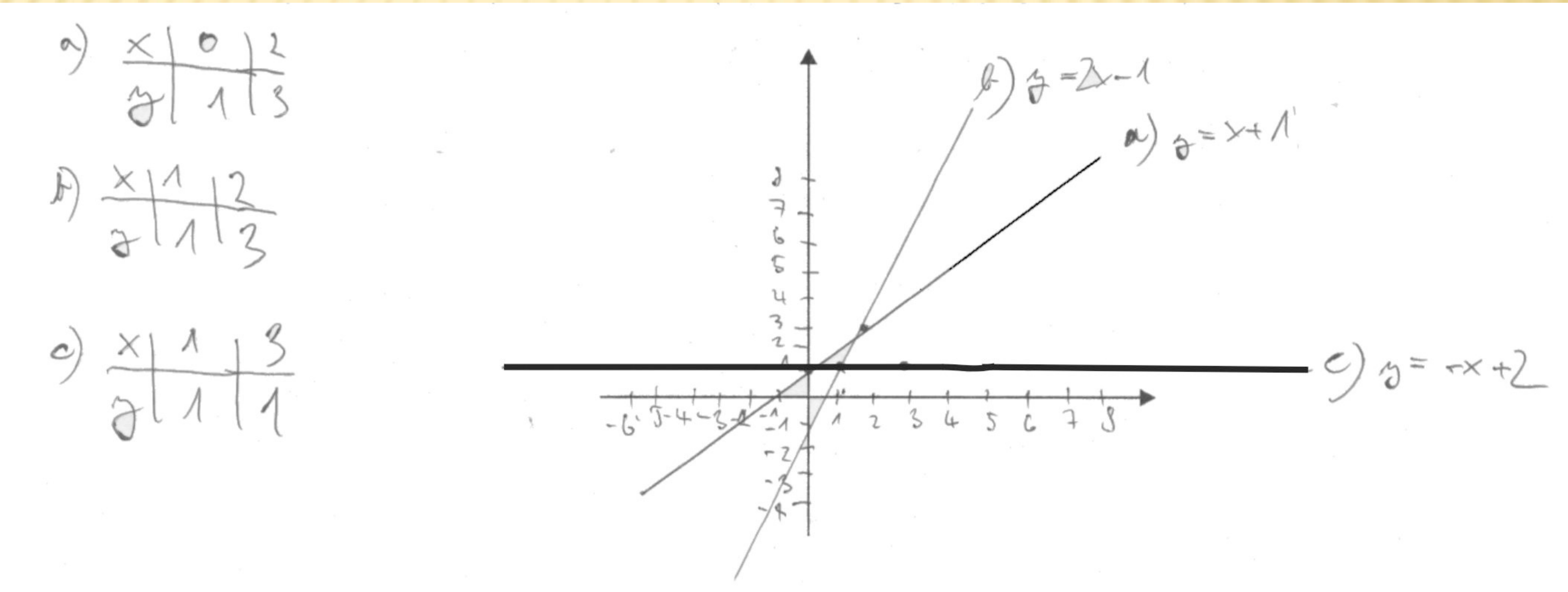
# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Žák gymnázia používá dynamickou metodu k zakreslení grafu funkce $y = x + 1$. Obrázek je spíše kvalitativního rázu.



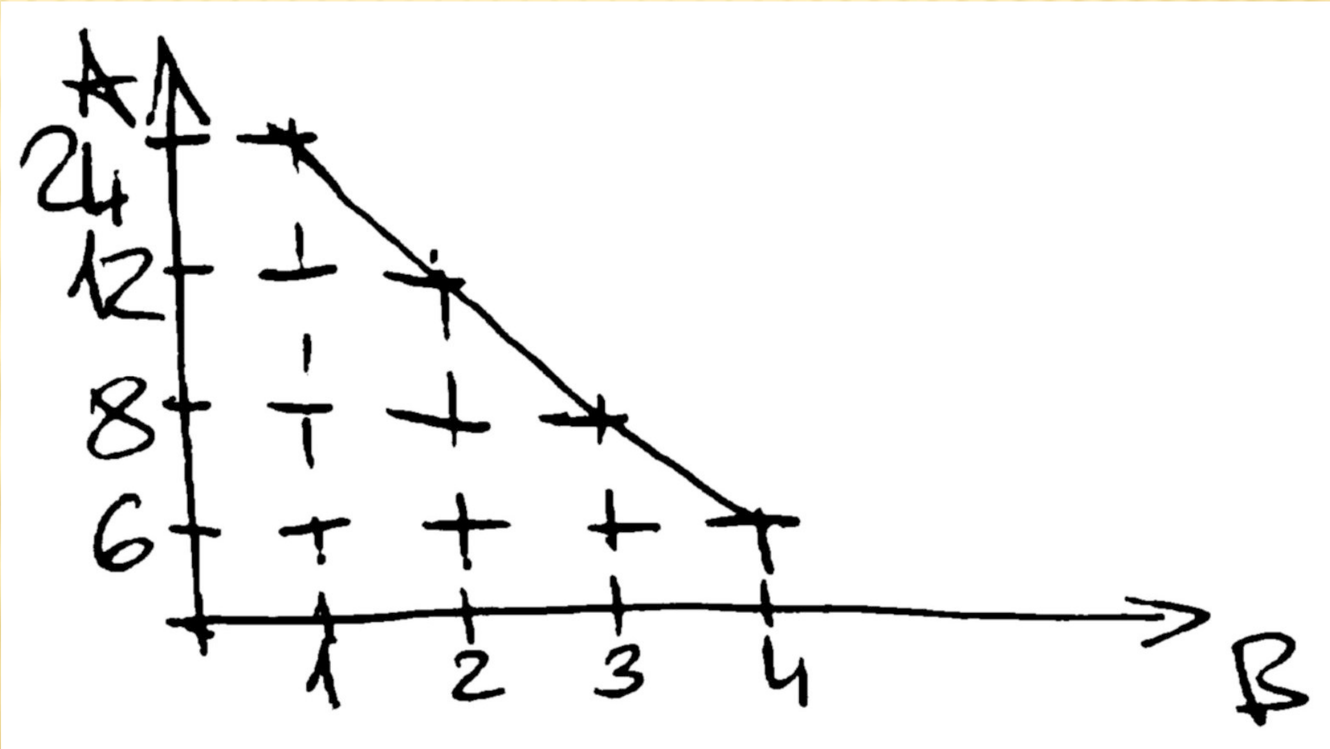
# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Statické zakreslení grafů lineárních funkcí žákem gymnázia – žák nemá spojeny poznatky *konstantní funkce-koeficient u x*:



# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Žák gymnázia zakresluje graf funkce $y = \frac{24}{x}$ statickou metodou:

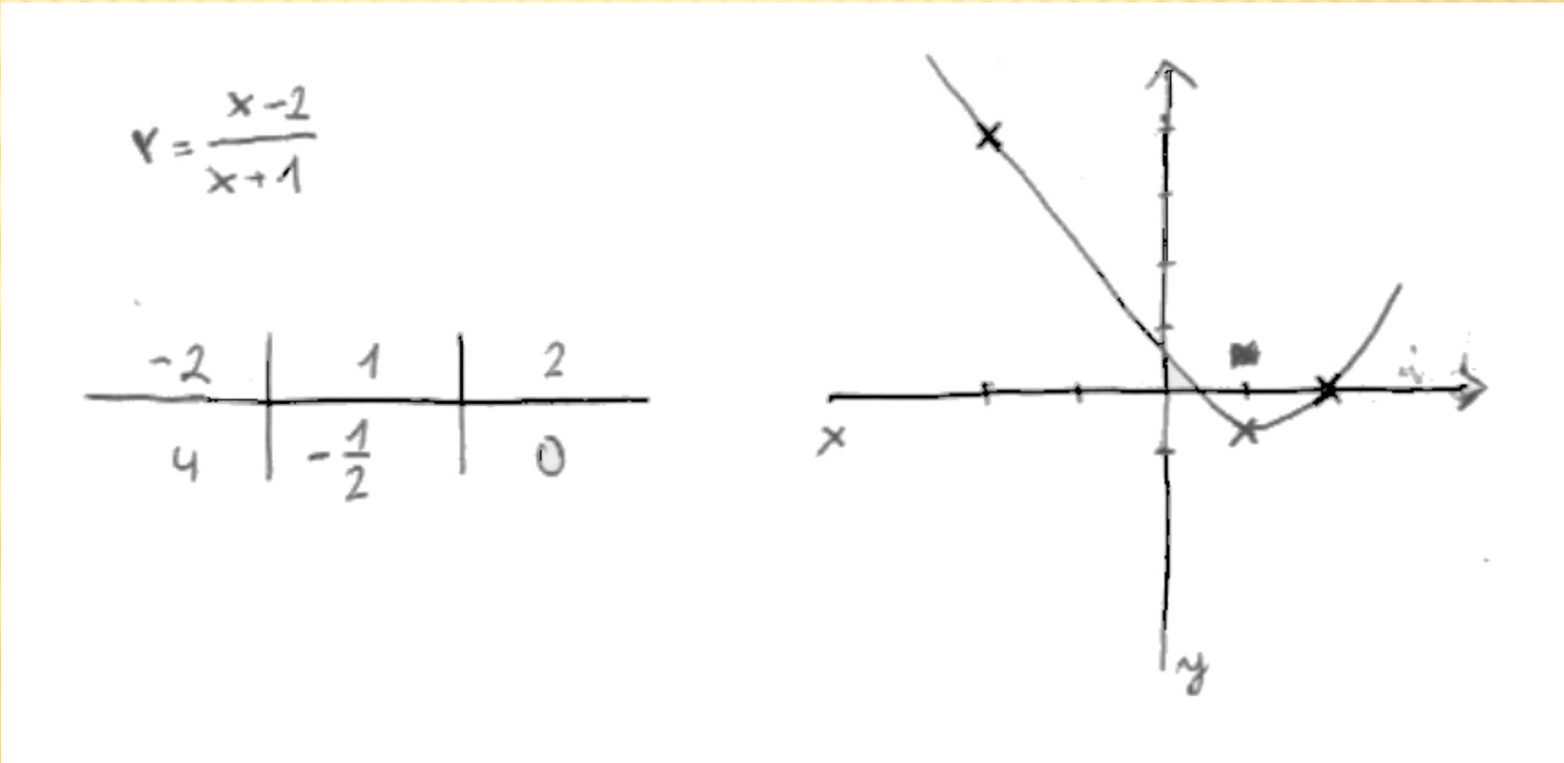


# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Žák gymnázia zakresluje kvalitativně graf funkce $š = \frac{24}{d}$:

# UKÁZKY ŽÁKOVSKÝCH ŘEŠENÍ

- Žák 4. ročníku gymnázia se pokusil zakreslit graf lineární lomené funkce statickou metodou:



- Ukazuje se, že statická metoda je nevhodná zejména z toho důvodu, že ji žáci používají i u dalších funkcí, např. kvadratické nebo nepřímé úměrnosti. Jenže když žák neví, že nepřímá úměrnost má bod nespojitosti, nemůže graf správně zakreslit.
- Úloha 11: *Zkreslete graf funkce* $y = 2x - 3$. *Postupujte a) staticky, b) dynamicky.*

# FUNKCE NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

- S nepřímou úměrností se žáci setkávali již od 7. ročníku. Můžeme připomenout na slovní úloze, jak se s nepřímou úměrností pracovalo.
- Úloha 12: *Fotbalové hřiště je od školy vzdáleno 3 km. Jenda jde po škole na fotbal pěšky průměrnou rychlostí 4 km/h, Tonda jede na koloběžce průměrnou rychlostí 9 km/h, pan Loučka veze Edu autem průměrnou rychlostí 30 km/h. Jak dlouho bude klukům trvat přemístění ze školy na hřiště?*

- Závislost z úlohy 12 můžeme zapsat do tabulky a sestrojit graf.
- *Kolikrát* větší rychlostí se pohybují, *tolikrát* kratší dobu trvá přemístění.
- Úloha 13: *Obdélník má obsah 24 čtverečních jednotek. Jaké mohou být délky jeho stran?*
- Kolikrát větší je délka strany *a*, tolikrát menší je délka strany *b* obdélníku.

# ZOBECNĚNÍ

- Funkce nepřímá úměrnost je dána předpisem *y=k/x*, kde *k* je libovolné reálné číslo různé od 0 a nazývá se **koeficient nepřímé úměrnosti.**
- Grafem nepřímé úměrností je **hyperbola.**
- Definičním oborem nepřímé úměrnosti je množina reálných čísel bez nuly.
- Úloha 14: *Zakreslete grafy funkcí* a), $y = \frac{2}{x}$ b)$y = -\frac{0,5}{x}$, c) $y = \frac{x-2}{x+1}$ (lineárně lomená funkce). *Určete vlastnosti těchto funkcí.*

$a^2$

# KVADRATICKÁ FUNKCE

- Můžeme začít závislostí obsahu čtverce na délce jeho strany. Vytvoříme tabulku, do které budeme doplňovat hodnoty a z nich zakreslíme graf.

| Délka strany $a$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Obsah čtverce $a^2$ | | | | | | | | | |

- Žáci získají část křivky, která se nazývá parabola.
- Dále můžeme daný příklad různě modifikovat. Žáci mohou do jednoho grafu nakreslit následující závislosti: závislost obsahu obdélníku na délce jedné jeho strany $x$, je-li druhá jeho strana rovna $\frac{1}{2}\ x$; závislost obsahu trojúhelníku se základnou $x$, je-li jeho výška $4x$; závislost obsahu kruhu, je-li jeho poloměr $x$. Žáci si mohou uvědomit, jaký vliv na tvar paraboly má koeficient u $x^2$.

# ZOBECNĚNÍ

- Od konkrétních příkladů můžeme přejít k funkci $y=x^2$. Žáci si vytvoří tabulku, tentokrát za $x$ mohou volit i záporná čísla. Zakreslí graf.
- Funkci, jejíž předpis můžeme vyjádřit rovnicí ve tvaru $y=ax^2$, kde $a$ je libovolné nenulové číslo, nazýváme **kvadratická funkce.**
- Definičním oborem funkce je množina všech reálných čísel.
- Grafem kvadratické funkce je **parabola.**

- Dále žáky učíme zakreslovat grafy – pokud možno dynamicky (vždy potřebujeme 3 body). Šikovnějším žákům je možno ukázat i posunování paraboly po osách.
- Úloha 15: *Zakreslete grafy funkcí* a) $y = 0{,}5x^2 + 2$, b) $y = -(x-1)^2$. *Určete vlastnosti daných funkcí.*
- Na střední škole žáci rozšiřují poznatky o kvadratických funkcích, učí se zakreslovat graf obecné kvadratické funkce.
- Úloha 16: *Zakreslete graf funkce* $y = -x^2 - x + 6$ *a určete její vlastnosti.*

## GONIOMETRICKÉ FUNKCE

- Goniometrické funkce jako takové se na ZŠ nevyučují. Žáci pouze pracují s poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku. Nejčastěji se proto s funkcemi sin, cos, někdy tg setkají v geometrii, při výuce podobnosti trojúhelníků. Nezakreslují však graf goniometrických funkcí, neurčují jejich vlastnosti.
- S goniometrickými funkcemi jakožto funkcemi se setkávají až studenti středních škol. Učí se pracovat s grafem, jednotkovou kružnicí, určují vlastnosti funkcí (přidá se i funkce kotangens).

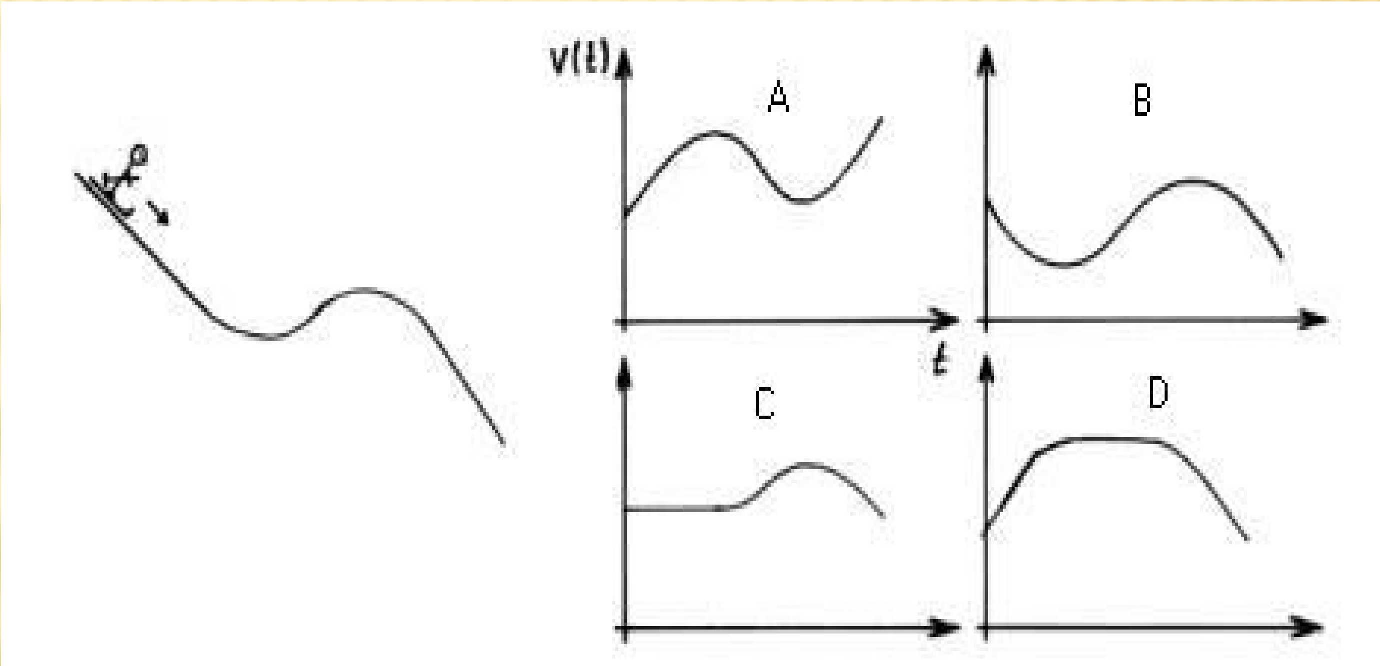
# GONIOMETRICKÉ FUNKCE

- Úloha 17: *Zkreslete grafy funkcí* a) $y = 2\cos(x-\pi)+1$, b) $y = \sin(0{,}5\,x)$ *a určete jejich vlastnosti.*
- Úloha 18: Z jednotkové kružnice určete hodnotu $\mathrm{t}g\,\frac{3}{4}\pi$.

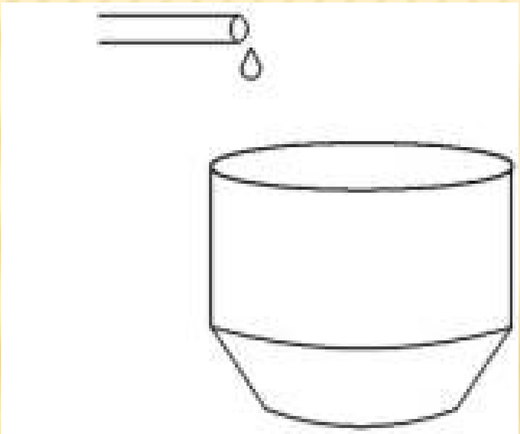
# ROZVOJ FUNKČNÍHO MYŠLENÍ

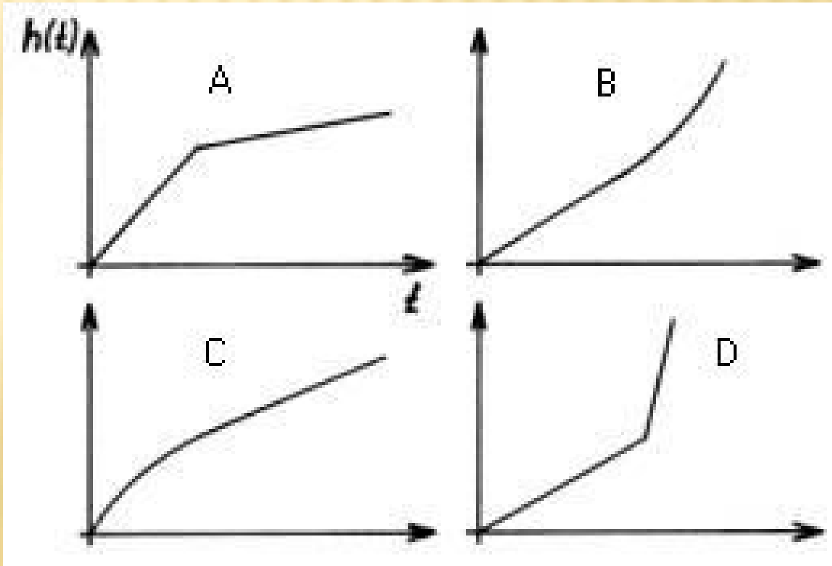
- Primárním cílem vzdělávání žáků v oblasti funkcí je osvojení určitých znalostí a dovedností, které umožňují řešit různé úkoly spojené s funkcemi.
- Druhým, ne tak patrným cílem, je rozvoj funkčního myšlení. Funkční myšlení používáme tehdy, když si utváříme názorné představy o vztahu dvou proměnných. Následující typy úloh pomáhají žákům utvářet funkční myšlení (úlohy převzaty z Eisenmann, 2005, 2006)

- Grafy vyjadřují závislost rychlosti lyžaře *v*(*t*) na čase *t*. Jen jeden z nich odpovídá situaci zachycené na obrázku vlevo. Zaškrtněte jej.

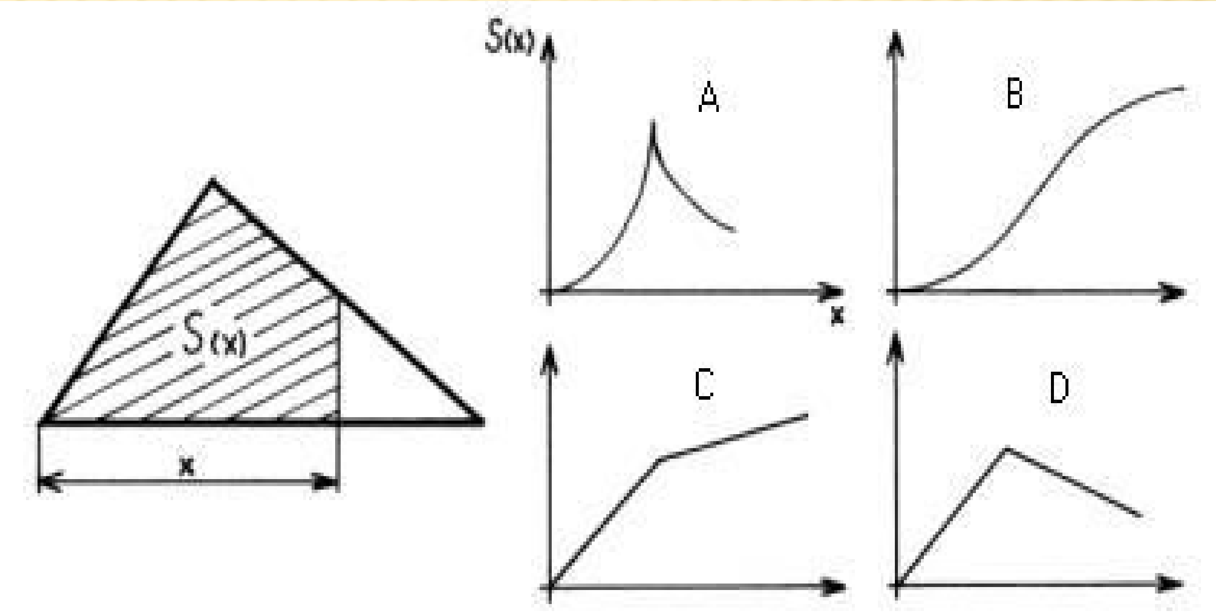


- Nádoba se v čase $t = 0$ začne naplňovat stálým přítokem vody. Grafy vpravo vyjadřují závislost výšky hladiny $h(t)$ na čase $t$. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.

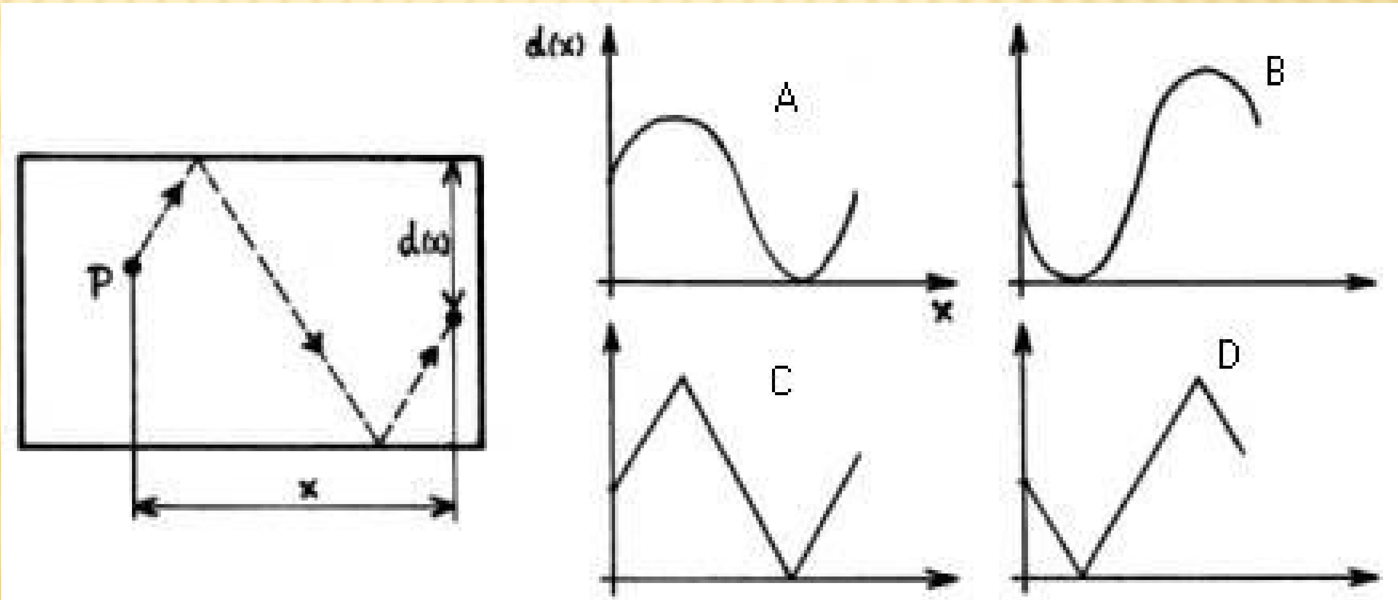




- Grafy vpravo vyjadřují závislost obsahu vyšrafované části trojúhelníku $S(x)$ na vzdálenosti $x$. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



- Kulečníková koule je odpálená z bodu *P* ve směru čárkované čáry. Grafy vpravo vyjadřují závislost vzdálenosti *d*(*x*) koule od horní hrany stolu na vzdálenosti *x*. Jen jeden z nich odpovídá této situaci. Zaškrtněte jej.



# DEFINICE

- Nyní si uvedeme základní definice pojmů, se kterými pracujeme v učivu funkcí na základní škole.
- Ve výuce se ale snažíme vyvarovat formalismu. Definice pojmu by se proto neměla objevit v úvodu probírání daného pojmu, ale po vyřešení dostatečného počtu úloh, které žáci začnou chápat.
- Definice (např. graf funkce, monotonie) by měly vycházet z intuitivního vnímání pojmu žáky, aby žákům slova dávala smysl.

- Funkce (ZŠ): Předpis, podle kterého se každému číslu *x* z určité množiny přiřazuje právě jedno *y*.
- Reálná funkce jedné reálné proměnné (VŠ): Zobrazení, které přiřazuje každému reálnému číslu *x* z D(f) právě jedno reálné číslo *y* z R. Množina D(f) se nazývá definiční obor funkce.
- Grafem funkce *f* nazýváme množinu všech bodů $[x,y]$ roviny $O_{xy}$, jejichž kartézské souřadnice jsou sobě přiřazené hodnoty proměnné *x* a funkční hodnoty $f(x)$.

# SPECIFICKÉ VLASTNOSTI FUNKCÍ PROBÍRANÉ NA ZŠ

- Funkce *f* se nazývá zdola omezená na množině $M \subset R$, jestliže existuje *d* z R takové, že pro všechna *x* z M platí: $f(x) \geq d$.
- Funkce *f* se nazývá shora omezená na množině $M \subset R$, jestliže existuje *d* z R takové, že pro všechna *x* z M platí: $f(x) \leq d$.
- Funkce se nazývá omezená na množině *M*, je-li na dané množině omezená zdola i shora.

- Funkce se nazývá **rostoucí** (**neklesající**) na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$).
- Funkce se nazývá **klesající** (**nerostoucí**) na množině $M \subset D(f)$, jestliže pro všechna $x_1, x_2 \in M$ platí: Jestliže $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
- Rostoucí, resp. klesající funkce na dané množině se souhrnně nazývají **ryze monotónní funkce** na dané množině. Neklesající, resp. nerostoucí funkce na dané množině se souhrnně nazývají **monotónní funkce** na dané množině.

# PROGRAMY PRO PRÁCI S FUNKCEMI

- Pro výuku funkcí na ZŠ je možno doporučit dva programy: Geogebru a Graph. Pomohou nám dokreslit představu vytváření grafu pro některé funkce.
- Programy je však vždy nutné začít využívat až tehdy, když je učivo řádně probrané a žáci mu do značné míry rozumí. Není možné nahradit zakreslování grafu na papíře vykreslováním pomocí počítačového programu.

- Geogebra
  - Dá se pracovat on-line
  - Umožňuje provádět dynamické změny
- Graph
  - Obrázek lze uložit jako JPG. Žáci proto tohoto programu mohou využívat při vytváření projektů.

# ÚKOL

- Nastudujte z publikace Polák: *Didaktika matematiky* historický přehled vzniku a vývoje pojmu funkce.

# LITERATURA


- Binterová, H., Fuchs, E., Tlustý, P.: *Matematika. Algebra. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia.* Plzeň: Fraus, 2010
- Budínová, I.: *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ.* Disertační práce. Brno: MU, 2010
- Eisenmann, P.: Test funkčního myšlení žáků a studentů. In: *Matematika – fyzika – informatika* 15, 2005/2006. ISSN 1210-1761
- Eisenmann P.: Možnosti rozvoje funkčního myšlení žáků ve výuce matematiky na základní škole. In: *Sborník příspěvků celostátní konference Jak učit matematice žáky ve věku 11 – 15 let*. JČMF, Hradec Králové, 2006, 53 - 62
- Kuchařová, L.: *Přístupy k zavedení lineární a kvadratické funkce na různých stupních škol.* Bakalářská práce. Brno: MU, 2016
- Polák, J.: *Didaktika matematiky.* Plzeň: Fraus, 2014