Irena Budínová

STATISTIKA A PRAVDĚPODOBNOST NA ZŠ

STATISTIKA

- Původ slova „statistika“ pochází z latiny (status – stát) a nejprve představovala nauku o státu. Blíže k dnešnímu pojetí statistky měla tzv. anglická politická aritmetika (zakl. J. Graunt a W. Petty), která se zabývala shromažďováním číselných údajů o ekonomických a demografických jevech.
- Počátky moderní statistiky jsou kladeny do 19. století a jsou spojovány se jménem Belgičana Adolfa Quételéta, který se zabýval číselně vyjádřitelnými vlastnostmi společnosti.

- Další význam pro rozvoj statistiky mělo založení anglické statistické školy (aplikace v biologii, zemědělství – F. Galton, K. Pearson, R. A. Fischer). Na vývoji metod matematické statistiky mají od počátku 20. století významný podíl B. Gosset (pseudonym Student), P. Čebyšev, A. Ljapunov, A. Markov, Kolmogorov, Bernstejn, Romanovskij a další.
- Ve vývoji statistiky nastala významná proměna ve 30. letech, kdy vzniká moderní, analytická, induktivní statistika, jejímž základním pojmem je výběr. S použitím matematických metod se stala samostatným vědním oborem.

ZÁKLADNÍ POJMY

- Statistika je vědní obor, který se zabývá hromadným zkoumáním, pozorováním či šetřením určitých objektů a jevů.
- Statistika je soubor metod, které nám umožňují činit různá rozhodnutí, založená na pozorování, porovnávání, posuzování a zhodnocení množství informací.

- Statistické šetření se provádí na statistickém souboru. Statistický soubor je množina – skupina prvků (objektů, osob, událostí aj.), které mají společné vlastnosti.
- Rozlišujeme statistické soubory základní a výběrové. Vymezení základního souboru může někdy přinášet problémy, šetření na celém souboru může být časově náročné nebo i nemožné, proto v praxi používáme soubor výběrový (podmnožina statistického souboru). Tento soubor by měl vypovídat o základním souboru, z kterého byl odvozen (jinak dochází ke zkreslení výsledků).

- Statistický soubor lze rozdělit na dvě části: Na část, ve které nastává zkoumaný jev a část, ve které zkoumaný jev nenastává. Základním statistickým úkonem je třídění, které provádíme podle jistých kriterií (rozklad množiny na třídy).
- Respektujeme zásadu úplnosti (každý prvek statistického souboru musí být v některé třídě), a zásadu jednoznačnosti (žádný prvek nesmí být současně ve dvou třídách). Třídění může být dichotomické, trichotomické, obecně multitonické (např. hledání v klíči pro určování rostlin).

- Prvky statistického souboru se nazývají **statistické jednotky**. Počet jednotek statistického souboru se nazývá **rozsah souboru**.
- Každá statistická jednotka je nositelem určitých vlastností. Ty vlastnosti, které jsou důležité z hlediska účelu provádění určitého statistického zkoumání, se nazývají **statistické znaky**. Statistické jednotky tedy vyšetřujeme z hlediska určitého znaku nebo několika znaků, které si zvolíme.

- Statistické znaky dělíme na **kvantitativní** (číselné) a **kvalitativní** (slovní).
- Některé kvantitativní znaky mohou nabývat pouze jednotlivých izolovaných hodnot - **diskrétní** znaky (např. počet obyvatel obce), nebo nabývají libovolných reálných hodnot z určitého intervalu – **spojité** znaky (např. hektarové výnosy).
- V případě, že kvantitativní znak nabývá pouze dvou variant, hovoříme o znaku **alternativním** (např. muž, žena), nabývá-li více variant, hovoříme o znaku **multiplikativním** (např. kvalifikace, státní příslušnost).

- Číslo, které udává, kolikrát se daná hodnota znaku ve statistickém souboru vyskytuje, se nazývá **absolutní četnost** hodnoty znaku. Součet jednotlivých četností sledovaného znaku je roven rozsahu souboru.
- Poměrná – **relativní četnost** jevu je poměr absolutní četnosti a rozsahu souboru. Součet relativních četností je roven jedné. Relativní četnosti lze vyjadřovat také v procentech, pak je jejich součet 100 %.

- Úloha: K následujícím statistickým souborům určete statistickou jednotku a statistické znaky:
  - Všichni žáci třídy
  - Všechny dopravní prostředky, které projedou kolem určitého stanoviště
  - Všechny hody hrací kostkou
  - Všechna slova na jedné straně knihy
  - Všechny dopravní nehody v jednom roce v ČR

DIAGRAMY

- Rozdělení četností znaků vyjadřujeme buď v tabulce nebo graficky pomocí diagramů. Diagram vyjadřuje vzájemný vztah mezi dvěma či více proměnnými veličinami pomocí přehledných grafických symbolů. Rychle a názorně poskytne obrazovou informaci o studovaném jevu.
- Rozlišujeme diagramy obrázkové, bodové, sloupkové (histogramy), hůlkové (úsečkové), spojnicové (polygon četností), kruhové.

CHARAKTERISTIKY POLOHY

- Aritmetický průměr je definován jako podíl součtu hodnot znaku zjištěných u všech jednotek souboru a počtu všech jednotek souboru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Vlastnosti aritmetického průměru:
  - Matematické vyjádření aritmetického průměru je jednoduché a snadno použitelné pro odvození dalších vztahů.
  - Výpočet je založen na všech pozorovaných hodnotách.
  - Součet všech odchylek jednotlivých hodnot od aritmetického průměru je vždy roven nule.
  - Aritmetický průměr je ovlivňován krajními hodnotami.

- **Modus** znaku x je hodnota s největší četností. Udává, který výsledek je zastoupen nejvíce, nepodává informace o krajních hodnotách.
- **Medián** je prostřední hodnota znaku, jsou-li hodnoty uspořádány podle velikosti.
- **Harmonický průměr** můžeme využít např. při výpočtu průměrné rychlosti.

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

- Geometrický průměr se používá např. při výpočtu průměrného tempa růstu za jedno období.

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

- Na základní škole by žáci měli umět určovat aritmetický průměr, modus a medián, znát jejich výhody a slabé stránky.

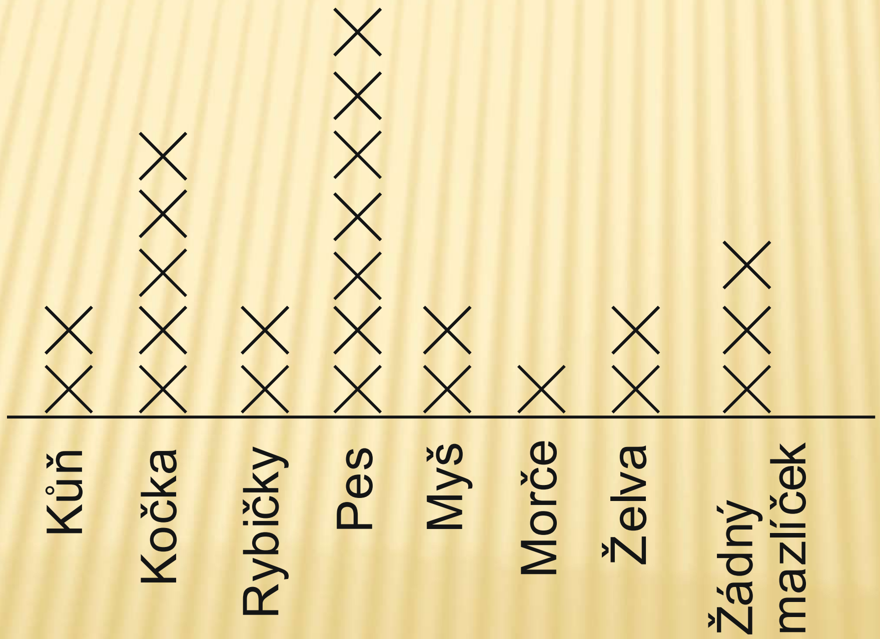
ZÁKLADY STATISTIKY NA ZŠ

- Žáci by se na ZŠ měli setkat se statistikou ve formě zpracování dat. Na konkrétních příkladech se učí potřebné pojmy, učí se data zaznamenávat do tabulek a diagramů.
- Pracují s programem MS Excel a rovněž s Internetem.

- Příklad: zaznamenávají domácí mazlíčky všech žáků třídy. Mohou je zapsat do tabulky:

Kůň	//
Kočka	~~////~~
Rybičky	//
Pes	~~////~~//
Myš	//
Morče	/
Želva	//
Žádný mazlíček	///

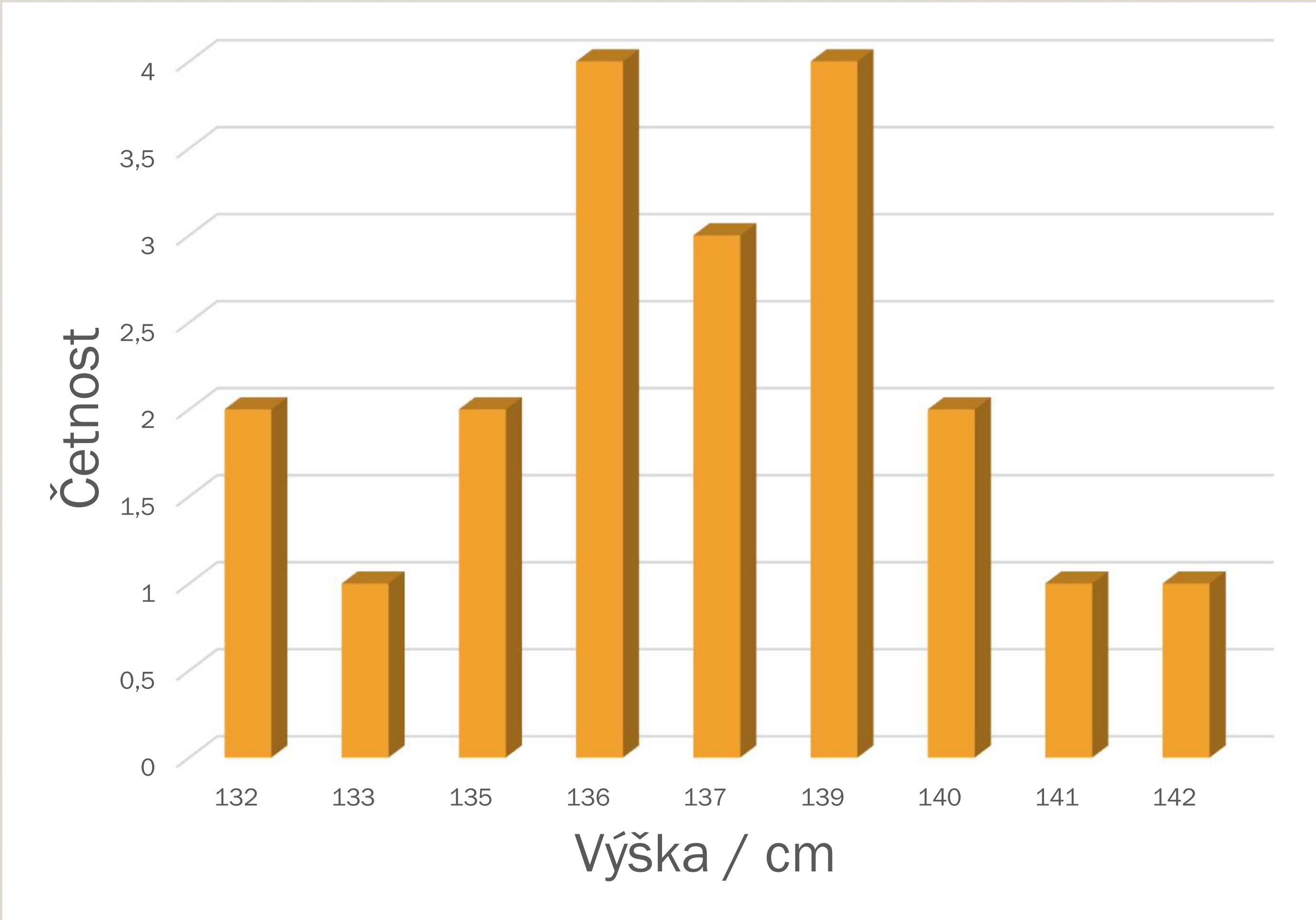
- Data je také možné zaznamenat do obrázkového diagramu, kde je každá položka znázorněna jedním křížkem.



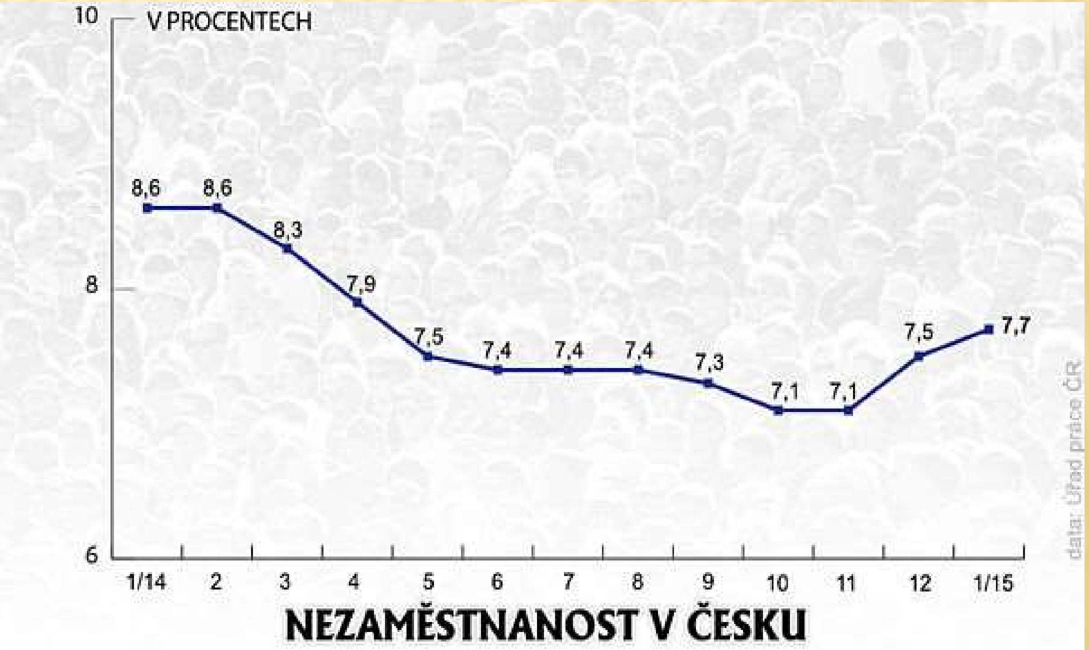
- Žáci jsou schopni z tabulky či diagramu určovat různé charakteristiky souboru: absolutní četnosti a relativní četnosti jednotlivých jevů.
- Úloha: Ve třídě s 20 žáky byly naměřeny následující tělesné výšky žáků. Určete, co je statistický soubor, statistické jednotky, statistický znak a vytvořte tabulku relativních četností.

Výška / cm	132	133	135	136	137	139	140	141	142
Četnost	2	1	2	4	3	4	2	1	1

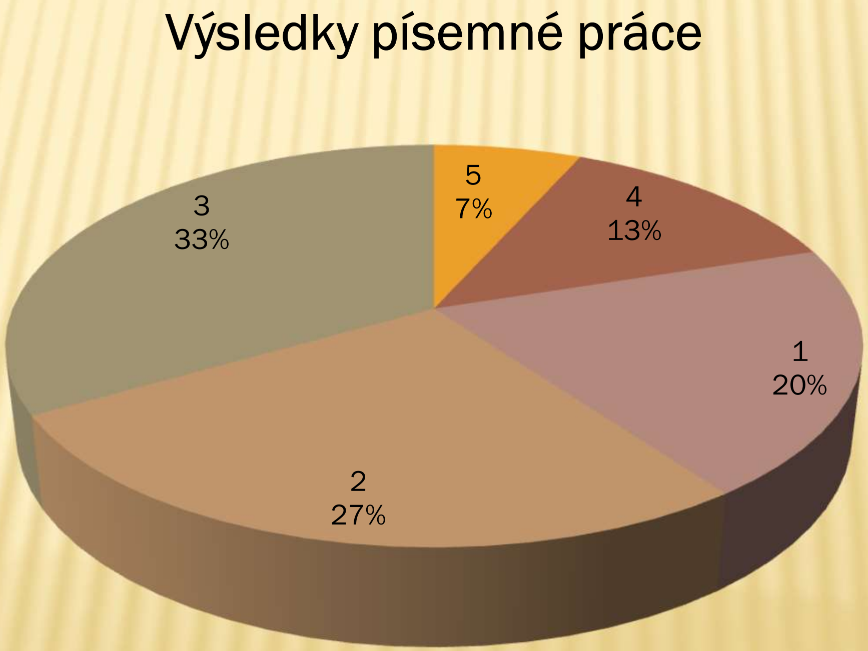
- Údaje zaznamenáme do histogramu.



- Spojnicový diagram se nejlépe hodí na průběžně se měnící data, např.:
- **Příklad:** Na následujícím spojnicovém diagramu vidíme vývoj nezaměstnanosti v ČR od ledna 2014 do ledna 2015. Nezaměstnanost je uvedena v procentech.



- Kruhový diagram dobře slouží, chceme-li opticky porovnat procentuální zastoupení jednotlivých položek. Např. následující kruhový diagram znázorňuje zastoupení známek z písemky z matematiky v jedné třídě:



ZÁKLADY PRAVDĚPODOBNOSTI NA ZŠ

- Úvahy o náhodě spadají do renesance, kdy obchodníci a finančníci chtěli znát míru rizika nebo zisku zamýšlených obchodních transakcí. Také Galileo Galilei se zajímal o míru přesnosti svých, mnohokrát opakovaných pokusů.
- Hazardní hráči tušili, že do her zasahuje kromě osudu a podvodů také něco zákonitého. Právě hazardní hry měly rozhodující vliv na vývoj nové disciplíny – teorie pravděpodobnosti.

- Počátky jsou spojeny se jménem Luca Pacioloho (1445 - 1514), o rozvoj teorie pravděpodobnosti se zasloužili Girolamo Cardano (1501 – 1576), Galileo Galilei (1564 – 1642), Blaise Pascal (1623 – 1662), Pierre de Fermat (1601 – 1665), Christiaan Huyghens (1629 – 1695), Jacob Bernoulli (1654 – 1705).
- Klasickou definici pravděpodobnosti vyslovil Abraham Moivre (1667 – 1754) a zdokonalil Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827).

- Teorie pravděpodobnosti proniká do mnoha dalších vědních oborů – teorie her, teorie informací, kybernetiky, psychologie, sociologie, pojišťovnictví, finančnictví, statistiky, biologie, zemědělství aj.
- Základy pravděpodobnosti jsou důležité pro každého člověka. Je potřebné umět odhadnout, jaká je pravděpodobnost např. výhry v loterii či výhry na výherním automatu.

PROPEDEUTIKA PRAVDĚPODOBNOSTI

- Na základní škole jde zejména o rozvoj pravděpodobnostního myšlení. Při výuce pravděpodobnosti bychom měli respektovat dvoustupňový přístup.
- V první části uvádět kvalitativní hodnocení – úsudky o pravděpodobnosti některých jevů.
- Ve druhé etapě provádět kvantitativní ohodnocení, uvést pravděpodobnost jako číslo. Pravděpodobnost chápeme v klasickém slova smyslu a uvádíme ji jako poměr počtu jevů příznivých ku počtu všech možných jevů

Nemožné Nepravděpodobné Pravděpodobné Jisté

- **Příklad:** Následující jevy umísťujte na pravděpodobnostní osu.
  - V únoru bude sněžit.
  - Prase bude létat.
  - 1. 5. bude zavřená škola.
  - Autobus nezastaví na zastávce.
  - Slunce bude svítit o půlnoci.
  - Při házení šesti kostkami nastane jev:
    - padnou všechny počty ok, tzv. postupka
    - alespoň na dvou kostkách padne stejný počet ok
    - nenastane žádný z jevů A, B
    - padne součet 7

ZÁKLADNÍ POJMY

- Náhoda je něco, co nemůžeme ovlivnit.
- V praktických činnostech, ve vědě nebo ve výzkumu se často setkáváme s pokusy, které i při dodržení předepsaných podmínek mohou vést k různým výsledkům, výsledky těchto pokusů se mohou od jednoho provedení pokusu k provedení druhého měnit.
- Výsledky těchto pokusů závisí nejen na předepsaných podmínkách, ale také na náhodě. Nazýváme je náhodné pokusy.

- Uvažujme, že u každého náhodného pokusu jsme schopni předem určit všechny jeho možné výsledky, a to tak, že se navzájem vylučují, tj. nastane-li jeden, nenastane druhý a že jeden z nich nastane vždy.
- Množinu všech takto stanovených výsledků nazýváme **množina všech možných výsledků pokusu** a značíme ji Ω. Prvky této množiny značíme ω.

- Podmnožiny množiny všech možných výsledků nazýváme jevy. Označujeme je zpravidla písmeny A, B, C, …
- V daném pokusu můžeme rozlišit tolik jevů, kolik má množina všech možných výsledků podmnožin.
- Prázdná množina charakterizuje jev nemožný, množina Ω charakterizuje jev jistý.

- Pravděpodobnost P(A) jevu A je definována jako součet pravděpodobností příznivých jevu A

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}$$

kde *m(A)* je počet výsledků příznivých jevu A a *m* je počet všech možných výsledků.

- Pravděpodobnost jevu nemožného je rovna nule: $P(\emptyset) = 0$
- Pravděpodobnost jevu jistého je rovna jedné: $P(\Omega) = 1$
- Pro pravděpodobnost libovolného jevu A platí: $0 \leq P(A) \leq 1$.

SČÍTÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ

- Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem vylučujících se jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, jestliže $A \cap B = ø$.

- Pravděpodobnost sjednocení jevů, které se navzájem nevylučují, tj. $A \cap B$ ø, je rovna

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- Pravděpodobnost jevu opačného je rovna rozdílu $P(A´) = 1 - P(A)$.

NEZÁVISLOST JEVŮ

- Nezávislostí dvou jevů rozumíme to, že nastání jednoho jevu nemá vliv na nastání nebo nenastání druhého jevu.
- Matematicky to vyjádříme tak, že pravděpodobnost současného nastání nezávislých jevů je rovna součinu jejich pravděpodobností:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

- Úkol: Najděte příklady pravděpodobnosti sjednocení jevů (slučitelných i neslučitelných) a pravděpodobnosti nastání dvou nezávislých jevů. Vypočtěte pravděpodobnost nastání takového jevu.

ÚLOHY

- Určete množinu všech možných výsledků, jestliže házíte:
  - třemi rozlišitelnými mincemi,
  - dvěma rozlišitelnými hracími kostkami.
- Jaká je pravděpodobnost že ze součtů, které mohou padnout při hodu dvěma kostkami, hodíme součet, který je dělitelný třemi?

- Z osudí, ve kterém je 10 kuliček červených a 5 kuliček modrých vybíráme
  - jednu modrou kuličku,
  - dvě modré kuličky,
  - jednu červenou nebo modrou kuličku.

  Vypočítejte pravděpodobnosti těchto jevů.
- Ze skupiny pěti mužů a tří žen má být vybrána dvojice, ve které jsou:
  - Jeden muž a jedna žena
  - Dva muži

- Máme tři osudí. V prvním jsou 2 žluté, 3 červené a 1 černá kulička, ve druhém jsou 3 žluté a jedna černá kulička, ve třetím 3 červené, 1 modrá, 1 černá kulička. Náhodně vybereme jedno osudí a jednu kuličku. Znázorněte pomocí stromu a vypočítejte pravděpodobnosti, že bude vybrána:
  - Modrá kulička
  - Černá kulička
  - Červená kulička
  - Žlutá kulička

LITERATURA

- Bílková, D., Budinský, P., Vohánka, V.: Pravděpodobnost a statistika. Plzeň, A.Čeněk, 2009.
- Budíková, M., Mikoláš, Š., Osecký, P.: Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Brno: MU 2001.
- Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Praha: Prometheus, 1993.
- Kuřina F. a kol.: Matematika a porozumění světu. Praha: Academia, 2009.
- Kuřina, K., Půlpán, Z.: Podivuhodný svět elementární matematiky. Praha: Academia, 2006.
- Mareš, M.: Příběhy matematiky. Příbram: Pistorius, Olšanská, 2008.
- Plocki, A.: Pravděpodobnost kolem nás. Ústí nad Labem: UJEP, 2001
- Plocki, A., Tlustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Praha: Prometheus, 2007.