MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2015 MONIKA STANČÍKOVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Vytvoření webové učebnice kombinatoriky

Diplomová práce

Monika Stančíková

Vedoucí práce: Mgr. Martin Panák, Ph.D. Brno 2015

Bibliografický záznam

Autor:	Monika Stančíková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Vytvoření webové učebnice kombinatoriky
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy, Učitelství informatiky pro střední školy
Vedoucí práce:	Mgr. Martin Panák, Ph.D.
Akademický rok:	2014/2015
Počet stran:	$10 + 106$
Klíčová slova:	Kombinatorika, pravidlo součtu, pravidlo součinu, variace, permutace, kombinace, faktoriál, kombinační číslo, binomická věta, Burnsideovo lemma, princip inkluze a exkluze

Bibliographic Entry

Author:	Monika Stančíková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Web combinatorics textbook
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Upper Secondary School Teacher Training in Mathematics, Upper Secondary School Teacher Training in Informatics
Supervisor:	Mgr. Martin Panák, Ph.D.
Academic Year:	2014/2015
Number of Pages:	$10 + 106$
Keywords:	Combinatorics, the rule of sum, the rule of product, variation, permutation, combination, factorial, combination number, the binomial theorem, Burnside's lemma, the inclusion–exclusion principle

Abstrakt

Cílem práce je přiblížit středoškolským studentům kombinatoriku ve formě webové prezentace. Kombinatorické pojmy jsou zde vysvětleny na základě řešení konkrétních problémů, příklady jsou obohacené o zajímavé ilustrace a interaktivní obrázky. Tato práce nemůže nahradit doporučené učební materiály, ale slouží jako rozšiřující doplněk při výuce. Práce je dostupná jako soubor pdf a ve formě webových stránek.

Abstract

The aim is to bring combinatorics to secondary school students in the form of website. Combinatorial terms are explained on the basis of the solution of concrete problems, examples are enriched with interesting illustrations and interactive images. This work can not replace the recommended teaching materials, but serves as an additional option in the classroom. Work is available as a pdf file and on web pages.

Místo tohoto listu vložte kopii oficiálního (podepsaného) zadání práce.

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala Mgr. Martinu Panákovi, Ph.D. především za ochotu, vstřícnost a trpělivost, se kterými vedl moji diplomovou práci, za cenné rady i připomínky k ní. Dále bych chtěla poděkovat Bc. Markétě Kružliakové za užitečné poznámky ke grafické stránce webu, Mgr. Janu Šplíchalovi za korekturu češtiny v mé práci, Mgr. Martinu Stančíkovi za spoustu důležitých a zajímavých doporučení k celé práci a v neposlední řadě i s-technikům ze Servisního střediska IS MU za poskytnutí webové šablony.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 13. května 2015 . . . .

Monika Stančíková

Obsah

Úvod

Kombinatorika je oblast matematiky, která je velmi zajímavá a využitelná v mnoha oborech, ale zároveň pro studenty jedna z nejnáročnějších na pochopení. Také z mé dlouholeté praxe doučování studentů ze středních škol, jsem zjistila, že, ačkoli studenti jiné oblasti matematiky zvládali, s kombinatorikou měli potíže.

Na základě této zkušenosti jsem se rozhodla přiblížit studentům kombinatoriku ve formě webové prezentace, která by byla přívětivá jak po grafické, tak po srozumitelné stránce. Má dosavadní učitelská praxe byla pouze z doučování, a proto ani tato prezentace nemůže nahradit doporučené učební materiály, ale slouží jako doplněk při výuce. Každý student je jedinečný, z toho důvodu jednotlivé pojmy může různý student pochopit na základě jiného příkladu stejného typu.

Práci jsem proto koncipovala tak, aby obsahovala řešené příklady, které byly mým studentům blízké. Příklady jsem se snažila obohatit o zajímavé ilustrace, aby jsem vzbudila představivost a zaujala studenta při řešení. Využila jsem své znalosti i z mého druhého aprobačního oboru, informatiky, a poskytla studentům diplomovou práci ve webovém rozhraní. Práce je tak přístupná komukoli a odkudkoli prostřednictvím Internetu.

Většina podkapitol obsahuje vždy alespoň dvě části – řešené příklady a příklady k procvičení. Na webových stránkách v části řešené příklady je uživateli řešení konkrétního příkladu zobrazeno implicitně a, pokud by chtěl, může si jej skrýt. V příkladech k procvičení je řešení implicitně schované a uživatel si jej může kdykoli zobrazit. Je tomu tak ve všech podkapitolách až na části Faktoriál a kombinační čísla a Procvičování, v nichž je řešení příkladů vždy implicitně skryté.

Celá práce je rozdělena do dvou kapitol, Základní kombinatorické pojmy a Rozšiřující kombinatorické pojmy.

První kapitola má 9 podkapitol. První z nich jsou Základní pravidla, pravidlo součtu a součinu. Následují Variace, Permutace a Kombinace bez opakování. Na to navazují podkapitoly Variace, Permutace a Kombinace s opakováním. Předposlední podkapitolou je Faktoriál a kombinační čísla, která také zahrnuje počítání příkladů s využitím binomické věty. Kapitola končí části Procvičování, kde jsou promíchány příklady všech doposud vysvětlených typů.

Druhá kapitola rozšiřuje středoškolské učivo o Burnsideovo lemma a o Princip inkluze a exkluze.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v práci vyskytuje.

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$S(X)$	množina všech permutací množiny X
π, ρ, σ	permutace na množině X
O_x	orbita prvku x
$\mathscr{O}$	množina všech orbit
P_π	množina pevných bodů permutace π

Kapitola 1

Základní kombinatorické pojmy

1.1 Základní pravidla

Základní kombinatorická pravidla, ačkoli jsou jen dvě, nám vystačí k řešení většiny kombinatorických úloh. Navzdory tomu, že jste o nich možná nikdy neslyšeli, určitě jste je někdy ve svém životě použili.

Zřejmě se vám obě pravidla budou zdát jako samozřejmá, ovšem to jim neubírá na významu, obě budeme hojně používat ve všech částech této učebnice.

1.1.1 Pravidlo součtu

Definice 1. Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků jejich sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Příklad 1.1.1. *Lehký příklad na objasnění definice*

Ve škole jsou dvě první třídy: 1. A a 1. B. Do třídy 1. A chodí 15 žáků, do třídy 1. B chodí 18 žáků. Kolik je ve škole prváků?

Řešení:

Tyto 2 množiny žáků (třídy) jsou konečné (počet žáků je konečný) a jsou disjunktní (žádný žák nemůže zároveň chodit do 1. A a do 1. B). Celkově v 1. A a v 1. B je dohromady $15 + 18 = 33$ žáků.

1.1.2 Pravidlo součinu

Definice 2. Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad 1.1.2. *Zvířata*

Adam má tři zvířata – ovci, psa a kočku. Rozhodl se, že dvě ze svých zvířat dá svým kamarádům. Jedno Honzovi a druhé Zbyňkovi. Kolik má možností, jak zvířata rozdělit mezi Honzu a Zbyňka?

Řešení:
Poznámka: Řešení tohoto příkladu je vysvětleno také pomocí interaktivního obrázku, který je uveden v příloze 1.

Přepis řešení:
Adam chce dát 1 zvíře Honzovi(H) a 1 zvíře Zbyňkovi(Z):
H Z $\rightarrow$ _ _
Pro Honzu vybírá 1 zvíře ze 3. Má tedy 3 různé možnosti, jak ho obdarovat:
3 _
Pro každou ze 3 možností výběru zvířete pro Honzu, má pro Zbyňka 2 možnosti, jak jej obdarovat:
3 2
Proto má celkem: $3 \cdot 2 = 6$ možností, jak zvířata rozdělit mezi své přátele.

Příklad 1.1.3. *Oblečení*

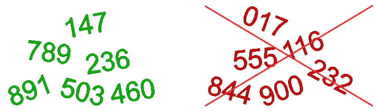
Bára má tři různá trička a pět různých sukní. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak?

Obrázek 1.1: Tři trička a pět sukní, zdroj: [11]

Řešení:
Počítáme počet možností, jak si Bára může vybrat 1 tričko(T) a k tomu 1 sukni(S):
T S $\rightarrow$ _ _
Bára má 3 různé možnosti, jak si vybrat tričko:
3 _
Potom, co si vybrala tričko, má 5 možností, jak si vybrat sukni:
3 5
Celkem má Bára $3 \cdot 5 = 15$ různých způsobů, jak se obléct.

Příklad 1.1.4. *Čísla*

Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.



Obrázek 1.2: Příklad čísel, jenž vyhovují zadání, i čísel, jenž nevyhovují zadání. Zdroj: autor.

Řešení:

Počet různých číslic je 10, jsou to: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Pro vytvoření trojciferného čísla, potřebujeme 3 číslice $\rightarrow$ _ _ _
Na první cifře nemůže být 0, proto máme 9 různých číslic, které můžeme použít: 9 _ _
Na druhé cifře už může být i 0, proto máme 10 možných číslic. Ale nesmíme použít tu číslici, která je na první cifře (číslice se nesmí opakovat), možností je tedy 9: 9 9 _
Pro třetí cifru ze všech možných číslic odečítáme dvě, které jsme použili pro první a druhou cifru, dostáváme 8 různých číslic: 9 9 8
Celkem takových čísel je: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

1.1.3 Příklady na procvičení

Příklad 1.1.5.

Ze Lhotky do Hradce vedou 3 různé cesty, z Hradce do Budína vedou 4 různé cesty. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu:

A) ze Lhotky přes Hradec do Budína a zpět.

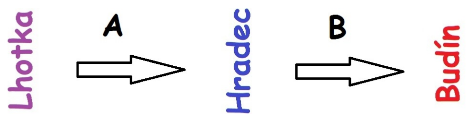
B) ze Lhotky přes Hradec do Budína a zpět tak, že žádná cesta není použita dvakrát.

C) ze Lhotky přes Hradec do Budína a zpět tak, že právě jedna z cest je použita dvakrát, a to cesta mezi Lhotkou a Hradcem.

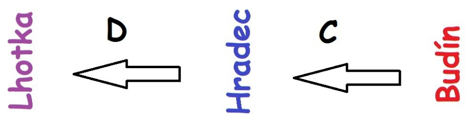
Řešení:

Cesty si označíme:

A: Lhotka $\rightarrow$ Hradec B: Hradec $\rightarrow$ Budín



D: Hradec $\rightarrow$ Lhotka C: Budín $\rightarrow$ Hradec



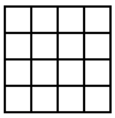
Obrázek 1.3: Označení cest, zdroj: autor

A) Na trasu A máme 3 možné cesty, na trasu B 4 možné cesty, na trasu C opět 4 cesty a na trasu D opět 3 cesty: A B C D $\rightarrow$ 3 4 4 3
Celkem: $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$.

B) Na trasu A a B máme stejný počet možností jako v případě 1.: A B C D $\rightarrow$ 3 4 _ _ .
Na trasu C už nemůžeme použít cestu, která byla vybrána pro trasu B. K výběru cesty máme tedy o jednu méně: 4 - 1 = 3. A B C D $\rightarrow$ 3 4 3 _ .
Obdobně pro trasu D, jsou tři různé cesty, ale jednu z nich jsme už vybrali, tedy 3 - 1 = 2.
Celkem: $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$.

C) Na trasu A a B máme stejný počet možností jako v případě 1.: A B C D $\rightarrow$ 3 4 _ _ .
Trasa C má být jiná než B, tedy máme o jednu možnost méně: A B C D $\rightarrow$ 3 4 3 _ .
Trasa D má být stejná jako trasa A, ale tu už máme vybranou, tedy máme jedinou možnost: A B C D $\rightarrow$ 3 4 3 1 .
Celkem: $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 36$.

Příklad 1.1.6.



Obrázek 1.4: Čtverec, zdroj: autor

Čtverec o straně délky 4 cm je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 16 stejných čtverců. Určete, kolik je v daném obrazci čtverců. [1]

Řešení:

Všechny čtverce rozdělíme do disjunktních skupin Č1, Č2, Č3 a Č4 tak, že
ve skupině Č1 jsou všechny čtverce o straně délky 1 cm,
ve skupině Č2 jsou všechny čtverce o straně délky 2 cm,
ve skupině Č3 jsou všechny čtverce o straně délky 3 cm
a ve skupině Č4 jsou všechny čtverce o straně délky 4 cm.
Ve skupině Č1 je 16 čtverců, v Č2 je 9 čtverců, v Č3 jsou 4 čtverce a v Č4 je 1 čtverec.
Celkový počet čtverců v daném obrazci je roven $16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Příklad 1.1.7.

Biatlonistka Katka má 5 zlatých, 3 stříbrné a 6 bronzových medailí, každou z jiné soutěže. Chtěla by si některých pět ze svých medailí pověsit na poličku, která má přesně 5 háčků na pověšení. Kolik různých možností Katka má, aby si medaile rozvěsila tak, že by na prvním háčku byla jedna ze zlatých medailí, na druhém jedna ze stříbrných, na třetím jedna z bronzových a na posledních dvou libovolná medaile?

Řešení:

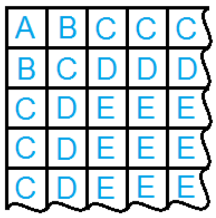
Na poličce je pět háčků:
1. 2. 3. 4. 5. $\rightarrow$ _ _ _ _ _
Na první háček můžeme vybrat jednu z 5 zlatých medailí, máme tedy 5 možností výběru:
5 _ _ _ _

Po výběru na první háček můžeme na druhý háček vybrat jednu ze 3 stříbrných medailí:
5 3 _ _ _
Po předešlém výběru můžeme na třetí háček vybrat jednu z 6 bronzových medailí:
5 3 6 _ _
Na čtvrtý háček nám po výběru prvních tří zbývá: 4 zlaté, 2 stříbrné a 5 bronzových medailí, vybíráme tedy libovolnou medaili z 11: 5 3 6 11 _
Na poslední háček po výběru prvních 4 nám zbývá 10 medailí: 5 3 6 11 10
Celkem má Katka možností: $5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 10 = 9900$.

Příklad 1.1.8.

Určete celkový počet tahů koněm na šachovnici 8x8. [1]

Řešení:
Počet tahů koněm z daného pole na šachovnici závisí na poloze tohoto pole na šachovnici. Rozdělíme si tedy všechna pole šachovnice do 5 skupin: A, B, C, D, E (viz obrázek 1.5).

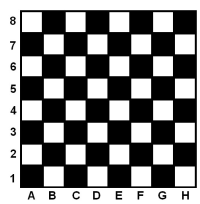


Obrázek 1.5: Rozdělení části šachovnice podle možných pohybů koně, zdroj: autor

Z rohového pole A má kůň 2 možné tahy, z pole typu B tři tahy, z pole typu C čtyři tahy, z pole typu D šest tahů a z pole typu E osm možných tahů.
Celkový počet tahů koně na šachovnici 8x8 je: $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8 = 336$.

Příklad 1.1.9.

Kolika způsoby lze vybrat na šachovnici 8x8 jedno bílé a jedno černé pole?
Kolika způsoby to lze učinit, nesmějí-li vybraná pole ležet ve stejném řádku ani ve stejném sloupci?



Obrázek 1.6: Šachovnice, zdroj: autor

Řešení:

Bílé pole lze vybrat 32 způsoby, černé rovněž. Celkový počet způsobů výběru je tedy v prvním případě roven $32 \cdot 32 = 1024$.

Vybereme-li v druhém případě jedno bílé pole (32 způsobů), lze černé vybrat už jen z řádků a sloupců, v nichž vybrané bílé pole neleží, tj. 24 způsobů.

Počet výběrů je tedy $32 \cdot 24 = 738$.

Příklad 1.1.10.

Kolika způsoby lze z úplného souboru domina (28 kostek) vybrat dvě tak, abychom je mohli přiložit k sobě? Dvě kostky domina lze přiložit k sobě, jestliže se nějaký počet ok vyskytuje zároveň na obou kostkách.

Řešení:

Vybereme nejprve první kostku, to lze 28 způsoby, v 7 z nich bude v obou polích stejný počet ok (00, 11, 22, ..., 66), ve zbylých 21 případech bude počet ok v obou polích vybrané kostky různý.

Rozdělme tedy všechny uvažované dvojice kostek do dvou skupin podle toho, jakého z obou výše popsaných typů je první vybraná kostka.

V prvním případě lze druhou kostku vybrat 6 způsoby (např. ke kostce 00 přidáme některou z kostek 01, 02, ..., 06). Ve druhém případě vybereme druhou kostku 12 způsoby (např. ke kostce 01 lze vybrat některou z kostek 00, 02, 03, ..., 06, 11, 12, ..., 16).

Podle pravidla součinu je v prvním případě počet výběrů $7 \cdot 6 = 42$, ve druhém případě $21 \cdot 12 = 252$ a podle pravidla součtu je celkový počet výběrů roven $42 + 252 = 294$.

Protože však na pořadí vybraných kostek nezáleží, je celkový počet výběrů poloviční, tedy $294/2 = 147$ (např. dvojice kostek 01 a 16 je započítána i jako 16 a 01).

Příklad 1.1.11.

Určete počet všech možných tanečních párů z 15 chlapců a 10 děvčat.

Řešení:

Celkový počet tanečních párů je podle pravidla součinu roven $15 \cdot 10 = 150$.

Příklad 1.1.12.

V košíku je 12 různých jablek a 10 různých hrušek. Petr si má z něho vybrat jedno ovoce tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru. Jaké ovoce si má Petr vybrat? [2]

Řešení:

Pokud si Petr vybere jablko, v košíku zůstane 11 jablek a 10 hrušek a počet možných výběrů pro Věru bude: $11 \cdot 10 = 110$. Pokud si Petr vybere hrušku, počet možných výběrů pro Věru bude: $12 \cdot 9 = 108$.

Aby Věra měla co největší možnost výběru, musí si Petr vzít jablko.

Příklad 1.1.13.

Ve třídě 5. A chodí 14 žáků na němčinu a 13 na francouzštinu. Každý žák navštěvuje právě jeden z uvedených předmětů. Kolika způsoby lze vybrat dvojici na týdenní službu tak, aby měl službu jeden žák z němčiny a jeden žák z francouzštiny?

Kolik let by žáci museli chodit do školy, aby se všechny tyto dvojice vystřídaly? (Počítejte, že školní rok má 33 vyučovacích týdnů.)

Řešení:

Počet různých dvojic je $14 \cdot 13 = 182$.

$182/33 \doteq 5{,}515$. Aby se všechny dvojice vystřídaly, museli by žáci chodit do školy přibližně 5 a půl roku.

Příklad 1.1.14.

Určete počet čtyřciferných přirozených čísel, které začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2, nebo končí cifrou 2 a nezačínají cifrou 1. [4]

Řešení:

Všechna čísla můžeme rozdělit do dvou disjunktních množin. První množina obsahuje čísla, která začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2. Druhá množina obsahuje čísla, která nezačínají cifrou 1 a končí cifrou 2. Celkový počet čísel ze zadání dostaneme podle pravidla součtu tak, že sečteme počty čísel v obou množinách.

Počet prvků v první množině je: $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$. První cifru známe, na každou z dalších cifer můžeme vybrat z 10 různých možností a při volbě poslední číslice nemůžeme použít cifru 2.

Počet prvků v druhé množině je: $8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 800$. Na první cifře nemohou být číslice 0 a 1, na každou z dalších cifer můžeme vybrat z 10 různých možností a poslední cifra je určená.

Celkový počet čísel odpovídajících zadání je $900 + 800 = 1700$.

1.2 Variace bez opakování

Další z kombinatorických pojmů jsou variace. Tento pojem si vysvětlíme na příkladu s vlajkami. Chceme obarvit dvěma různými barvami vlajku sestávající se ze dvou pruhů, přičemž máme na výběr z 5 různých barev. Vybíráme tedy skupinu prvků z určité množiny těchto prvků, přičemž je důležité pořadí, v jaké prvky (barvy) uspořádáme.

Jedna variace je právě jedna taková vybraná skupina prvků (dvojice barev). Nás zajímá, kolik takových variací, tedy kolik různých vlajek, lze vytvořit?

Prvky, které vybíráme, mezi sebou rozlišujeme, jsou navzájem různé a neopakují se.

Zkusíme si vše přiblížit na následujících příkladech.

1.2.1 Řešené příklady

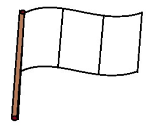
Příklad 1.2.1. *Vlajky*

Mirek si chce vytvořit vlastní vlajku. Chtěl by, aby byla složena ze tří různobarevných svislých pruhů. K dispozici má látky 5 různých barev – fialovou, červenou, modrou, zelenou a žlutou.

A) Určete, kolik různých vlajek si může Mirek sestavit.

B) Kolik takových vlajek má jeden pruh žlutý?

C) Kolik vlajek neobsahuje červený pruh?



Obrázek 1.7: Vlajka, zdroj: autor

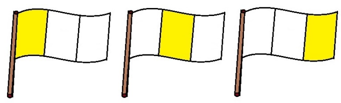
Řešení:
Poznámka: Řešení první části tohoto příkladu je vysvětleno také pomocí interaktivního obrázku, který je uveden v příloze 2.

Přepis řešení:

A) Doplňujeme barvy na tři různá místa na vlajce, vybíráme tedy 3 různé barvy z pěti celkem $\rightarrow$ _ _ _
Na první místo vybíráme 1 z 5 barev, máme tedy 5 různých možností:
5 _ _
Na druhé místo vybíráme už jen ze 4 barev, protože jednu barvu jsme již použili a barvy se nemohou opakovat:
5 4 _
Na třetí místo vybíráme už jen ze 3 barev, protože 2 barvy jsme již použili a barvy se nemohou opakovat:
5 4 3
Výsledek: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Proč počet možností pro každý pruh mezi sebou násobíme? Používáme pravidlo součinu.

B) Vlajka má mít jeden pruh žlutý, proto může nastat jedna z těchto tří situací:
Ž _ _   _ Ž _   _ _ Ž



Obrázek 1.8: Eventuální umístění žlutého pruhu na vlajce, zdroj: autor

Umístění žluté barvy tímto máme určené. Na toto místo máme pouze jednu možnost výběru barvy – žlutou:
1 _ _   _ 1 _   _ _ 1
Poté nám zůstanou 4 barvy, kterými můžeme doplnit další pruh. Po doplnění tohoto pruhu nám zůstanou 3 barvy na poslední pruh:
1 4 3   4 1 3   4 3 1
Jednotlivé možnosti:
$1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$,
$4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$,
$4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$.
Máme 3 disjunktní skupiny vlajek, celkový počet vlajek s jedním žlutým pruhem je podle pravidla součtu: $12 + 12 + 12 = 36$.

C) Pokud vlajka nemá červený pruh, je počet barev na vlajku je 4, získáváme výsledek: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Příklad 1.2.2. *Předseda, místopředseda . . .*

Sportovní klub Komárov vybírá osoby na pozice předsedy, místopředsedy, účetního a trenéra. K dispozici má 8 uchazečů a 5 uchazeček. Určete:

A) Kolika způsoby z nich lze vybrat tyto funkcionáře?

B) Kolika způsoby lze vybrat funkcionáře tak, aby předseda byl muž a místopředseda žena nebo obráceně?

C) Kolika způsoby lze vybrat funkcionáře tak, aby právě jedním z nich byla žena?

Řešení:

A) 8 mužů + 5 žen = 13 lidí celkem.
Předseda Místopředseda Účetní Trenér → _ _ _ _
Pro výběr předsedy máme 13 možností, poté pro místopředsedu 12 možností, potom pro účetního 11 možností a nakonec pro trenéra 10 možností.
Podle pravidla součinu dostáváme výsledek: $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$.

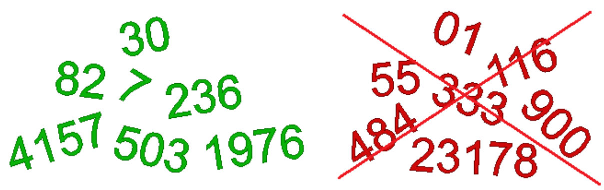
B) Příklad si rozdělíme na 2 různé, ale analogické situace:
I. Předseda je muž a místopředseda je žena:
Na místo předsedy vybíráme jednoho z osmi mužů, na místo místopředsedy jednu

z pěti žen: 8 5 _ _
Zbývá 7 mužů + 4 ženy = 11 lidí.
Opět použijeme pravidlo součinu a výsledek je: $8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 10 = 4400$.
II. Předseda je žena a místopředseda je muž: 5 8 _ _
Zbývá 4 ženy + 7 mužů = 11 lidí.
$5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10 = 4400$.
Užitím pravidla součtu dostáváme celkový výsledek: $4400 + 4400 = 8800$.

C) Nyní musíme uvažovat zvlášť situace, kdy žena je na místě předsedy (P) nebo místopředsedy (M) nebo účetního (Ů) nebo trenéra (T):
P-žena: $5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$,
M-žena: $8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$,
Ú-žena: $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 1680$,
T-žena: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$,
$1680 + 1680 + 1680 + 1680 = 6720$.

Příklad 1.2.3. *Čísla*

A) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou?
B) Kolik z nich je menších než 6000?



Obrázek 1.9: Ukázka vyhovujících a nevyhovujících čísel, zdroj: autor

Řešení:
A) Úlohu si rozdělíme na 4 různé situace:

I. Výběr čtyřciferných čísel.

II. Výběr tříciferných čísel.

III. Výběr dvouciferných čísel.

IV. Výběr jednociferných čísel.

I. Chceme určit počet čtyřciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se číslice neopakují. Na první cifru můžeme umístit číslice: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Celkem 9 číslic. (Proč ne nulu? Čísla mají být čtyřciferné.)
9 _ _ _
Na druhé místo už můžeme umístit i nulu: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – celkem 10 číslic, ale odečítáme jednu číslici, kterou jsme již vybrali (číslice se nemohou opakovat):
9 9 _ _

Na třetí místo analogicky: 10 číslic minus 2 z předchozích výběrů:
9 9 8 _
Jako poslední cifru můžeme zvolit opět jednu z 10 číslic mínus 3 z předchozích výběrů:
9 9 8 7
Celkově: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

II. Pro tříciferná čísla analogicky: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

III. Pro dvouciferná čísla analogicky: $9 \cdot 9 = 81$.

IV. Jednociferných přirozených čísel je: 9.

Vypočítali jsme, kolik máme možností pro 4 různé (disjunktní) situace (pro čtyřciferné číslo, tříciferné, dvouciferné a jednociferné číslo).
Dohromady podle pravidla součtu: $4536 + 648 + 81 + 9 = 5274$.

B) Postup řešení je podobný jako v úloze A). Rozdíl bude pouze pro výpočet čtyřciferných čísel. Na prvním místě mohou být číslice: 1, 2, 3, 4, 5 – celkem 5 možných číslic, proto dostáváme: $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$.

Počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel menších než 6000 je: $2520 + 648 + 81 + 9 = 3258$.

Definice 3. k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše jednou.

Z předchozích úvah vyplývá následující věta:

Věta 1. *Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je:*

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Pokud rozpoznáme, že se v úloze ptáme na počet jistých variací, je možné přímo použít vzorec.

Vypočítáme si některé již řešené příklady s využitím vzorce.

Příklad 1.2.1. *Vlajky – podle vzorce*

Mirek si chce vytvořit vlastní vlajku. Chtěl by, aby byla složena ze tří různobarevných svislých pruhů. K dispozici má látky 5 různých barev – fialovou, červenou, modrou, zelenou a žlutou.

Určete, kolik různých vlajek si může Mirek sestavit.

Řešení:

Počet prvků, z nichž vybíráme: $n = 5$.
Kolika člennou variaci vybíráme: $k = 3$.
$V(3,5) = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Příklad 1.2.2. *Předseda, místopředseda … – podle vzorce*

Sportovní klub Komárov vybírá osoby na pozice předsedy, místopředsedy, účetního a trenéra. K dispozici má 8 uchazečů a 5 uchazeček. Určete kolika způsoby z nich lze vybrat tyto funkcionáře?

Řešení:
Počet prvků, z nichž vybíráme: $n = 8 + 5 = 13$.
Kolika člennou variaci vybíráme: $k = 4$ (předsedu, místopředsedu, účetního a trenéra).
$V(4,13) = 13 \cdot (13-1) \cdot (13-2) \cdot (13-3) = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$.

Shrnutí počítání podle vzorce:

Použití vzorce může urychlit řešení úlohy, vždy je však nezbytné do úlohy nejprve proniknout.

1.2.2 Příklady k procvičení

Příklad 1.2.4.

A) Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na pondělí pro 7. třídu ZŠ Hoštice, v níž se vyučuje 11 předmětů. Každý předmět je vyučován maximálně jednou denně a celkově se v pondělí vyučuje 6 vyučovacích hodin.

B) Kolika způsoby lze sestavit takový rozvrh, který má jako druhý vyučovací předmět matematiku? (Matematika je jeden z jedenácti předmětů.)

Řešení:
A) $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 332640 \qquad [= V(6,11)]$.
B) $10 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Příklad 1.2.5.

Žáci třetí třídy chtějí nacvičit divadlo na vystoupení ke Dni matek. Paní učitelka musí vybrat 4 žáky z 23 žáků (16 chlapců a 7 děvčat) na divadelní role: Král Richard, služebná Agáta, podkoní Matěj a princezna Tiana.

A) Kolik různých čtveřic žáků může na tyto role vybrat?

B) Kolik různých čtveřic žáků může na tyto role vybrat tak, aby služebná i princezna byly dívky? (Král i podkoní žádné omezení nemají.)

C) Kolik různých čtveřic žáků může na tyto role vybrat tak, aby služebná a princezna byla děvčata a aby král a podkoní byli chlapci?

Řešení:

A) $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 = 212520$ $\quad [V(4,23)]$

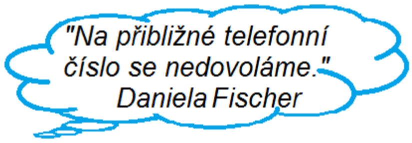
B) $7 \cdot 6 \cdot 21 \cdot 20 = 17640$

C) $7 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 15 = 10080$

Příklad 1.2.6.

Soňa zapomněla své telefonní číslo. Vzpomíná si, že mělo předčíslí 773 a poté jej tvořilo 6 různých číslic takových, že první tři číslice byly sudé nebo nula, další dvě číslice byly liché a poslední si nepamatuje vůbec. Kolik existuje telefonních čísel, která by odpovídala Soninu popisu?

Řešení:



Obrázek 1.10: Citát od Daniely Fischer, zdroj: autor

Označme si číslice:
S-sudá číslice nebo nula, L-lichá číslice,
Č-libovolná číslice:
S S S L L Č
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (2+3) = 6000$

Příklad 1.2.7.

Na dětském táboře dostalo 45 dětí za úkol vytvořit si každý svou vlajku.

Přesné znění úkolu bylo: Vlajka bude složena ze tří různobarevných svislých pruhů. K dispozici máte látky 5 různých barev – černá, červená, modrá, oranžová a žlutá.

A) Je možné, aby každé dítě mělo svou originální vlajku?

B) Kolik lze sestavit vlajek se žlutým pruhem uprostřed?

C) Kolik lze sestavit vlajek, které nemají prostřední pruh červený?

Řešení:

A) Počet různých vlajek, které lze sestavit, je: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60[= V(3,5)]$, což je více než je počet dětí ($45 < 60$), proto je možné, aby si každé dítě vytvořilo svou originální vlajku.

B) Prostřední pruh má barvu určenou (= 1 možnost), na ostatní zbývají 4 barvy:
$4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$

C) Můžeme počítat dvěma způsoby:

A) Od počtu všech vlajek odečteme ty, které mají prostřední barvu červenou.
Počet všech vlajek $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Počet vlajek s červenou uprostřed $4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$.
Počet vlajek bez prostředního pruhu červeného: $60 - 12 = 48$.

B) Máme obarvit 3 pruhy na vlajce.
Začneme od prostředního pruhu. Na něj máme pouze 4 barvy (červenou nechceme):
$\_\ 4\ \_$
Teď už můžeme použít i červenou barvu, celkem je tedy 5 barev mínus ta barva, kterou už jsme vybrali pro prostřední pruh. Dostáváme:
$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Příklad 1.2.8.

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
Kolik z nich je dělitelných pěti?

Řešení:
Počet takových pěticiferných čísel je: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.
Dělitelné pěti jsou čísla, jejichž poslední cifra je: 0 nebo 5.
Poslední cifra je 0: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$, poslední cifra je 5: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 2688$.
Celkem $3024 + 2688 = 5712$.

Příklad 1.2.9.

Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel s různými ciframi, která jsou sestavena z číslic 2, 4, 5, 6, 7, 9.
Kolik z nich je sudých?

Řešení:
Takových nejvýše čtyřciferných čísel je:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 6 = 360 + 120 + 30 + 6 = 516$.
$[= V(4,6) + V(3,6) + V(2,6) + V(1,6)]$
Sudých: poslední cifra je 2, 4 nebo 6:
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 3 = 180 + 60 + 15 + 3 = 258$.
Poznámka: V druhém případě jsme si mohli počítání ulehčit, všech čísel sestavených z číslic 2, 4, 5, 6, 7, 9 je 516, a jelikož je přesně polovina z číslic 2, 4, 5, 6, 7, 9 sudá, proto také v polovině všech možností bude poslední cifra sudá: $516/2 = 258$.

Příklad 1.2.10.

V naší nejvyšší fotbalové lize je 16 týmů. Kolik je různých možností obsazení prvních tří míst?

Řešení:
$16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360 \qquad [= V(3,16)]$

Příklad 1.2.11.

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 1, 2, 3, 4, 5.
Kolik z nich je dělitelných 5?
Kolik z nich je lichých?

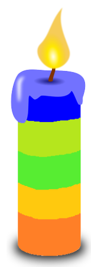
Řešení:
Takových čtyřciferných čísel je: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \qquad [= V(4,5)]$.
Dělitelných pěti: poslední cifra je 5: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Lichých: poslední cifra je 1, 3 nebo 5: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$.

Příklad 1.2.12.

Katka prodává svíčky, nyní má k dispozici 8 různě barevných vosků.
Kolik různých svíček může vyrobit, pokud by chtěla, aby každá svíčka byla složena z 5 různobarevných vodorovných pruhů?
Kolik různých svíček může vyrobit, pokud nejvyšší pruh bude modrý a nejnižší fialový nebo naopak?
Kolik různých svíček může vyrobit, pokud by chtěla, aby prostřední 3 pruhy byly červené, oranžové a žluté barvy?

Řešení:

Počet různých svíček je:
$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720. \qquad [= V(5,8)]$
S nejvyšším pruhem modrým a nejnižším fialovým či naopak je :
$2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 240.$
Prostřední 3 barvy jsou červená, oranžová a žlutá:
$8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 = 336.$



Obrázek 1.11: Ukázka svíčky, zdroj: autor

1.3 Permutace bez opakování

Permutace nebo též pořadí je název pro uspořádání prvků určité skupiny (např. seřazení 5 lidí do fronty). I nyní nás bude zajímat počet všech různých uspořádání, které můžeme s danými prvky učinit (např. kolika způsoby můžeme seřadit 5 lidí do fronty?).

Rozdíl oproti variacím je pouze ten, že uspořádáváme všechny prvky. Opět tyto prvky mezi sebou rozlišujeme, jsou navzájem různé, neopakují se a opět záleží na jejich pořadí.

1.3.1 Řešené příklady

Příklad 1.3.1. *Zákon*

K návrhu zákona se mají postupně vyjádřit 4 poslanci: Adámek, Beneš, Coufal a Dupák. Určete počet:

A) všech možných pořadí jejich vystoupení;

B) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž Dupák vystupuje hned po Adámkovi;

C) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž Beneš vystupuje kdykoli po Dupákovi.

Obrázek 1.12: Socha spravedlnosti, zdroj: [11]

Řešení:

A) Zajímá nás pořadí 4 poslanců: _ _ _ _

Na první místo můžeme vybrat jednoho ze 4, máme tedy 4 možnosti výběru: 4 _ _ _

Zbývají nám 3 poslanci. Na druhé místo máme tedy 3 možnosti výběru: 4 3 _ _

Po výběru poslanců na první a druhé místo nám zůstávají 2 poslanci. Na třetí místo máme proto 2 možnosti výběru: 4 3 2 _

A už nám zůstal jen jeden poslanec, který půjde jako poslední: 4 3 2 1

Výsledek: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

B) Dupák má jít hned po Adámkovi. Tak je spojíme dohromady a vznikne nám jeden celek:
Adámek + Dupák $\rightarrow$ AD.
(Dupák jde vždy po Adámkovi, proto ho můžeme v možnostech sloučit s Adámkem. Jeho výstup je určen tím, kdy vybereme Adámka.)

Hledáme tedy rozmístění pro 3 „poslance“, pro Beneše, Coufala a AD: $\rightarrow$ _ _ _

Pro výběr prvního v pořadí máme na výběr ze 3 možností: 3 _ _

Pro další vystoupení máme už jen 2 možností: 3 2 _

A poslední možnost: 3 2 1

Výsledek: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Můžeme si ověřit, že opravdu v těchto šesti možnostech máme rozmístěné 4 poslance podle zadání:
1) AD B C 2) AD C B
3) B AD C 4) C AD B
5) B C AD 6) C B AD

C) Uvědomme si, že pořadí, kdy je Beneš před Dupákem, a pořadí, kdy je Beneš po Dupákovi, je stejný počet. Proto hned můžeme vidět, že výsledek je tedy počet všech pořadí děleno dvěma:
$(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)/2 = 24/2 = 12$.

Příklad 1.3.2. *Předseda, místopředseda ...*

Vedení sportovního klubu 1. FK Zborovice tvoří 3 muži a 2 ženy. Určete:

A) Kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, účetního, hospodáře a trenéra?

B) Kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře jak v případě 1. tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně?

Řešení:

A) 3 muži + 2 ženy = 5 lidí celkem.
P M Ú H T (= Předseda Místopředseda Účetní Hospodář Trenér)
$\_\ \_\ \_\ \_\ \_ \rightarrow 5\ 4\ 3\ 2\ 1$
Výsledek: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
(Připomeňme si, proč se čísla násobí. Používáme totiž pravidlo součinu.)

B) Úlohu si rozdělíme na 2 různé situace:
I. P-muž a M-žena:

Na místo předsedy vybíráme jednoho ze tří mužů, na místo místopředsedy jednu ze dvou žen:
$3\ 2\ \_\ \_\ \_$

Zbývají 2 muži + 1 žena = 3.
$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$.

II. P-žena a M-muž:

Na místo předsedy vybíráme jednu ze dvou žen, na místo místopředsedy jednoho ze tří mužů:
$2\ 3\ \_\ \_\ \_$

Zbývají 2 muži + 1 žena = 3.
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$.

Výsledek: $36 + 36 = 72$.
(Připomeňme si, proč čísla sčítáme. Používáme totiž pravidlo součtu.)

Příklad 1.3.3. *Čísla*

A) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují číslice 0, 4, 5, 6, 7 a každá z nich právě jednou?

B) Kolik z nich je menších než 60 000?

C) Kolik z nich je dělitelných 5?

Řešení:

A) Pěticiferné číslo: _ _ _ _ _

Na první cifru můžeme umístit jednu ze čtyř číslic: 4 _ _ _ _

Na další cifru máme k dispozici pět číslic bez jedné, kterou jsme už vybrali: 4 4 _ _ _

A postupujeme dále, jak jsme zvyklí: 4 4 3 2 1

Celkově: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

B) Na první cifru můžeme dát jen jednu ze dvou číslic: 4 a 5. (Proč? Čísla mají menší než 6000.)

Celkově: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

C) Pěticiferné číslo je dělitelné pěti právě tehdy, když končí cifrou 0 nebo 5.

Každou situaci si vypočítáme zvlášť.

Číslo končící číslicí 0: na poslední cifru máme jen jednu možnost: _ _ _ _ 1 .

Rozmístíme ostatní číslice: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

Číslo končící číslicí 5: na poslední cifru máme jen jednu možnost: _ _ _ _ 1 .

Rozmístíme ostatní číslice: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 18$.

Celkem: $24 + 18 = 42$.

Definice 4. Permutace n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje právě jednou.

Jinak řečeno: Permutace n prvků jsou právě n-členné variace z těchto prvků.

Definice 5. Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \quad \text{kde } 0! = 1.$$

Číslo $n!$ čteme jako „n faktoriál“.

Z předchozích úvah vyplývá následující věta:

Věta 2. *Pro počet $P(n)$ všech permutací z n prvků platí $P(n) = n!$.*

Pokud rozpoznáme, že se v úloze ptáme na počet jistých permutací, je možné přímo použít vzorec.

Vypočítáme si některé již řešené příklady s využitím vzorce.

Příklad 1.3.1 . *Zákon – podle vzorce*

K návrhu zákona se mají postupně vyjádřit 4 poslanci: Adámek, Beneš, Coufal a Dupák. Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.

Řešení:

Výsledek: $P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Příklad 1.3.2. *Předseda, místopředseda ... – podle vzorce*

Vedení sportovního klubu 1. FK Zborovice tvoří 3 muži a 2 ženy. Určete kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, účetního, hospodáře a trenéra?

Řešení:

3 muži + 2 ženy = 5 lidí celkem.
Výsledek: $P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Shrnutí počítání podle vzorce:

Použití vzorce může urychlit řešení úlohy, vždy je však nezbytné do úlohy nejprve proniknout.

1.3.2 Příklady k procvičení

Příklad 1.3.4.

A) Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na úterý pro 8. třídu ZŠ Sýpky, v níž se vyučuje 6 předmětů. Každý předmět má právě jednu vyučovací hodinu denně a celkově se vyučuje 6 vyučovacích hodin denně.

B) Kolika způsoby lze sestavit takový rozvrh, který má jako třetí vyučovací předmět zeměpis? (Zeměpis je jeden ze šesti předmětů.)

Řešení:

A) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \qquad [= P(6)]$.
B) $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Příklad 1.3.5.

Určete, kolika způsoby se v pětimístné lavici může posadit:

A) pět chlapců;

B) pět chlapců, jestliže Kuba a Jirka chtějí sedět vedle sebe;

C) pět chlapců, jestliže Kuba a Jirka chtějí sedět vedle sebe a Honza chce sedět na kraji.

Řešení:

A) $\_\ \_\ \_\ \_\ \_ \to 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \to 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120. \qquad [= P(5)]$

B) I. Kuba sedí vlevo od Jirky:
3 chlapci + KJ = 4 $\rightarrow$ _ _ _ _ $\rightarrow$ 4 3 2 1 $\rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. $[= P(4)]$

II. Kuba sedí vpravo od Jirky:
3 chlapci + JK = 4 $\rightarrow$ _ _ _ _ $\rightarrow$ 4 3 2 1 $\rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. $[= P(4)]$

Celkový počet jejich různých rozsazení je: $24 + 24 = 48$.

C) I. Nejprve spočítáme počet způsobů, kdy Honza sedí vlevo na kraji a Kuba hned vlevo vedle Jirky:
H _ _ _ $\rightarrow$ 1 3 2 1 $\rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
Výsledek vynásobíme dvěma, neboť počet způsobů, kdy Kuba a Jirka sedí vedle sebe opačně, je stejný počet: $2 \cdot 6 = 12$.

II. Honza sedí vpravo na kraji a Kuba hned vlevo vedle Jirky:
_ _ _ H $\rightarrow$ 3 2 1 1 $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$.
Výsledek opět vynásobíme dvěma, neboť počet způsobů, kdy Kuba a Jirka sedí vedle sebe opačně, je stejný počet: $2 \cdot 6 = 12$.

Celkový počet jejich různých rozsazení je: $12 + 12 = 24$.

Příklad 1.3.6.

Žáci 3. třídy chtějí nacvičit divadlo na vánoční besídku. Paní učitelka musí 9 žákům (5 chlapců a 4 děvčata) rozdělit divadelní role:
Král, královna, princ, princezna, dvorní dáma, služebná, podkoní, kovář a rytíř.

A) Kolika způsoby může tyto role rozdělit?

B) Kolika způsoby může tyto role rozdělit tak, aby královna a princezna byla děvčata a král a princ byli chlapci? Ostatní mohou být jakkoli.

C) Kolika způsoby může tyto role rozdělit tak, aby ženské role hrála děvčata a mužské role chlapci?

Řešení:

A) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$ $[= P(9)]$

B) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 28800$

C) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$ $[= P(5) \cdot P(4)]$

Příklad 1.3.7.

Určete počet všech sudých pěticiferných přirozených čísel vytvořených z cifer 1, 2, 3, 4, 5, nemůže-li se v daném čísle žádná cifra opakovat. [1]

Řešení:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 48$ $[= P(4)]$

Příklad 1.3.8.

Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel vytvořených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se žádná cifra neopakuje. [1]

Řešení:
$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$

Příklad 1.3.9.

Kolika způsoby lze postavit do řady 4 Angličany, 2 Francouze a 3 Turky, musí-li osoby téže národnosti stát vedle sebe? [1]

Řešení:
Nejprve určíme pořadí 3 skupin osob: Angličanů, Francouzů a Turků: $3 \cdot 2 \cdot 1$.
A nakonec rozmístíme osoby v rámci skupiny:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 2 \cdot 1, \quad 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Celkem: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1728 \qquad [= P(3) \cdot P(4) \cdot P(2) \cdot P(3)]$.

Příklad 1.3.10.

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7?
A) Kolik z těchto čísel je dělitelných šesti?
B) Kolik jich je větších než 74300? [2]

Řešení:
$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$
A) Ciferný součet čísel je dělitelný 3, proto čísla dělitelná šesti jsou právě ta, která končí cifrou 0 nebo 4.
0 na konci: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$
4 na konci: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 18$
$24 + 18 = 42$
B) Větších než 74300 jsou pouze dvě čísla sestavená z těchto cifer, a to 74301 a 74310.

Příklad 1.3.11.

Určete, kolikrát lze přemístit slova ve verši od Jána Kollára

„Sám svobody kdo hoden, svobodu zná vážiti každou“

tak, aby se nepromíchala slova věty hlavní a vedlejší. [2]

Obrázek 1.13: Socha svobody, zdroj: [11]

Řešení:

$2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot (4!)^2 = 1152 \qquad [= 2 \cdot P(4) \cdot P(4)]$

Násobí se dvakrát, protože můžeme ještě prohodit celou větu hlavní s větou vedlejší.

Příklad 1.3.12.

Kolika způsoby můžeme rozestavit 6 dětí do kruhu? (Kruhy lišící se pouze pootočením, považujeme za shodné.) [3]

Řešení:

Do řady lze rozestavit 6 dětí $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720[= P(6)]$ způsoby.

Očíslujeme-li místa v kruhu postupně 1, 2, 3, 4, 5, 6, pak každou řadu můžeme uvážit jako kruh.

Vzhledem k tomu, že však nerozlišujeme kruhy lišící se jen pootočením, je hledaný počet $720/6 = 120$ (Pro každý kruh existuje 5 dalších kruhů lišících se pouze pootočením).

Příklad 1.3.13.

Kolik náhrdelníků lze utvořit ze 6 korálků různých barev? [3]

Řešení:

Mohlo by se zdát, že podle předchozího příkladu je správná odpověď 120. Protože však nerozlišíme dva náhrdelníky, z nichž jeden vznikl převrácením druhého, je hledaný počet $120/2 = 60$.

Příklad 1.3.14.

Kolika způsoby můžeme posadit ke kulatému stolu 5 mužů a 5 žen tak, aby žádné dvě osoby téhož pohlaví neseděly vedle sebe, jestliže

A) rozsazení lišící se pouze pootočením rozlišujeme.

B) rozsazení lišící se pouze pootočením, považujeme za stejná. [1]

Řešení:

A) Pevně si určíme jedno místo u stolu, na něj usadíme muže a poté střídavě ostatní osoby:

M Ž M Ž M Ž M Ž M Ž

Počet všech takových rozsazení kolem stolu je:
$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5! \cdot 5! \qquad [= P(5) \cdot P(5)]$

Ovšem na našem pevně určeném místě může sedět i žena (tedy muži a ženy si vymění pozice), proto celkový výsledek je:
$2 \cdot (5! \cdot 5!) = 28800.$

B) Podobně jako v předchozích příkladech ještě výsledek z a) vydělíme počtem možných pootočení libovolného rozsazení:
$28800/(5+5) = 2880$.

1.4 Kombinace bez opakování

Ve variacích (i permutacích) vždy záleželo na pořadí, v jakém jsme vybrané prvky uspořádávali. V kombinacích tomu tak není, na pořadí vybíraných prvků nezáleží.

Ovšem stále prvky mezi sebou rozlišujeme a každý se může vyskytovat nejvýše jednou.

1.4.1 Úvodní příklady

Příklad 1.4.1. *Variace a dvojice*

Kolik existuje *uspořádaných* dvojic ze čtyř písmen – A B C D ? (Uspořádaných dvojic, proto záleží na pořadí prvků ve dvojici.)

Řešení:

dvojice: $\_ \ \_ \rightarrow 4 \cdot 3 = 12$.

Všechny dvojice ze čtyř písmen – A B C D jsou:

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

Příklad 1.4.2. *Kombinace a dvojice*

Kolik existuje *neuspořádaných* dvojic ze čtyř písmen – A B C D ? (Nezáleží na pořadí prvků, proto dvojice AB i BA je stejná kombinace.)

(Jinými slovy: Kolik existuje 2-prvkových podmnožin 4-prvkové množiny?)

Řešení:

Uspořádaných dvojic bylo: $4 \cdot 3 = 12$.

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

Když se pozorně podíváme na výpis, všimneme si, že neuspořádaných dvojic je přesně 2x méně.

Každý sloupec tvoří 2 stejné písmena jinak uspořádané = permutace 2 prvků.

Počet dvouprvkových permutací je 2! = 2, to určuje i počet řádků.

Proto, pokud nezáleží na pořadí, vydělíme výsledek 2! a získáme počet neuspořádaných dvojic.

Výsledek: $\frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6$.

Výpis všech neuspořádaných dvojic ze 4 prvků: AB AC AD BC BD CD

Příklad 1.4.3. *Variace a trojice*

Kolik existuje *uspořádaných* trojic ze čtyř písmen – A B C D ?

Řešení:

trojice: _ _ _ $\rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Všechny trojice ze čtyř písmen – A B C D jsou:

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Příklad 1.4.4. *Kombinace a trojice*

Kolik existuje *neuspořádaných* trojic ze čtyř písmen – A B C D ?
(Jinými slovy: Kolik existuje 3-prvkových podmnožin 4-prvkové množiny?)

Řešení:

Uspořádaných trojic bylo: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Každý sloupec tvoří 3 stejné prvky jinak uspořádané = permutace tří prvků.
Počet tříprvkových permutací je 3! = 6, to určuje i počet řádků. Proto, pokud nezáleží na pořadí, vydělíme výsledek 3! a získáme počet neuspořádaných trojic.

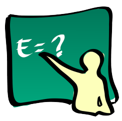
Výsledek: $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = \dfrac{24}{6} = 4$.

Výpis všech neuspořádaných trojic ze 4 prvků: ABC ABD ACD BCD

Příklad 1.4.5. *Zkoušení studentů*

V Kralupech navštěvuje druhou třídu základní školy 30 žáků.
Paní učitelka by chtěla 3 z nich vyzkoušet z matematiky.
Kolika způsoby můžeme vybrat 3 žáky na zkoušení? [6]

(Žáci jsou zkoušeni zároveň, proto nezáleží na jejich pořadí.)



Obrázek 1.14: Zkoušení, zdroj: [11]

Řešení:

Vybereme trojici žáků: $30 \cdot 29 \cdot 28$

Nezáleží na pořadí, proto vydělíme ještě 3!.

Výsledek: $\dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} = 4060$.

Shrnutí:

Všimněte si, že pokud jsme tvořili neuspořádané dvojice, vypočítali jsme variace a výsledek vydělili 2!.

Pokud jsme chtěli neuspořádané trojice, vypočítali jsme opět variace a výsledek vydělili 3!.

Jak by tomu bylo u čtveřic? ... Výsledek by se vydělil 4!.

Uvědomili jste si na příkladech, proč tomu tak bylo?

Definice 6. k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše jednou.

Jinak řečeno:
k-členná kombinace z n prvků je k-prvková podmnožina množiny těmito n prvky určená.

Z předchozích úvah vyplývá věta:

Věta 3. *Počet $K(k,n)$ všech k-členných kombinací z n prvků je:*

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!}.$$

Definice 7. Pro vyjádření $K(k,n)$ užíváme i symbol $\binom{n}{k}$, nazývá se kombinační číslo a čte se „n nad k“.

Věta 4. *Pro všechna celá nezáporná čísla n,k, kde $k \le n$, platí:*

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kombinační číslo – odvození:

Podle definice: $K(k,n) = \dfrac{V(k,n)}{k!}$

$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Dohromady: $K(k,n) = \dfrac{V(k,n)}{k!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

1.4.2 Řešené příklady

Příklad 1.4.6. *Knihy*

Alena má 10 knih, které ještě nepřečetla. Odjíždí na dovolenou a chtěla by si vzít dvě knihy s sebou. Kolik má různých možností, jaké knihy si vybrat?

Řešení:

Z 10 knih vybíráme 2 tak, že nezáleží na jejich pořadí:

$$\binom{10}{2}$$

Obvykle si s tímto výsledkem vystačíme. Ale zkusme si nyní i rozepsat:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2!8!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 5\cdot 9 = 45.$$

Porovnejme s postupem z úvodu: $\frac{10\cdot 9}{2!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 5\cdot 9 = 45.$

Příklad 1.4.7. *Šachovnice*

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici (8 x 8 políček) vybrat:
A) 3 políčka?
B) 3 políčka neležící ve stejném sloupci?
C) 3 políčka neležící ve stejném sloupci ani ve stejné řadě?
D) 3 políčka, která nejsou všechna stejné barvy?

Řešení:

A) Na šachovnici je 64 políček. Z nich vybíráme 3:

$$\binom{64}{3}$$

Zkusme si i nyní rozepsat:

$$\binom{64}{3} = \frac{64!}{3!(64-3)!} = \frac{64!}{3!\cdot 61!} = \frac{64\cdot 63\cdot 62\cdot 61!}{3!\cdot 61!} = \frac{64\cdot 63\cdot 62}{3\cdot 2\cdot 1} = 64\cdot 21\cdot 31 = 41664.$$

B) Od všech trojic odečteme ty trojice, které leží ve stejném sloupci.
Kolik je trojic, které leží ve stejném sloupci? Z 8 políček v jednom sloupci vybíráme 3:

$$\binom{8}{3}$$

Sloupců je 8, proto toto číslo musíme odečíst osmkrát. Náš výsledek:

$$\binom{64}{3} - 8\cdot\binom{8}{3} \qquad [= 41216]$$

C) Od výsledku v bodě B) ještě odečteme trojice, které leží ve stejné řadě. Kolik jich je?

$$8 \cdot \binom{8}{3}$$

Výsledek:

$$\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = \binom{64}{3} - 16 \cdot \binom{8}{3} \qquad [= 40768]$$

D) Od všech trojic odečteme ty trojice, které jsou bílé barvy, a trojice, které jsou černé barvy.
Políček bílé barvy je 32.
Políček černé barvy je 32.
Výsledek:

$$\binom{64}{3} - \binom{32}{3} - \binom{32}{3} = \binom{64}{3} - 2 \cdot \binom{32}{3} \qquad [= 31744]$$

V tomto případě jsme mohli postupovat i jinak.
Chceme znát počet trojic, které nejsou stejné barvy. Tedy jsou to trojice, kde je buď 1 políčko černé a 2 bílé, nebo 2 černé a 1 bílé. Těch je:

$$\binom{32}{1} \cdot \binom{32}{2} + \binom{32}{2} \cdot \binom{32}{1} = 32 \cdot \binom{32}{2} + \binom{32}{2} \cdot 32 = 64 \cdot \binom{32}{2} \qquad [= 31744]$$

Příklad 1.4.8. *Ženy a muži*

Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou

A) právě dvě ženy?
B) aspoň dvě ženy?
C) nejvýše dvě ženy?

Řešení:

A) Vybíráme 2 ženy ze 4 a zároveň 4 muže ze 7, nezáleží na pořadí:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} \qquad [= 210]$$

B) V tomto případě můžeme vybrat:
2 ženy a 4 muže nebo
3 ženy a 3 muže nebo
4 ženy a 2 muže
Výsledek:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2} \qquad [= 371]$$

C) V tomto případě můžeme vybrat:
2 ženy a 4 muže nebo

1 ženu a 5 mužů nebo
žádnou ženu a 6 mužů

Výsledek:

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{7}{5}+\binom{4}{0}\cdot\binom{7}{6}=\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{7}{5}+\binom{7}{6} \qquad [=301]$$

1.4.3 Příklady k procvičení

Příklad 1.4.9.

Volejbalový turnaj je rozdělen na 3 skupiny. V každé skupině je 6 týmů. V rámci skupiny hraje každý tým s každým.

A) Kolik zápasů se v turnaji odehraje?

B) Kolik zápasů se v turnaji odehraje, hrají-li ještě vítězové všech skupin každý s každým o celkové první místo?

Řešení:

A) $3\cdot\binom{6}{2}$ $[=45]$

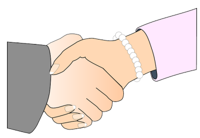
B) $3\cdot\binom{6}{2}+\binom{3}{2}$ $[=48]$

Příklad 1.4.10.

Jaký bude celkový počet podání rukou:

A) jsou-li v místnosti 3 lidé a každý si podává ruku s každým?

B) přijde-li dalších 5 lidí? Původní 3 lidé si už ruce mezi sebou nepodávají.



Obrázek 1.15: Podání rukou, zdroj: [11]

Řešení:

A) Uvědomme si, že se jedná o počet neuspořádaných dvojic, které můžeme sestavit ze 3 lidí, výsledek:
$\binom{3}{2}$ $[=3]$

B) $\binom{8}{2}-\binom{3}{2}$ $[=25]$

Příklad 1.4.11.

A) Kolika způsoby je možno z 18 kamarádů vybrat 9?

B) Kolika způsoby je možno z 18 kamarádů vybrat 9, požadujeme-li, že kamarád Pepa nebude mezi vybranými?

C) Kolika způsoby je možno z 18 kamarádů vybrat 9, požadujeme-li, že mezi vybranými nebudou zároveň obě kamarádky Katka a Žofka?

D) Kolika způsoby je možno z 18 kamarádů vybrat 9 požadujeme-li, aby mezi vybranými byl alespoň jeden z kamarádů Honza nebo Sláva?

Řešení:

A) $\binom{18}{9}$ $[= 48620]$

B) $18 - 1 = 17$, $\binom{17}{9}$ $[= 24310]$

C) Požadujeme, aby ve výběru nebyli obě kamarádky zároveň. Od všech možných způsobů výběru tedy odečteme ty, kde jsou obě kamarádky zároveň.

Všech je: $\binom{18}{9}$.

Ke Katce a Žofce vybereme dalších 7 lidí, proto počet možností, kde jsou obě kamarádky zároveň je $\binom{16}{7}$.

Celkem: $\binom{18}{9} - \binom{16}{7}$ $[= 37180]$

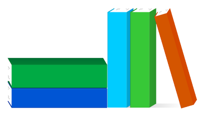
D) Způsoby rozdělíme na tři disjunktní případy:
I. mezi vybranými je jen Honza; II. mezi vybranými je jen Sláva; III. mezi vybranými kamarády jsou Honza i Sláva zároveň.

I. K Honzovi vybereme dalších 8 kamarádů, ze skupinky, kde není Sláva. II. Analogicky i ke Slávovi. III. K oběma kamarádům vybereme dalších 7 kamarádů.

$$\binom{16}{8} + \binom{16}{8} + \binom{16}{7} = 2 \cdot \binom{16}{8} + \binom{16}{7} \qquad [= 37180]$$

Příklad 1.4.12.

Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny. [2]



Obrázek 1.16: Knihy, zdroj: [11]

Řešení:

$$\binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2} \qquad [= 945]$$

Příklad 1.4.13.

Vyjádřete kombinačními čísly, kolika způsoby může m chlapců a n dívek utvořit taneční pár. [2]

Řešení:

$$\binom{m+n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{n}{2}$$

Příklad 1.4.14.

Je dán čtverec KLMN. Na každé straně čtverce zvolíme 8 vnitřních bodů.

A) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech.

B) Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a každé dva vrcholy jednoho trojúhelníku leží na různých stranách čtverce. [6]

Řešení:

A) Od všech trojic z 32 bodů odečteme ty, které netvoří trojúhelník (ty co leží na jedné straně):

$\binom{32}{3} - 4 \cdot \binom{8}{3} \qquad [= 4736]$

B) Ze čtyř stran vybere tři a z osmi bodů na každé straně jeden:

$\binom{4}{3} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} \cdot \binom{8}{1} = 4 \cdot 8^3 = 2048$

Příklad 1.4.15.

Na běžecké trati běží 8 závodníků. Do finále postupují první tři. Kolik je možností na postupující trojici? [6]

Řešení:

$\binom{8}{3} \qquad [= 56]$

Příklad 1.4.16.

Kolika způsoby lze rozdělit 12 hráčů na dvě šestičlenná volejbalová družstva?

Řešení:

$\binom{12}{6} : 2 \qquad [= 462]$

Příklad 1.4.17.

Kolika způsoby lze 4 dívky a 8 chlapců rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla dvě děvčata a 4 chlapci?

Řešení:

$\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4} : 2 \qquad [= 210]$

Příklad 1.4.18.

Ve skupině je 20 dětí, každé dvě děti mají jiné jméno. Je mezi nimi i Alena a Jana. Kolika způsoby lze vybrat 8 dětí tak, aby mezi vybranými:

A) byla Alena,

B) nebyla Alena,

C) byla Alena a Jana,
D) byla alespoň jedna z dívek Alena, Jana,
E) byla nejvýše jedna z dívek Alena, Jana,
F) nebyla ani Alena, ani Jana? [6]

Řešení:
A) $\binom{19}{7}$ [= 50388]
B) $\binom{19}{8}$ [= 75582]
C) $\binom{18}{6}$ [= 18564]
D) $\binom{18}{7}+\binom{18}{7}+\binom{18}{6}$ [= 82212]
E) $\binom{18}{7}+\binom{18}{7}+\binom{18}{8}$ [= 107406]
F) $\binom{18}{8}$ [= 43758]

Příklad 1.4.19.

Kolika způsoby lze 20 dětí rozdělit do tří skupin tak, aby v první skupině bylo 10 dětí, ve druhé skupině bylo 6 dětí a ve třetí zbytek? [6]

Řešení:
$\binom{20}{10}\cdot\binom{10}{6}\cdot\binom{4}{4}$ [= 38798760]

Příklad 1.4.20.

V sérii 12 výrobků jsou právě 3 vadné. Kolika způsoby z nich lze vybrat:
A) 6 libovolných výrobků,
B) 6 výrobků bezvadných,
C) 6 výrobků, z nichž právě 1 je vadný,
D) 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné,
E) 6 výrobků, z nichž právě 3 jsou vadné? [5]

Řešení:
A) $\binom{12}{6}$ [= 924]
B) $\binom{9}{6}$ [= 84]
C) $\binom{3}{1}\cdot\binom{9}{5}$ [= 378]
D) $\binom{3}{2}\cdot\binom{9}{4}$ [= 378]

E) $\binom{3}{3} \cdot \binom{9}{3}$ $[= 84]$

Příklad 1.4.21.

Kolika způsoby je možné vybrat z přirozených čísel menších nebo rovných 30 tři různá čísla tak, aby jejich součet byl roven sudému číslu? [1]

Řešení:

$$\binom{15}{3} + \binom{15}{2} \cdot \binom{15}{1} \qquad [= 2030]$$

1.5 Variace s opakováním

Vzpomínáte si na počítání variací bez opakování? Zjišťovali jsme počet výběrů prvků, kde záleželo na pořadí a kde se každý prvek vyskytoval nejvýše jednou.

Jediný rozdíl u variací s opakováním je ten, že se prvky ve výběru mohou opakovat. Ukážeme si rozdíl na příkladech.

1.5.1 Řešené příklady

Příklad 1.5.1. *Vlajky*

Vlajka má být složena ze tří svislých pruhů, k dispozici máme 5 barev – bílou, červenou, hnědou, zelenou a žlutou. Každou barvu můžeme použít vícekrát.

(Ovšem jeden pruh může být obarven pouze jednou barvou.)

A) Určete počet vlajek, které lze z těchto barev sestavit.

B) Kolik takových vlajek má žlutý pruh?

C) Kolik vlajek má žlutý pruh uprostřed?

D) Kolik vlajek nemá červený pruh?

E) Kolik vlajek nemá červený pruh uprostřed?

Řešení:

A) Doplňujeme barvy na tři části vlajky, vybíráme tedy 3 barvy z pěti a přitom barvy můžeme použít vícekrát:
1. 2. 3. $\rightarrow$ _ _ _

Na první místo máme 5 možností:
5 _ _

Na druhé místo máme opět 5 možností, barvy se mohou opakovat:
5 5 _

Na třetí místo máme opět 5 možností:
5 5 5

Výsledek: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

B) Situaci si rozdělíme na tři případy: Buď žlutý pruh bude vlevo nebo uprostřed nebo vpravo na vlajce:
Ž _ _   _ Ž _   _ _ Ž

Umístění žluté barvy tímto máme určené. Na toto místo máme pouze jednu možnost výběru barvy = žlutou:
1 _ _   _ 1 _   _ _ 1

Na zbývající dvě místa máme k dispozici pět barev:
1 5 5   5 1 5   5 5 1

Jednotlivé možnosti:
$1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$,
$5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$,
$5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$.

Jelikož se jedná o 3 různé případy, z nichž k obarvení každého případu máme 25 možností, celkem budeme mít podle pravidla součtu: $25 + 25 + 25 = 75$ různých vlajek.

C) Žlutý pruh uprostřed a na zbývající pruhy máme k dispozici 5 barev:
$5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$.

D) Nemá červený pruh, počet barev na vlajku je tedy 4:
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

E) Dá se vypočítat dvěma způsoby:

I. Můžeme od počtu všech vlajek odečíst ty, které mají prostřední barvu červenou.
Tato čísla máme už vypočítané:
Počet všech vlajek $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
Počet vlajek s červenou uprostřed $5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$.
Vlajky bez prostředního pruhu červeného: $125 - 25 = 100$.

II. Máme obarvit 3 pruhy na vlajce:
_ _ _
Začneme od prostředního pruhu. Na něj máme pouze 4 barvy – červenou nechceme:
_ 4 _
Na zbývající dva pruhy můžeme použít 5 pět barev:
5 4 5
Celkem:
$5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

Příklad 1.5.2. *SPZ*

Bývalé české SPZ tvořily 3 písmena a 4 čísla, např. KME0782. Určete, kolik různých SPZ dříve mohlo být?

Na SPZ se používalo 28 písmen a číslice 0, 1, 2, . . . , 9.

Řešení:

Vybíráme prvky na 7 různých míst:
_ _ _ _ _ _ _
První tři místa tvoří písmena:
28 28 28 _ _ _ _
Zbývající místa tvoří číslice 0, 1, 2, ..., 9, těch je 10:
28 28 28 10 10 10 10
Celkem: $28 \cdot 28 \cdot 28 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 219520000$.

Obrázek 1.17: Auto, zdroj: [11]

Příklad 1.5.3. *Čísla*

A) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel sestavených z číslic 1, 2, 3, 7, 8, 9?

B) Kolik z nich je menších než 6000?

C) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel sestavených z číslic 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9?

Řešení:

A) Situaci si rozdělíme na případy:

I. Výběr čtyřciferných čísel.

II. Výběr tříciferných čísel.

III. Výběr dvouciferných čísel.

IV. Výběr jednociferných čísel.

I. Máme čtyři cifry: _ _ _ _

Můžeme na ně umístit číslice: 1, 2, 3, 7, 8, 9. Celkem 6 číslic.
6 6 6 6

Celkově: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

II. Pro tříciferná čísla obdobně: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

III. Pro dvouciferná čísla: $6 \cdot 6 = 36$.

IV. Jednociferná čísla: 6.

Vypočítali jsme, kolik máme možností pro výběr 4 různých čísel (nejprve čtyřciferného čísla, poté tříciferného, dvouciferného a jednociferného), proto výsledek je podle pravidla součtu:
$1296 + 216 + 36 + 6 = 1554$.

B) Postup řešení je stejný jako v A). Jediný rozdíl bude pro výpočet čtyřciferných čísel. Na prvním místě může být pouze jedna z číslic: 1, 2, 3. Celkem 3 číslice. (Proč? Čísla mají být menší než 6000.)
$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 648$

Počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel menších než 6000 je:
$648 + 216 + 36 + 6 = 906$.

C) Opět si situaci rozdělíme na případy:

I. Výběr čtyřciferných čísel.

II. Výběr tříciferných čísel.

III. Výběr dvouciferných čísel.

IV. Výběr jednociferných čísel.

I. Na čtyři cifry: _ _ _ _
   můžeme umístit čtyři číslice z následujících 7 číslic: 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9:
   6 7 7 7

   Celkově: $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058$.

II. Pro tříciferná čísla analogicky: $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$.

III. Pro dvouciferná čísla: $6 \cdot 7 = 42$.

IV. Jednociferná (přirozená) čísla: 6.

Vypočítali jsme, kolik máme možností pro výběr 4 různých čísel (nejprve čtyřciferného čísla, poté tříciferného, dvouciferného a jednociferného), proto opět podle pravidla součtu je výsledek: $2058 + 294 + 42 + 6 = 2400$.

Definice 8. k-členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše k-krát.

Z předchozích úvah vyplývá následující věta:

Věta 5. *Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je: $V'(k,n) = n^k$.*

Vypočítáme si některé již řešené příklady s využitím vzorce.

Příklad 1.5.1. *Vlajky – podle vzorce*

Vlajka má být složena ze tří svislých pruhů, k dispozici máme 5 barev – bílou, červenou, hnědou, zelenou a žlutou. Každou barvu můžeme použít vícekrát. Určete počet vlajek, které lze z těchto barev sestavit.

Řešení:

Počet prvků, z nichž vybíráme: $n = 5$.
Kolika člennou variaci vybíráme: $k = 3$.
$V'(3,5) = 5^3 = 125$.

Příklad 1.5.2. *SPZ – podle vzorce*

Bývalé české SPZ tvořily 3 písmena a 4 čísla, např. KME0782. Určete kolik různých SPZ dříve mohlo být?

Na SPZ se používalo 28 písmen a číslice 0, 1, 2, ..., 9.

Řešení:

SPZ si rozdělíme na dvě části, část písmen a část číslic.

Písmena:

Počet prvků, z nichž vybíráme: $n = 28$.
Kolika člennou variaci vybíráme: $k = 3$.
$V'(3,28) = 28^3 = 21952$.

Číslice:

Počet prvků, z nichž vybíráme: $n = 10$.
Kolika člennou variaci vybíráme: $k = 4$.
$V'(4,10) = 10^4 = 10000$.

Celkem: $28^3 \cdot 10^4 = 219520000$.

Shrnutí počítání podle vzorce:

Použití vzorce může urychlit řešení úlohy, vždy je však nezbytné do úlohy nejprve proniknout.

1.5.2 Příklady k procvičení

Příklad 1.5.4.

Kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až čtyřech znacích? [2]

Řešení:

Počet jednoznakových prvků Morseovy abecedy: 2 $[= V'(1,2)]$
Počet dvouznakových prvků Morseovy abecedy: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ $[= V'(2,2)]$
Počet tříznakových prvků Morseovy abecedy: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ $[= V'(3,2)]$
Počet čtyřznakových prvků Morseovy abecedy: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ $[= V'(4,2)]$
Celkem: $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Příklad 1.5.5.

Žofka zapomněla své telefonní číslo. Ví jen, že mělo předčíslí 773 a poté jej tvořilo 6 číslic takových, že: první tři číslice byly sudé nebo nula, další dvě číslice byly liché a poslední si nepamatuje vůbec.

Kolik takových různých telefonních čísel lze sestavit?

Řešení:

Označme: S – sudá číslice nebo nula, L – lichá číslice, Č – libovolná číslice
S S S L L Č
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 = 31250$.

Příklad 1.5.6.

Kolik je všech čtyřciferných čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze cifry 1, 2, 3, 4, 5.

Řešení:

Máme k dispozici 5 číslic.

Aby číslo bylo dělitelné 4, musí poslední dvojčíslí být dělitelné 4. V tomto případě tedy poslední dvě cifry mohou být:
12, 24, 32, 44, 52 = 5 možností

Čtyřciferné číslo: _ _ _ _

Poslední dvě cifry mají dohromady 5 možností: _ _ (_ _) $\rightarrow$ _ _ 5

Doplníme počet možností na ostatní cifry: 5 5 5

Výsledek: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Příklad 1.5.7.

Určete počet všech přirozených čísel menších než milión, která lze zapsat dekadicky pouze použitím číslic 5, 8.

Řešení:

Rozdělíme si příklad na situace šesticiferných čísel, pěticiferných, čtyřciferných, tříciferných, dvouciferných a jednociferných. A výsledky z jednotlivých situací podle pravidla součtu sečteme.

$2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 126$
$[= V'(6,2) + V'(5,2) + V'(4,2) + V'(3,2) + V'(2,2) + V'(1,2)]$

Příklad 1.5.8.

Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokažte, že aspoň dva obyvatelé městečka mají stejné iniciály.

Řešení:

Všech možných variací iniciál je $32 \cdot 32 = 1024[= V'(2,32)]$, což je méně než počet obyvatel. Podle Dirichletova principu[1] musí v městečku existovat nejméně 2 lidé se stejnými iniciály.

Příklad 1.5.9.

Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici; těchto číslic je na každém kotouči devět. Určete největší možný počet

[1] Dirichletův princip je jedním ze základních principů používaných v kombinatorice. Jde o tvrzení: Umístíme-li m předmětů do n přihrádek, kde $m > n$ a $m, n \in \mathbb{N}$, pak bude existovat alespoň jedna přihrádka, ve které budou alespoň dva předměty.

pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo. [2]

Řešení:
$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049 \qquad [= V'(5,9)]$

Příklad 1.5.10.

Na panelu je k žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat. [2]

Řešení:
$3^k \qquad [= V'(k,3)]$

Příklad 1.5.11.

Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je číslo sudé.

Řešení:
Na první cifru nemůže zvolit číslici 0, další čtyři cifry volíme libovolně a poslední cifru pak doplníme tak, aby ciferný součet byl sudé číslo:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 450000$

Příklad 1.5.12.

Kolik různých vrhů lze provést A) dvěma, B) třemi šestibokými kostkami? (Stěny jsou označeny jednou, dvěma, . . . až šesti tečkami.)

Řešení:
A) $6 \cdot 6 = 36 \qquad [= V'(2,6)]$
B) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \qquad [= V'(3,6)]$

Příklad 1.5.13.

A) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel vytvořených z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, která jsou dělitelná čtyřmi.

B) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel vytvořených z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, která jsou dělitelná čtyřmi. [1]

Řešení:
A) Posledních dvojčíslí sestavených z uvedených číslic dělitelných 4 je 9, proto:
$6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$.
B) Posledních dvojčíslí sestavených z uvedených číslic dělitelných 4 je 9, proto:
$5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$.

1.6 Permutace s opakováním

Při počítání s permutacemi bez opakování jsme počítali, kolik různých uspořádání můžeme utvořit ze všech předem daných prvků, kde se každý vyskytoval právě jednou.

I nyní nás bude zajímat počet různých uspořádání dané délky ze všech předem daných prvků s tím, že některé prvky mezi sebou nerozlišujeme, jinak řečeno mohou se opakovat. Na pořadí prvků stále záleží.

1.6.1 Řešené příklady

Příklad 1.6.1. *Vagóny*

Strojvedoucí chce za lokomotivu připojit 3 vagóny, 1 je nákladní a 2 jsou osobní. Kolik různých možností má strojvedoucí, jak vagóny zapojit? (Osobní vagóny mezi sebou nerozlišujeme.)

Obrázek 1.18: Vlak s 1 nákladním a 2 osobními vagóny, zdroj: [11]

Řešení:

Uspořádáme všechny vagóny:

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Tím, že osobní vagóny mezi sebou nerozlišujeme, jsme započítali některá uspořádání vagónů víckrát.

Nyní dostáváme tato uspořádání (N – nákladní vagón, O1, O2 – osobní vagóny – sice je nerozlišujeme, ale pro vysvětlení počítání si je označíme):

N O1 O2   O1 N O2   O1 O2 N
N O2 O1   O2 N O1   O2 O1 N

Jak to vyřešíme?

Všimněte si, že sloupce tvoří pevně umístěný nákladní vagón a k němu různá umístění osobních vagónů. Počet různých umístění osobních vagónů je 2!. Proto pokud je nerozlišujeme, musíme výsledek vydělit počtem permutací osobních vagónů.

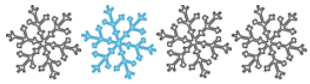
$$\frac{3!}{2!} = 3$$

Příklad 1.6.2. *Vločky*

Petra má čtyři papírové sněhové vločky. Tři jsou bílé barvy a jedna je modrá. Kolik má možností uspořádání vloček, chce-li je zavěsit na čtyři okna tak, že na každém okně je právě jedna vločka?

Řešení:

Celkem jsou čtyři vločky, počet jejich možných uspořádání je 4!.



Obrázek 1.19: Příklad uspořádání vloček, zdroj: [11]

Jelikož bílé vločky mezi sebou nerozlišujeme, dělíme ještě počtem permutací třech bílých vloček a dostáváme výsledek:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

Proč dělíme počtem permutací třech vloček?

Pokud si vypíšeme všechna uspořádání vloček s rozlišením bílých vloček, dostáváme: (B_1, B_2, B_3 – bílé vločky, M – modré vločky)

M B_1 B_2 B_3	B_1 M B_2 B_3	B_1 B_2 M B_3	B_1 B_2 B_3 M
M B_1 B_3 B_2	B_1 M B_3 B_2	B_1 B_3 M B_2	B_1 B_3 B_2 M
M B_2 B_1 B_3	B_2 M B_1 B_3	B_2 B_1 M B_3	B_2 B_1 B_3 M
M B_2 B_3 B_1	B_2 M B_3 B_1	B_2 B_3 M B_1	B_2 B_3 B_1 M
M B_3 B_1 B_2	B_3 M B_1 B_2	B_3 B_1 M B_2	B_3 B_1 B_2 M
M B_3 B_2 B_1	B_3 M B_2 B_1	B_3 B_2 M B_1	B_3 B_2 B_1 M

V tabulce můžeme vidět, že sloupce tvoří právě ty čtveřice, které obsahují stejné postavení modré vločky vůči bílým. Tedy v rámci sloupce je umístění modré pevně dáno a bílé jsou propermutovány mezi sebou. Pokud tedy bílé vločky mezi sebou nerozlišujeme, musíme vydělit počtem řádků a těch je právě 3!.

Příklad 1.6.3. *Péticiferná čísla*

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel sestavených z číslic 4 a 6, má-li číslice 6 být obsažena právě třikrát.

Řešení:

Jestliže číslice 6 má být obsažena třikrát, číslice 4 bude obsažena dvakrát.

Rozmísťujeme $2+3$ $(=5)$ číslic: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

Číslice 6 mezi sebou nerozlišujeme, taktéž i číslice 4, proto ještě vydělíme počtem permutací jednotlivých číslic:

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Příklad 1.6.4. *Abrakadabra*

A) Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA.

B) Určete, v kolika z nich žádná dvojice sousedních písmen není tvořena dvěma písmeny A. [2]

Řešení:

A) Jde o permutace s opakováním z pěti písmen A, B, D, K, R, v nichž je A pětkrát, B dvakrát, D jednou, K jednou a R dvakrát. Počet všech permutací tedy je:
$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{480}$

B) Nemají-li být dvě písmena A vedle sebe, musí být každé z pěti písmen A na jednom ze sedmi míst vyznačených podtržítkem:
_ B _ R _ K _ D _ B _ R _

Pět z těchto míst lze vybrat $\binom{7}{5}$ způsoby a zbývající písmena lze přemístit $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$

Počet všech „slov", v nichž žádná dvě písmena A spolu nesousedí, je

$$\binom{7}{5} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 3780.$$

Definice 9. Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje aspoň jednou.

Z předchozích úvah vyplývá následující věta:

Věta 6. *Počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ všech permutací z n prvků je:*

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Ukážeme si postup podle vzorce:

Příklad 1.6.1. *Vagóny – podle vzorce*

Strojvedoucí chce za lokomotivu připojit 3 vagóny, 1 je nákladní a 2 jsou osobní. Kolik různých možností má strojvedoucí, jak vagóny zapojit? (Osobní vagóny mezi sebou nerozlišujeme.)

Řešení:

$$P'(1,2) = \frac{(1+2)!}{1! \cdot 2!} = 3$$

Příklad 1.6.4. *Abrakadabra – podle vzorce*

Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA.

Řešení:

$$P'(1,1,2,2,5) = \frac{(1+1+2+2+5)!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 5!} = \frac{11!}{2 \cdot 2 \cdot 5!} = 83160$$

1.6.2 Příklady k procvičení

Příklad 1.6.5.

Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)
A) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8 x 8;
B) na některé dvě řady šachovnice 8 x 8.

Řešení:
A)

$$\frac{(1+1+2+2+2+8)!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 8!} = \frac{16!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 8!} = 64864800 \qquad = [P'(1,1,2,2,2,8)]$$

B)

$$\binom{8}{2}\cdot\frac{16!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 8!} = 1816214400$$

Příklad 1.6.6.

Jistě jste poznali, že v anagramech AABIIKKMNOORT resp. MINIKABAROTOK je zašifrováno slovo KOMBINATORIKA. Určete počet všech anagramů, jež lze ze slova KOMBINATORIKA utvořit. [2]

Řešení:

Celkem je ve slově 13 písmen. Počet jednotlivých písmen je:
A - 2, B - 1, I - 2, K - 2, M - 1, N - 1, O - 2, R - 1, T - 1.
Jelikož jednotlivá písmena mezi sebou nerozlišujeme, dostáváme výsledek:

$$\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 389188800 \qquad = [P'(1,1,1,1,1,2,2,2,2)]$$

Příklad 1.6.7.

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5
A) právě třikrát;
B) nejvýše třikrát;
C) aspoň třikrát. [2]

Řešení:
A)

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10 \qquad = [P'(2,3)]$$

B)

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{5!}{1!\cdot 4!}+\frac{5!}{0!\cdot 5!} = 26 \qquad = [P'(3,2)+P'(2,3)+P'(1,4)+P'(0,5)]$$

C)
$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}+\frac{5!}{4!\cdot 1!}+\frac{5!}{5!\cdot 0!}=16 \qquad =[P'(3,2)+P'(4,1)+P'(5,0)]$$

Příklad 1.6.8.

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných devíti, v jejichž dekadickém zápisu nejsou jiné číslice než 0, 1, 5, 7. [2]

Řešení:

Ciferný součet uvažovaných čísel je nejvýše $4\cdot 7=28$. Podmínka dělitelnosti čísla devíti je ekvivalentní tomu, že ciferný součet je dělitelný devíti. Do úvahy tak připadají pouze ciferné součty 27, 18, 9.

Ciferný součet 27 z uvažovaných číslic dostat nelze.

Ciferný součet 18 lze dostat pouze použitím číslic 7, 7, 2, 2 anebo 7, 5, 5, 1.

Ciferný součet 9 utvoří pouze číslice 7, 2, 0, 0 nebo 7, 1, 1, 0 nebo 5, 2, 2, 0 nebo 5, 2, 1, 1.

Počet čtyřciferných čísel odpovídajících jednotlivým skupinám cifer:

$$7,7,2,2 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$
$$7,5,5,1 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!}=12$$
$$7,2,0,0 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!}-3!=6$$
$$7,1,1,0 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$$
$$5,2,2,0 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=9$$
$$5,2,1,1 \quad \dots \quad \frac{4!}{2!}=12$$

V některých případech jsme odečítali situace, kdy na první cifře je číslice 0. Podle pravidla součtu je počet všech čtyřciferných čísel odpovídajících zadání roven:

$$6+12+6+9+9+12=54.$$

Příklad 1.6.9.

Určete počet všech anagramů, které lze získat z písmen slova ROKOKO, nesmějí-li v takovém anagramu stát všechna tři písmena O vedle sebe. [1]

Řešení:

Požadovaný výsledek získáme, pokud od počtu všech anagramů odečteme ty, kde se vyskytují tři písmena O vedle sebe (tři O vedle sebe budeme počítat jako jeden prvek).

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}-\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=60-12=48$$

Příklad 1.6.10.

Určete počet všech anagramů, které lze vytvořit z písmen slova PARABOLA, jestliže požadujeme, aby se ve vytvořeném anagramu pravidelně střídaly samohlásky a souhlásky. [1]

Řešení:

Každý vyhovující anagram začíná buď samohláskou, nebo souhláskou (místa pro další samohlásky, resp. souhlásky jsou pak jednoznačně určena). Na zadaných místech lze pak souhlásky umístit 4! způsoby, pro zápis samohlásek je pak $\frac{4!}{3!} = [P'(1,3)]$ možností.

Podle pravidla součinu je celkový počet anagramů $2 \cdot (4! \cdot \frac{4!}{3!}) = 192$.

Příklad 1.6.11.

Pro osm studentů je připraveno v koleji ubytování ve 3 pokojích, z nichž 2 jsou třílůžkové, jeden dvoulůžkový. Kolik je způsobů rozdělení studentů do jednotlivých pokojů? [1]

Řešení:

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 560 \qquad = [P'(2,3,3)]$$

Příklad 1.6.12.

Rychlíková souprava bude tvořena ze dvou zavazadlových vozů, jednoho jídelního vozu, čtyřech vozů lůžkových a tří lehátkových. Kolik různých typů souprav lze sestavit? [1]

Řešení:

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 12600 \qquad = [P'(1,2,3,4)]$$

Příklad 1.6.13.

Když Christian Huygens objevil Saturnův prstenec, zašifroval svůj objev, jak bylo v té době časté, do následujícího anagramu:

aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn
oooo pp q rr s ttttt uuuuu

Náležitým uspořádáním písmen dostaneme zprávu *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato*. Česky: *Obklopen prstencem tenkým, plochým, nikde nezavěšeným, nakloněným k ekliptice*.

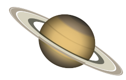
Určete, za jak dlouho by počítač, který by vypsal milión permutací Huygensova anagramu za sekundu, vypsal všechny permutace. [3]

Řešení:

Všech permutací je:

$$\frac{62!}{9!\cdot 7!\cdot 7!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{62!}{9!\cdot (7!)^2\cdot (5!)^4\cdot (4!)^2\cdot (2!)^3}$$
$$= [P'(2,2,2,4,4,5,5,5,5,7,7,9)]$$

Toto číslo je přibližně rovno číslu $3,573\cdot 10^{60}$. Počítač by potřeboval více než 10^{54} sekund. O velikosti tohoto čísla si uděláme představu, když si uvědomíme, že trvání našeho vesmíru (tj. přibližně 15 miliard roků) je méně než 10^{17} sekund. [3]



Obrázek 1.20: Saturn, zdroj: [11]

Příklad 1.6.14.

Poznáte zprávu Gaia Iulia Caesara zaslanou do Říma po vítězství nad pontským králem Farnakem, která se skrývá v anagramu CDEIIIIINVVV? Kolika způsoby lze v ní přemístit písmena? [2]

Řešení:

Veni, vidi, vici (Přišel jsem, viděl jsem, zvítězil jsem).

$$\frac{12!}{3!\cdot 5!} = 665280 \qquad = [P'(1,1,1,1,3,5)]$$

Příklad 1.6.15.

Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven třem. Kolik z nich je sudých? [2]

Řešení:

Aby ciferný součet byl roven třem, můžeme použít následující skupiny číslic:

I) jedna 3 a devět 0

1 možnost.

II) jedna 2, jedna 1 a osm 0

Na první cifru můžeme zvolit jednu ze dvou možností (1 nebo 2) a k oběma těmto možnostem existuje pro umístění další nenulové číslice 9 různých možností. Celkem: $2\cdot 9 = 18$ možností.

III) tři 1 a sedm 0

První cifra je jednoznačně určená číslicí 1, poté pro rozmístění zbylých dvou 1 a sedmi 0 je možností $\dfrac{9!}{2!\cdot 7!} = 36$.

Celkem podle pravidla součtu: $1+18+36 = 55$

Aby číslo bylo sudé, na poslední cifře nesmí být lichá číslice, celkem takových čísel je: $1+(9+8)+\dfrac{8!}{2!\cdot 6!} = 46$

Příklad 1.6.16.

Určete, kolik čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer čísla 238 832. [2]

Řešení:

$$3 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{4!}{2!} = 54 \qquad = [3 \cdot P'(2,2) + 3 \cdot P'(1,1,2)]$$

1.7 Kombinace s opakováním

V kombinacích s opakováním nás budou zajímat skupiny prvků, kde nezáleží na uspořádání vybraných prvků a kde se prvky mohou opakovat. Podívejme se hned na první příklad.

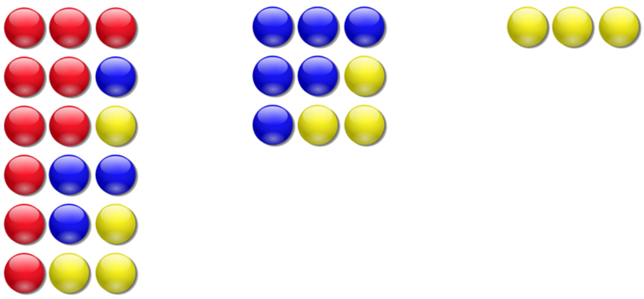
1.7.1 Úvodní příklady

Příklad 1.7.1. *Tři kuličky tří barev*

V sáčku je mnoho červených, modrých a žlutých kuliček. Kolik různých možností máme, chceme-li si vybrat 3 z nich? (Na pořadí vybraných kuliček nezáleží a kuličky téže barvy mezi sebou nerozlišujeme.)

Řešení:

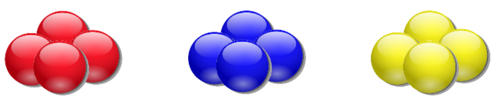
Pokud si znázorníme všechny možnosti, zjistíme, že jich je 10:



Obrázek 1.21: Všechny kombinace kuliček, zdroj: autor

Jak se početně dopočítáme k tomuto výsledku? Postup i pro další příklady si zkusíme odůvodnit. Každou kombinaci kuliček si zašifrujeme pomocí teček a čárek následovně:

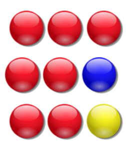
Mysleme si, že máme tři hromádky – na jedné jsou červené kuličky, na druhé jsou modré a na poslední jsou žluté kuličky.



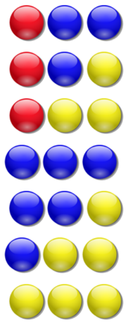
Obrázek 1.22: Tři hromádky kuliček, zdroj: autor

Pro každou kombinaci zakreslíme pod příslušnou hromádku tolik teček, kolikrát se v dané kombinaci tento prvek vyskytuje. A pro rozlišení mezi sousedními hromádkami použijeme svislou čáru (mezi první a druhou přihrádkou a mezi druhou a třetí). Není-li kulička některé barvy v dané kombinaci, nebude pod touto hromádkou žádná tečka.

Dostaneme takové přiřazení:



$$\longrightarrow \quad \bullet\bullet\bullet \mid \mid$$
$$\longrightarrow \quad \bullet\bullet \mid \bullet \mid$$
$$\longrightarrow \quad \bullet\bullet \mid \mid \bullet$$



$$\longrightarrow \quad \bullet \mid \bullet\bullet \mid$$
$$\longrightarrow \quad \bullet \mid \bullet \mid \bullet$$
$$\longrightarrow \quad \bullet \mid \; \mid \bullet\bullet$$
$$\longrightarrow \quad \mid \bullet\bullet\bullet \mid$$
$$\longrightarrow \quad \mid \bullet\bullet \mid \bullet$$
$$\longrightarrow \quad \mid \bullet \mid \bullet\bullet$$
$$\longrightarrow \quad \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet$$

Všimněte si, že takové přiřazení je jednoznačné – každé tří prvkové kombinaci můžeme jednoznačně přiřadit pětici skládající se ze 3 teček a 2 svislých čar a obráceně.

Uvědomme si, že ačkoli nám u výběru kuliček nezáleželo na pořadí, u uspořádání teček a čar už jejich pořadí důležité je. Od kombinací s opakováním jsme jednoznačně přešli k permutacím s opakováním, jejichž počet už umíme vypočítat, dostáváme výsledek:

$$\frac{(3+2)!}{3!\cdot 2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

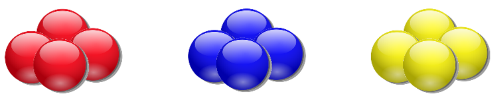
Poznámka: Na počet pětic složených ze tří teček a dvou čar se také můžeme dívat jako na výběr dvou míst z pěti, na kterých budou svislé čáry. Tento počet je tedy $\binom{5}{2}$.

Příklad 1.7.2. *Čtyři kuličky tří barev*

V sáčku je mnoho červených, modrých a žlutých kuliček. Kolik různých možností máme, chceme-li si vybrat 4 z nich?

Řešení:

Stále máme tři hromádky – jednu červených, druhou modrých a poslední žlutých kuliček.

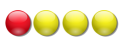


Obrázek 1.23: Tři hromádky kuliček, zdroj: autor

Počet kuliček příslušné barvy opět určíme tečkami a pro rozlišení jejich barev opět použijeme 2 svislé čáry.

Proč svislé čáry jsou právě dvě? Je to dáno počtem hromádek (různých prvků), pro rozdělení 3 různobarevných hromádek potřebujeme svislé čáry v počtu o jednu méně.

Příklad jednoho přiřazení:



$$\longrightarrow \quad \bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet$$

Rozmísťujeme 4 tečky a 2 svislé čáry, kde záleží na jejich pořadí, dostáváme výsledek:

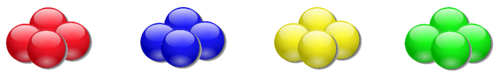
$$\frac{(4+2)!}{4!\cdot 2!} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \qquad \left[= \binom{6}{2} \right]$$

Příklad 1.7.3. *Tři kuličky čtyř barev*

V sáčku je mnoho červených, modrých, žlutých a zelených kuliček. Kolik různých možností máme, chceme-li si vybrat 3 z nich?

Řešení:

Nyní dostáváme čtyři hromádky – na jedné jsou červené kuličky, na druhé jsou modré, na třetí žluté a na poslední zelené kuličky.



Obrázek 1.24: Čtyři hromádky kuliček, zdroj: autor

Zašifrováváme je stejným způsobem jako v předešlých dvou příkladech. Pomocí teček a svislých čar. Kolik bude nyní teček a čar? Vybíráme 3 kuličky, proto budou 3 tečky. Máme 4 různé barvy, proto budou 3 svislé čáry.

Příklad jednoho přiřazení:

 $\longrightarrow \quad | \bullet | \bullet | \bullet$

Rozmísťujeme 3 tečky a 3 svislé čáry, kde záleží na jejich pořadí, dostáváme výsledek:

$$\frac{(3+3)!}{3! \cdot 3!} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \qquad \left[= \binom{6}{3} \right]$$

Shrnutí:

V úvodních příkladech jsme počítali počet všech kombinací s opakováním pomocí počtu všech permutací s opakováním.

Pokud jsme měli vypočítat počet všech neuspořádaných k-tic z prvků, kterých bylo n druhů, využili jsme k tomu počet všech permutací z $[k + (n-1)]$ prvků (počet kuliček, které jsme vybírali + počet svislých čar, jenž rozdělovaly hromádky).

Za chvíli si ukážeme, že tento postup opravdu vyhovuje i definici níže.

Je důležité si uvědomit, že jsme doposud měli k dispozici vždy dostatečný počet prvků (kuliček) od každého druhu (barvy). Tzn. při počítání počtu všech neuspořádaných trojic, jsme měli k dispozici 3 kuličky od každé barvy. Pokud bychom měli jen 2 kuličky od některé barvy, musíme to při výpočtu zohlednit. V řešených příkladech pod definicí některé takové příklady spočítáme.

Definice 10. k-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje nejvýše k-krát.

Z předchozích úvah vyplývá následující věta:

Věta 7. *Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je:*

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

<u>Odvození:</u>

$$K'(k,n) = P'(k,n-1) \qquad \text{nebo-li} \qquad \binom{n+k-1}{k} = \frac{[k+(n-1)]!}{k!(n-1)!}$$

Rozepsáním podle definic permutací s opakováním, kombinací s opakováním a kombinačního čísla dostáváme:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k![(n+k-1)-k]!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$P'(k,n-1) = \frac{[k+(n-1)]!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Dohromady: $K'(k,n) = \dfrac{n+k-1)!}{k!(n-1)!} = P'(k,n-1)$.

1.7.2 Řešené příklady

Příklad 1.7.4. *Kvádr*

Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla, která jsou nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí? [2]

Řešení:

Vybíráme 3 číslice z deseti, číslice se mohou opakovat a nezáležím nám na jejich pořadí. (3 tečky a 9 svislých čar)

$$\binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3} \qquad [= \frac{12!}{3!9!} = 220]$$

Krychle má všechny délky hran stejně dlouhé, my máme k dispozici 10 různých číslic, proto je 10 krychlí.

Příklad 1.7.5. *Koláče*

Obrázek 1.25: Tři druhy koláčů, zdroj: [11]

Matějova maminka upekla 3 druhy koláčů – makové, ořechové, tvarohové. Od každého 5 kusů. Určete, kolika způsoby si Matěj může vybrat

A) 4 koláče;

B) 6 koláčů.

Řešení:

A) Vybíráme 4 koláče ze 3 různých druhů:

$$\binom{4+(3-1)}{4} = \binom{6}{4} \qquad [= \frac{6!}{4!2!} = 15]$$

B) V tomto případě si Matěj nemůžeme vybrat 6 koláčů stejného druhu. Přesto vypočítáme počet všech kombinací, jak si může vybrat 6 koláčů, a od tohoto počtu odečteme počet případů, které nelze sestavit. Nemůže si vybrat kombinaci šesti makových, šesti ořechových a šesti tvarohových koláčů, tedy 3 případy.

$$\binom{6+(3-1)}{6} - 3 = 28 - 3 = 25$$

Příklad 1.7.6. *Pohlednice*

V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohlednic, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit

A) 15 pohlednic;

B) 51 pohlednic;

C) 8 různých pohlednic. [2]

Řešení:

A) Vybíráme 15 pohlednic z 10 různých druhů:

$$\binom{15+(10-1)}{15} = \binom{24}{15} \qquad [= \frac{24!}{15!9!} = 1307504]$$

B) V tomto případě nemůžeme vybrat 51 pohlednic jednoho druhu. Proto odečteme počet případů, kdy jsou všechny pohlednice stejné, a dostaneme náš výsledek:

$$\binom{51+(10-1)}{51} - 10 = \binom{60}{51} - 10 \qquad [= 14783142660 - 10 = 14783142650]$$

C) Vybíráme 8 různých pohlednic, tzn. že se prvky nemohou opakovat:

$$\binom{10}{8} \qquad [= 45]$$

1.7.3 Příklady k procvičení

Příklad 1.7.7.

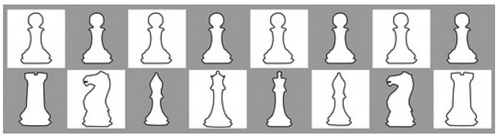
Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jednou z číslic 4, 5, 6, 7.

Řešení:

$$\binom{6}{3} \qquad [= 20]$$

Příklad 1.7.8.

Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme A) trojici, B) dvojici. Jaký je počet možností pro jejich složení?



Obrázek 1.26: Bílé šachové figurky, zdroj: [11]

Řešení:

A) $\binom{6}{3} - 3 \qquad [= 20 - 3 = 17]$

(Odečítáme možnosti, kdy jsme vybrali 3 věže, 3 jezdce nebo 3 střelce.)

B) $\binom{5}{2} \qquad [= 10]$

Příklad 1.7.9.

V sadě 32 karet je každá z následujících karet čtyřikrát: sedmička, osmička, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso; karty téže hodnoty jsou přitom rozlišeny těmito „barvami“: červená, zelená, žaludy, kule. Určete, kolika způsoby je možno vybrat čtyři karty, jestliže se

A) rozlišují pouze „barvy“ jednotlivých karet;

B) rozlišují pouze hodnoty jednotlivých karet. [2]

Řešení:

A) $\binom{7}{4} \qquad [= 35]$

B) $\binom{11}{4} \qquad [= 330]$

Příklad 1.7.10.

Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty teček na jednotlivých šestibokých kostkách při vrhu třemi kostkami? (Stěny kostek jsou označeny jednou, dvěma, . . . až šesti tečkami.)

Obrázek 1.27: Tři kostky, zdroj: [11]

Řešení:

$$\binom{8}{3} \qquad [= 56]$$

Příklad 1.7.11.

Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy; k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné? [2]

Řešení:

$$\binom{5}{3} - 1 \qquad [= 10 - 1 = 9]$$

Příklad 1.7.12.

Mezi 6 dětí rozdělujeme 15 (stejných) tenisových míčků.
A) Určete počet všech možných rozdělení.
B) Určete počet všech rozdělení, při kterých každé dítě dostane aspoň jeden míček. [1]

Řešení:
A) Uvědomme si, že tentokrát rozdělující svislé čáry dáváme mezi děti. Proto výsledek je

$$\binom{15 + (6-1)}{15} = \binom{20}{15} \qquad [= 15504]$$

B) Nejprve dáme každému dítěti jeden míček a poté rozdělíme zbylých devět míčků.

$$\binom{9 + (6-1)}{9} = \binom{14}{9} \qquad [= 2002]$$

Příklad 1.7.13.

Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek, aniž by je krájely?
(Připouštíme i situace, že některé osoby nic nedostanou.) [1]

Řešení:
Nalezneme nejprve počet všech rozdělení hrušek mezi 3 osoby, podobně jako v předchozím příkladu, zjistíme, že jich je $\binom{7+(3-1)}{7} = \binom{9}{7}$.

A poté počet všech rozdělení jablek, těchto je $\binom{5+(3-1)}{5} = \binom{7}{5}$.

Podle pravidla součinu je možné rozdělení obou druhů ovoce provést $\binom{9}{7} \cdot \binom{7}{5} = 756$ způsoby.

Příklad 1.7.14.

V lahůdkářství mají kávu pěti různých druhů. Kolika způsoby je možné provést nákup 12 balíčků kávy? Kolika způsoby je to možné, požadujeme-li, aby v nákupu bylo alespoň po dvou balíčcích každého druhu kávy? [1]

Obrázek 1.28: Káva, zdroj: [11]

Řešení:

Nákup káv je možný $\binom{16}{12}$ [= 1820] způsoby.

Požadujeme-li, aby v nákupu bylo alespoň po dvou balíčcích každého druhu kávy a kávy je pět druhů, deset balíčků je už určeno. Stačí tedy vybrat jen dva balíčky kávy, takových možností je $\binom{6}{2}$ [= 15].

Příklad 1.7.15.

Kolika způsoby lze do 9 různých přihrádek rozmístit 7 bílých a 2 černé koule
A) nesmí-li žádná přihrádka zůstat prázdná?
B) mohou-li některé přihrádky zůstat prázdné? [1]

Řešení:

A) Nesmí-li žádná přihrádka zůstat prázdná, tzn. že v každé bude právě jedna koule. Stačí vybrat 2 přihrádky z devíti, v nichž budou černé koule. Do zbylých přihrádek je rozmístění bílých koulí jednoznačné.

$$\binom{9}{2} \qquad [= 36]$$

B) Rozmístíme bílé koule a poté černé koule:

$$\binom{15}{7} \cdot \binom{10}{2} \qquad [= 289575]$$

Poznámka: Všimněte si, že v případě a) se jednalo o kombinace bez opakování. V přihrádce mohla být pouze jedna koule, tato přihrádka se tedy nemohla opakovat ve výběru pro umístění další koule. V případě b) v přihrádce mohlo být více koulí a mohli jsme ji tedy použít opakovaně pro výběr umístění dalších koulí.

Příklad 1.7.16.

V prodejně mají na výběr 12 různých lízátek. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit A) 15 lízátek; B) 7 lízátek; C) 7 různých lízátek. [5]

Řešení:

A) $\binom{26}{15}$ $[= 7726160]$

B) $\binom{18}{7}$ $[= 31824]$

C) $\binom{12}{7}$ $[= 792]$

1.8 Faktoriál a kombinační čísla

V této podkapitole si připomeneme, co to je faktoriál a kombinační číslo, a ukážeme si, jak se s těmito čísly počítá. Poté s využitím obou vyslovíme a dokážeme velmi užitečnou Binomickou větu.

1.8.1 Faktoriál

Než začneme řešit příklady, připomeňme si definici faktoriálu z podkapitoly *1.3 Permutace bez opakování*.

Definice 5. Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ kde } 0! = 1.$$

Číslo $n!$ čteme jako „n faktoriál“.

Poznámka: Všimněte si, že pro všechna přirozená čísla n, k, kde $k < n$ platí:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad 1.8.1.

Zjednodušte výrazy:

A) $\frac{(n+1)!}{n!}$ B) $\frac{n!}{(n+1)!}$ C) $\frac{(n-1)!}{n!}$ D) $\frac{n!}{(n-1)!}$

Řešení:

A) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = \frac{(n+1)}{1} = n+1$

B) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{(n+1)}$

C) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n\cdot(n-1)!} = \frac{1}{n}$

D) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n}{1} = n$

Příklad 1.8.2.

Zjednodušte výraz:

$$\frac{(m+1)!}{m!} - \frac{(2m)!}{(2m+1)!} + \frac{(3m-1)!}{(3m-2)!}$$

Řešení:

$$\frac{(m+1)!}{m!} - \frac{(2m)!}{(2m+1)!} + \frac{(3m-1)!}{(3m-2)!} =$$

$$= \frac{(m+1)\cdot m!}{m!} - \frac{(2m)!}{(2m+1)\cdot(2m)!} + \frac{(3m-1)\cdot(3m-2)!}{(3m-2)!} =$$

$$= (m+1) - \frac{1}{(2m+1)} + (3m-1) = \frac{8m^2+4m-1}{(2m+1)}$$

Příklad 1.8.3.

Zjednodušte výraz:

$$\frac{(z+1)!}{(z!)^2}+\frac{z!}{[(z-1)!]^2}$$

Řešení:

$$\frac{(z+1)!}{(z!)^2}+\frac{z!}{[(z-1)!]^2}=\frac{(z+1)\cdot z!}{z!\cdot z!}+\frac{z\cdot(z-1)!}{(z-1)!\cdot(z-1)!}=\frac{(z+1)}{z!}+\frac{z}{(z-1)!}=$$

$$=\frac{(z+1)}{z!}+\frac{z\cdot z}{(z-1)!\cdot z}=\frac{(z+1)}{z!}+\frac{z^2}{z!}=\frac{z^2+z+1}{z!}$$

Příklad 1.8.4.

Zjednodušte výrazy[2]:

A) $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}$ B) $\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}$

C) $\frac{(k+2)!}{k!}-2\frac{(k+1)!}{(k-1)!}+\frac{k!}{(k-2)!}$ D) $\frac{(k+2)!}{(k+1)!}-\frac{(k+1)!}{k!}$

Řešení:

A) $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}=\frac{n+1}{(n+1)\cdot n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{(n-2)\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)!}=$

$$=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{(n-2)}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-3-(n-2)}{(n+1)!}=\frac{0}{(n+1)!}=0$$

B) $\frac{1}{(n+2)!}$

C) 2

D) 1

1.8.2 Kombinační čísla

Opět si na úvod připomeňme definici kombinačního čísla z podkapitoly *1.4 Kombinace bez opakování.*

Definice 7. Pro vyjádření $K(k,n)$ užíváme i symbol $\binom{n}{k}$, nazývá se kombinační číslo a čte se „n nad k“.

Věta 4. Pro všechna celá nezáporná čísla n,k, kde $k \leq n$, platí:

$$K(k,n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklad 1.8.5.

A) Ověřte, zda platí rovnosti:

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{1}, \qquad \binom{12}{7} = \binom{12}{5}, \qquad \binom{7}{7} = \binom{7}{1}, \qquad \binom{41}{4} = \binom{41}{37}$$

B) Dokažte, že pro všechna celá nezáporná čísla n, k, kde $k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Řešení:

A) $$\left.\begin{aligned} \binom{3}{2} &= \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3}{1} = 3 \\ \binom{3}{1} &= \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \text{ANO}$$

$$\binom{12}{7} = \frac{12!}{7!5!}, \qquad \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} \quad \Longrightarrow \quad \text{ANO}$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = \frac{7!}{7!} = 1, \qquad \binom{7}{1} = \frac{7!}{1!6!} = \frac{7}{1} = 7 \quad \Longrightarrow \quad \text{NE}$$

$$\binom{41}{4} = \frac{41!}{4!37!}, \qquad \binom{41}{37} = \frac{41!}{37!4!} \quad \Longrightarrow \quad \text{ANO}$$

B) $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Příklad 1.8.6.

A) Vypočítejte:

$$\binom{5}{0}, \qquad \binom{14}{14}, \qquad \binom{38}{1}$$

B) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\text{I. } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \text{II. } \binom{n}{1} = n$$

Řešení:

A) $$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

$$\binom{14}{14} = \frac{14!}{14!(14-14)!} = 1$$

$$\binom{38}{1} = \frac{38!}{1!(38-1)!} = \frac{38!}{37!} = \frac{38}{1} = 38$$

B) I. $$\left.\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \end{aligned}\right\} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

II. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$

Příklad 1.8.7.

Dokažte, že platí:

$$\binom{0}{0} = 1$$

Řešení:
$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$

Příklad 1.8.8.

A) Ověřte rovnosti:
$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}, \qquad \binom{21}{2} + \binom{21}{3} = \binom{22}{3}, \qquad \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{4}$

B) Dokažte, že pro všechna celá nezáporná čísla n, k, kde $k < n$ platí:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Řešení:
A) $\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} = 28, \quad \binom{8}{6} = \frac{8!}{6!2!} = 28 \quad \Rightarrow \quad \text{ANO}$
$\binom{21}{2} + \binom{21}{3} = \frac{21!}{2!19!} + \frac{21!}{3!18!} = 1540, \quad \binom{22}{3} = \frac{22!}{3!19!} = 1540 \quad \Rightarrow \quad \text{ANO}$
$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} = 20, \quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \quad \Rightarrow \quad \text{NE}$

B)
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot [n-(k+1)]!} = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot [n-(k+1)]!} + \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot [n-(k+1)]!} = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot [n-(k+1)]!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) = \\
&= \frac{n!}{k! \cdot [n-(k+1)]!} \cdot \frac{n+1}{(n-k) \cdot (k+1)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Příklad 1.8.9.

Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet:

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{5}$$

Řešení:

Protože $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$, platí $\binom{7}{3} + \binom{7}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5}$

Příklad 1.8.10.

Vyjádřete jediným kombinačním číslem součet:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$$

Řešení:

Protože $\binom{3}{3} = \binom{4}{4}$, platí:

$$\begin{aligned}\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} &= \left[\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\right] + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \\ &= \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{3}\right] + \binom{6}{3} = \\ &= \binom{6}{4} + \binom{6}{3} = \binom{7}{4}\end{aligned}$$

Pascalův trojúhelník

Vlastnosti kombinačních čísel ilustruje následující schéma, které se nazývá **Pascalův trojúhelník**:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
 & & & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \\
\binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \dots & & \binom{n}{n-2} & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Pokud si čísla ve schématu vyčíslíme, dostaneme Pascalův trojúhelník tvaru:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Všimněte si v trojúhelníku všech výše dokázaných vlastností:

$$\binom{0}{0}, \quad \binom{n}{0}, \quad \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1}$$

Platí také symetrie od středu každého řádku:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Součet dvou sousedních čísel je číslo nacházející se o řádek níž mezi nimi:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1.8.3 Binomická věta

Jistě všichni víte, čemu se rovná

$$(a+b)^0 \qquad [= 1]$$

$$(a+b)^1 \qquad [= a+b]$$

$$(a+b)^2 \qquad [= a^2+2ab+b^2]$$

Někteří možná tušíte, čemu se rovná

$$(a+b)^3 \qquad [= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]$$

Dokázali byste určit i na čtvrtou?

$$(a+b)^4 \qquad [= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4]$$

A co $(a+b)^5$? S pomocí Binomické věty snadno určíte i tento rozklad. Všimněte si koeficientů u jednotlivých mnohočlenů.

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longleftrightarrow & \binom{0}{0} \\
1 \quad 1 & \longleftrightarrow & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
1 \quad 2 \quad 1 & \longleftrightarrow & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & \longleftrightarrow & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & \longleftrightarrow & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}
\end{array}$$

Jaké by tedy byly koeficienty u $(a+b)^5$?

$$1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1$$

neboli

$$\binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5}$$

Koeficienty mnohočlenů snadno určíme z Pascalova trojúhelníku. Všimli jste si ještě, jak je to s exponenty? U „a“ postupně klesaly, u „b“ se postupně zvyšovaly a přitom jejich součet je vždy roven exponentu u závorky (a+b).

Nyní už můžeme snadno určit celý rozvoj:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5 =$$

$$= 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$$

Binomická věta. Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Důkaz[10]:

Nejprve si ukážeme důkaz pro $n = 3$.

Platí: $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$.

Závorky postupně roznásobíme:

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = aaa + aab + aba + baa + abb + bab + bba + bbb.$$

Jednotlivé sčítance tvoří uspořádaná trojice prvků a a b. Které sčítance můžeme sečíst? Ty jenž mají stejný počet příslušných prvků (např. $aab + aba + baa$). Počet takových sčítanců dokážeme spočítat pomocí permutací s opakováním.

Počet trojic se dvěma prvky a a jedním prvkem b je $\frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{1}$.

Počet trojic s jedním prvkem a a dvěma prvky b je $\frac{3!}{1!2!} = \binom{3}{2}$.

Trojice obsahující jen prvky a je jen jedna. Stejně tak trojice obsahující jen prvky b. Platí tedy:

$$(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

Pro obecný případ můžeme psát: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\dots\cdot(a+b)}_{n}$.

Vynásobením těchto n dvojčlenů dostaneme podobně jako v případu výše součet několika různých n-tic prvků a a b.

n-tice složená jen z prvku a je jen jedna.

Počet n-tic složených z $(n-1)$ prvků a a jednoho prvku b je

$$\frac{[(n-1)+1]!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \binom{n}{1}.$$

Počet n-tic složených z $(n-2)$ prvků a a dvou prvků b je

$$\frac{[(n-2)+2]!}{(n-2)!2!} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \binom{n}{2}.$$

Obecně tedy počet n-tic složených z $(n-k)$ prvků a a k prvků b je

$$\frac{[(n-k)+k]!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Po sečtení dostáváme:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n =$$

$$= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Příklad 1.8.11.

Vypočtěte podle binomické věty:

$$(x+y)^7$$

Řešení:

$$(x+y)^7 = \binom{7}{0}x^7y^0 + \binom{7}{1}x^6y^1 + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 +$$

$$+\binom{7}{6}x^1y^6 + \binom{7}{7}x^0y^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

Příklad 1.8.12.

Vypočtěte podle binomické věty:

$$(x^2+1)^4$$

Řešení:

$$(x^2+1)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4 1^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3 1^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2 1^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1 1^3 + \binom{4}{4}(x^2)^0 1^4 =$$

$$= x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1$$

Příklad 1.8.13.

Vypočtěte podle binomické věty:

$$(x^2-1)^4$$

Řešení:

$$\begin{aligned}(x^2-1)^4 &= \binom{4}{0}(x^2)^4(-1)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-1)^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2(-1)^2 + \\ &+ \binom{4}{3}(x^2)^1(-1)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^0(-1)^4 = \\ &= x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\end{aligned}$$

Příklad 1.8.14.

Vypočtěte podle binomické věty:

$$(2c+\sqrt{3})^6$$

Řešení:

$$\begin{aligned}&(2c+\sqrt{3})^6 = \\ &= \binom{6}{0}(2c)^6(\sqrt{3})^0 + \binom{6}{1}(2c)^5(\sqrt{3})^1 + \binom{6}{2}(2c)^4(\sqrt{3})^2 + \binom{6}{3}(2c)^3(\sqrt{3})^3 + \\ &\quad + \binom{6}{4}(2c)^2(\sqrt{3})^4 + \binom{6}{5}(2c)^1(\sqrt{3})^5 + \binom{6}{6}(2c)^0(\sqrt{3})^6 = \\ &= 64\cdot c^6 + 6\cdot 32\cdot \sqrt{3}\cdot c^5 + 15\cdot 16\cdot 3\cdot c^4 + 20\cdot 8\cdot (\sqrt{3})^3\cdot c^3 + \\ &\quad +15\cdot 4\cdot 3^2\cdot c^2 + 6\cdot 2\cdot (\sqrt{3})^5\cdot c + 3^3 = \\ &= 64\cdot c^6 + 192\cdot \sqrt{3}\cdot c^5 + 720\cdot c^4 + 160\cdot (\sqrt{3})^3\cdot c^3 + 540\cdot c^2 + 12\cdot (\sqrt{3})^5\cdot c + 27\end{aligned}$$

Příklad 1.8.15.

Vypočtěte bez kalkulačky užitím binomické věty:

$$2,01^4$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
2,01^4 &= (2+10^{-2})^4 = \\
&= \binom{4}{0}2^4\cdot(10^{-2})^0+\binom{4}{1}2^3\cdot(10^{-2})^1+\binom{4}{2}2^2\cdot(10^{-2})^2+ \\
&\quad +\binom{4}{3}2^1\cdot(10^{-2})^3+\binom{4}{4}2^0\cdot(10^{-2})^4 = \\
&= 16+4\cdot 8\cdot 0,01+6\cdot 4\cdot 0,0001+4\cdot 2\cdot 0,000001+0,00000001 = \\
&= 16.32240801
\end{aligned}$$

Poznámka: Příklad by se dal sice počítat i roznásobením $2,01\cdot 2,01\cdot 2,01\cdot 2,01$, ale bylo by to mnohem pracnější a složitější. Můžete si vyzkoušet sami.

Příklad 1.8.16.

Vypočtěte bez kalkulačky užitím binomické věty:

$$1,99^4$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
1,99^4 &= (2-10^{-2})^4 = \\
&= \binom{4}{0}2^4\cdot(-10^{-2})^0+\binom{4}{1}2^3\cdot(-10^{-2})^1+\binom{4}{2}2^2\cdot(-10^{-2})^2+ \\
&\quad +\binom{4}{3}2^1\cdot(-10^{-2})^3+\binom{4}{4}2^0\cdot(-10^{-2})^4 = \\
&= 16-4\cdot 8\cdot 0,01+6\cdot 4\cdot 0,0001-4\cdot 2\cdot 0,000001+0,00000001 = \\
&= 15.68239201
\end{aligned}$$

Poznámka: Příklad by se dal sice počítat i roznásobením $1,99\cdot 1,99\cdot 1,99\cdot 1,99$, ale bylo by to opět mnohem pracnější a složitější. Můžete si vyzkoušet sami.

1.9 Procvičování

Příklad 1.9.1.

Volejbalový turnaj je rozdělen na 4 skupiny. V každé skupině je 5 týmů. V rámci skupiny hraje každý tým s každým.

A) Kolik zápasů se v turnaji odehraje?

B) Kolik zápasů se v turnaji odehraje, hrají-li ještě vítězové všech skupin každý s každým o celkové první místo?

Řešení:

A) $4 \cdot \binom{5}{2} \qquad [= 40].$

B) $4 \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \qquad [= 46].$

Příklad 1.9.2.

Kolik anagramů lze vytvořit z názvu brněnského prvoligového fotbalového týmu?
(k 26. 4. 2015)

Obrázek 1.29: Znak fotbalového klubu, zdroj: [11]

Řešení:

Počet písmen: A - 1, B - 1, J - 1, K - 1, O - 2, R - 1, V - 1, Z - 1

$\frac{9!}{2!} = 181440 \qquad [= P'(1,1,1,1,1,1,1,2)]$

Příklad 1.9.3.

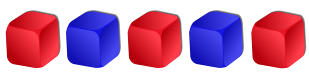
Z čety 14 vojáků sestavujeme dvojčlenné hlídky, kde jeden z vojáků je velitelem. Kolik hlídek můžeme sestavit?

Řešení:

Velitel a voják: $14 \cdot 13 = 182 \qquad [= V(2,14)]$

Příklad 1.9.4.

Kuba má tři červené a dvě modré kostky, čtyři z nich chce postavit na sebe.
Kolik barevně různých věží může postavit?



Obrázek 1.30: Červené a modré kostky, zdroj: [11]

Řešení:

Může použít buď 2 červené a 2 modré kostky nebo 3 červené a 1 modrou.
$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}=10$

Příklad 1.9.5.

Určete počet trojciferných přirozených čísel, ve kterých se nevyskytuje číslice 2?

Řešení:
$8\cdot 9\cdot 9=648$

Příklad 1.9.6.

Na cestu z Lísek do Bylnice si musíme koupit lístek na autobus. Na lístku je uvedených 9 číslic. Řidič může označit 1–8 číslic.

Kterých možností je více, když označí dvě anebo sedm číslic?

Řešení:
$\binom{9}{2}=\binom{9}{7}=36$, možností je stejný počet.

Příklad 1.9.7.

Kolik různých způsobů máme, chceme-li postavit 10 osob (Alenu, Danu, Elišku, Petru, Zdenu, Karla, Luboše, Ondřeje, Petra a Viktora) do řady tak, aby žádné dvě ženy ani muži nestáli vedle sebe?

Řešení:
Pokud jako první bude jedna z žen, způsobů je:
$5\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=5!\cdot 5!=14400.\qquad [=P(5)\cdot P(5)]$
Ovšem na prvním místě může být také muž, proto celkový počet způsobů je:
$2\cdot 14400=28800.$

Příklad 1.9.8.

Kolik sudých třícifernых přirozených čísel můžeme sestavit z číslic 0, 1, 5, 6, 8, 9 tak, že se číslice mohou opakovat?

Řešení:
$5\cdot 6\cdot 3=90$

Příklad 1.9.9.

Na visacím zámku jsou tři kolečka číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pro jeho odemknutí musíme zadat správnou posloupnost tří číslic. Kolik nejvíc minut nám může trvat jeho odemknutí, jestliže zadání jedné posloupnosti trvá průměrně 1,5 sekundy?

Řešení:

Jedná se o 1000 různých čísel, tedy 1000 různých variací.

$1,5 \cdot 1000 = 1500$ sekund = 25 minut.

Příklad 1.9.10.

V prodejně mají na výběr 15 různých hrníčků a skleniček. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit A) 17; B) 8; C) 8 různých.

Obrázek 1.31: Hrnky a skleničky, zdroj: [11]

Řešení:

A) $\binom{31}{17}$ $[= 265182525]$

B) $\binom{22}{8}$ $[= 319770]$

C) $\binom{15}{8}$ $[= 6435]$

Příklad 1.9.11.

Z pěti děvčat Báry, Evy, Lídy, Niny a Verči a ze čtyř chlapců Marka, Olina, Pavla a Vaška vybírá paní učitelka dvojici (dívka a chlapec) na jízdu na dvojkole. Kolik takových různých dvojic může utvořit?

Řešení:

$5 \cdot 4 = 20$

Příklad 1.9.12.

V sérii 11 výrobků jsou právě 3 vadné. Kolika způsoby z nich lze vybrat:

A) 5 libovolných výrobků,

B) 5 výrobků bezvadných,

C) 5 výrobků, z nichž právě 1 je vadný,

D) 5 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné,

E) 5 výrobků, z nichž právě 3 jsou vadné?

Řešení:

A) $\binom{11}{5}$ $\quad [= 462]$

B) $\binom{8}{5}$ $\quad [= 56]$

C) $\binom{3}{1} \cdot \binom{8}{4}$ $\quad [= 210]$

D) $\binom{3}{2} \cdot \binom{8}{3}$ $\quad [= 168]$

E) $\binom{3}{3} \cdot \binom{8}{2}$ $\quad [= 28]$

Příklad 1.9.13.

V restauraci nabízí 4 různé polévky, 12 hlavních jídel a 6 moučníku. Kolik různých obědů tvořených z polévky, hlavního jídla a moučníku si můžeme vybrat?

Řešení:

$4 \cdot 12 \cdot 6 = 288$

Příklad 1.9.14.

Autobus linky 84 přijel na zastávku Slovanské náměstí, otevřely se troje dveře a nastoupila pouze Jitka se Zuzkou. Kolik bylo různých možností, jak mohly dívky nastoupit do autobusu?

(Možnosti považujeme za různé, pokud alespoň jedna osoba nastoupila jinými dveřmi.)

Řešení:

$3 \cdot 3 = 9 \qquad [= V'(2,3)]$

Příklad 1.9.15.

Děti se měly ve škole fotit. Klára, Petra, Šimon, Honza a Jirka chtěli společnou fotku, ovšem za podmínek, že dívky chtějí stát vedle sebe a Jirka chce být na kraji.

Kolikrát by musel fotograf vyfotit děti, aby zachytil všechny možnosti, jak děti mohou stát v jedné řadě?

Řešení:

Jirku nejprve postavíme vlevo, Kláru a Petru sloučíme k sobě a rozmísťujeme tedy 4 „děti“:

$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Dívky si mohou ještě prohodit místa: $6 \cdot 2 = 12$

Jirka může stát také vpravo, proto celkový počet fotografií by byl $12 \cdot 2 = 24$.

Příklad 1.9.16.

Maminka chce Jeníkovi a Mařence rozdělit tři stejné hrušky a dvě stejná jablka. Kolika způsoby to může udělat, aniž by ovoce krájela?
(Připouštíme i situaci, že některé z dětí nic nedostane.) [4]

Obrázek 1.32: Ovoce, zdroj: [11]

Řešení:

Tři hrušky samostatně může maminka rozdělit čtyřmi způsoby. (Rozdělení je určeno tím, kolik hrušek dá Jeníkovi, zbytek připadne Mařence.) Dvě jablka pak nezávisle třemi způsoby. Podle pravidla součinu pak obě ovoce současně může rozdělit $4 \cdot 3 = 12$ způsoby.

Příklad 1.9.17.

Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých číslic. [4]

Řešení:

Dvě různé číslice použité na zápis můžeme vybrat $\binom{10}{2}$ způsoby, ze dvou vybraných číslic můžeme sestavit $2^4 - 2$ různých čtyřciferných čísel (dvojku odečítáme za dvě čísla sestavená pouze z jedné číslice). Celkem máme $\binom{10}{2} \cdot (2^4 - 2) = 630$ čísel. Nyní jsme ale započítali i čísla začínající nulou, těch je $\binom{9}{1} \cdot (2^3 - 1) = 63$. Celkově dostáváme $630 - 63 = 567$ čísel.

Příklad 1.9.18.

V rovině je dáno 10 různých bodů. Kolik přímek tyto body určují, jestliže:
A) žádné tři neleží na jedné přímce,
B) právě 6 z nich leží na jedné přímce?

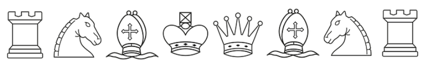
Řešení:

A) Přímka je určena dvěma body a na jejich pořadí nezáleží, proto: $\binom{10}{2}$ $[= 45]$

B) $\binom{10}{2} - \binom{6}{2} + 1$ $[= 31]$

Příklad 1.9.19.

Kolika způsoby lze rozestavit v první řadě šachovnice tyto bílé figurky: 2 koně, 2 střelce, 2 věže, 1 krále a 1 dámu?



Obrázek 1.33: Šachové figurky, zdroj: [11]

Řešení:
$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 5040$ $[= P'(1,1,2,2,2)]$

Příklad 1.9.20.

Máme-li k dispozici neomezené množství mincí o hodnotách 10, 20 a 50 haléřů. Kolika způsoby z nich lze vybrat 20 mincí? [1]

Řešení:
$\binom{22}{20} \qquad [= 231]$

Příklad 1.9.21.

Kolika způsoby lze na šachovnici vybrat:
A) dvě pole,
B) dvě pole různých barev,
C) dvě pole neležící ve stejné řadě ani ve stejném sloupci,
D) dvě pole různé barvy neležící ve stejné řadě ani ve stejném sloupci?

Řešení:
A) $\binom{64}{2} \qquad [= 2016]$
B) $\binom{32}{1} \cdot \binom{32}{1} \qquad [= 1024]$
C) $\binom{64}{2} - 8 \cdot \binom{8}{2} - 8 \cdot \binom{8}{2} \qquad [= 1568]$
D) $\binom{32}{1} \cdot \binom{32}{1} - 8 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} - 8 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \qquad [= 768]$

Příklad 1.9.22.

Sešlo se pět přátel a navzájem si potřásli rukama. Určete počet všech potřesení.

Obrázek 1.34: Pět přátel, zdroj: [11]

Řešení:
$\binom{5}{2} \qquad [= 10]$

Příklad 1.9.23.

Král Artuš posílá 6 spěšných zpráv svým rytířům. Každý ze tří připravených poslů může doručit libovolnou ze zpráv. Kolika způsoby může král Artuš rozdělit dopisy mezi kurýry? [1]

Řešení:
$3^6 = 729 \qquad [= V'(6,3)]$

Příklad 1.9.24.

Kolik anagramů lze vytvořit z písmen názvu nejstarší brněnské univerzity?

Řešení:

A - 3, K - 1, M - 1, O - 1, R - 1, S - 1, V - 1, Y - 1: $\frac{10!}{3!} = 604800$
$[= P'(1,1,1,1,1,1,1,3)]$

Příklad 1.9.25.

U rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

určete počet řešení v množině celých nezáporných čísel. [1]

Řešení:

Zašifrujeme pomocí nul a jedniček tak, že mezi 9 jedniček (součet je 9) vložíme (4-1) nul (určíme tím rozdělení na 4 čísla).

$$\binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} \qquad [= 220]$$

Příklad 1.9.26.

Máme čtyři bílé koule, čtyři černé koule a čtyři červené koule. Kolika způsoby je můžeme rozdělit do 6 rozlišitelných přihrádek? [3]

Řešení:

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{9}{4} \qquad [= 2000376]$$

Příklad 1.9.27.

Kolik přirozených čísel menších než 10^5 lze zapsat pouze pomocí cifer 7 a 9? [1]

Řešení:

$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62 \qquad [= V'(1,2) + V'(2,2) + V'(3,2) + V'(4,2) + V'(5,2)]$

Příklad 1.9.28.

Řešení:

Počet semiciferných palindromů:

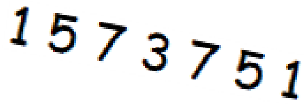
Stačí rozmístit číslice na první čtyři cifry, poslední tři jsou jednoznačně určené výběrem prvních tří.

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

Počet osmiciferných palindromů lze spočítat podobně (vybíráme jen první čtyři cifry):

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

Palindrom je posloupnost symbolů, která je stejná, čteme-li je zepředu i zezadu (např. „tabat“).
Určete počet sedmiciferných a osmiciferných palindromů (v dekadickém zápisu), nesmí-li se žádná číslice užít více než jednou. [3]



Obrázek 1.35: Palindrom, zdroj: autor

Příklad 1.9.29.

V městské radě je 10 zástupců levice a 11 zástupců pravice. Levici zastupují 4 ženy, pravici 3 ženy. Určete, kolika způsoby lze sestavit osmičlenný výbor, v němž má být stejný počet zástupců levice i pravice a stejný počet mužů i žen. [3]

Řešení:

Vybíráme 2 ženy a 2 muže z levice a stejný počet i z pravice:

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{8}{2} \qquad [=7560]$$

Příklad 1.9.30.

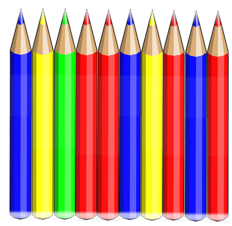
Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 10 různých knih českých a 5 různých knih anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich knihy anglické? [6]

Řešení:

$$10!\cdot 5! = 435456000 \qquad [= P(10)\cdot P(5)]$$

Příklad 1.9.31.

V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat? [6]



Obrázek 1.36: Pastelky, zdroj: [11]

Řešení:

$$\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 12600 \qquad [= P'(1,2,3,4)]$$

Příklad 1.9.32.

V cukrárně mají pět druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 8 dortů? [6]

Řešení:

$$\binom{12}{8} \qquad [=495]$$

Kapitola 2

Rozšiřující kombinatorické pojmy

2.1 Burnsideovo lemma

Toto důležité lemma zformuloval anglický matematik William Burnside (1852 – 1927). Díky němu můžeme velice jednoduše spočítat na první pohled velmi složité příklady.

Než přistoupíme k samotnému lemmatu, zopakujeme si některé důležité pojmy.

2.1.1 Pojmy

Permutace, grupa

Buď X libovolná konečná množina. Symbolem $S(X)$ značíme všechny permutace množiny X.

Připomeňme si, že permutace n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje právě jednou. Což můžeme říci i slovy, že permutace na množině X je zobrazení z X do X, které je prosté (žádné dva prvky se nezobrazí na stejný prvek) a na každý prvek se nějaký prvek zobrazí.

Množinu všech permutací na množině X budeme značit $S(X)$, jednotlivé permutace budou značeny řeckými písmeny $(\pi, \rho, \ldots)$.

Permutace lze skládat a k dané permutaci lze najít permutaci inverzní.

Poznamenejme jenom, že $\pi \circ \rho$ značí permutaci vzniklou provedením ρ a pak provedením π.

Pro další úvahy ještě vezměme jednu pevnou podmnožinu množiny $S(X)$, která je uzavřená na skládání permutací, a označme ji G. Poznamenejme, že G je podmnožina permutací taková, že s každou permutací obsahuje i její inverzi a se dvěma permutacemi obsahuje i jejich složení (mj. tedy obsahuje i identitu, tj. permutaci, která všechny prvky nechává na místě). [8]

Orbita

Pro $x \in X$ označme $O_x = \{\pi(x) | \pi \in G\}$ takzvanou orbitu prvku x; to jsou body, kam se můžeme z x dostat použitím permutací z G. Množinu všech orbit, tj. $\{O_x | x \in X\}$, budeme značit $\mathscr{O}$.

Všimněte si, že pokud $y \in O_x$, tak $O_x = O_y$. Intuitivně – pokud se z x mohu dostat do y, tak se z obou mohu dostat do týchž míst. [8]

Z toho ovšem plyne důležitý důsledek: orbity tvoří rozklad množiny X. Tzn., že každé $x \in X$ leží v právě jedné orbitě. Zjevně totiž $x \in O_x$. Pokud by x ležel ještě v nějaké jiné orbitě, tj. $x \in O_y$ a $O_x \neq O_y$, pak dle předchozího odstavce $O_x = O_y$, což je spor. V množině $\mathscr{O}$ jsou tedy množiny, které jsou po dvou disjunktní a jejichž sjednocení je celé X. [8]

Pevné body, stabilizátor

Je-li $\pi \in S(X)$, označme $P_\pi = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$ množinu tzv. pevných bodů permutace π, tj. těch bodů, které π nechává na místě.

Pro $x \in X$ označme $St_x = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\}$ množinu těch permutací z G, pro které je x pevným bodem.

Lemma 1. *Burnsideovo lemma*

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |P_\pi|,$$

kde $\mathscr{O}$ je množina všech orbit a G je nějaká množina permutací X, která je uzavřená na skládání.

Jinými slovy: Počet orbit je průměrný počet pevných bodů permutací z G.

K důkazu použijeme následující lemma.

Lemma 2. *Vlastnosti St*

(1) Je-li $x \in X$, tak $|O_x| \cdot |St_x| = |G|$.
(2) Jsou-li $x, y \in X$ a $y \in O_x$, tak $|St_x| = |St_y|$.

Důkaz vlastností St[8]:

(1) Pro $y \in O_x$ označme π_y libovolnou permutaci z G, která převádí x na y, tj. $\pi_y(x) = y$ (nějaká taková určitě existuje, jinak by y nebylo v O_x).

Chceme ukázat, že dvojic (y, ρ), $y \in O_x$, $\rho \in St_x$, je stejný počet jako prvků G. Nejlépe to uděláme tak, že najdeme předpis, jak takové dvojici přiřadit prvek G tak, aby různým dvojicím odpovídaly různé prvky G a každý prvek v G byl použit.

Dvojici (y, ρ) přiřaďme prvek $F(y, \rho) = \pi_y \circ \rho$. Protože π_y i ρ byly prvky G, je i jejich složení prvek G. Nyní je třeba ukázat, že zobrazení F je prosté a na každý prvek se nějaký prvek zobrazí.

F je prosté: vezměme $(y_1, \rho_1) \neq (y_2, \rho_2)$. Nechť nejprve $y_1 \neq y_2$. Potom $F(y_1, \rho_1)(x) = y_1$, $F(y_2, \rho_2)(x) = y_2$, a tedy zobrazení $F(y_1, \rho_1)$ a $F(y_2, \rho_2)$ se liší alespoň hodnotou v prvku x. Nechť je tedy $y_1 = y_2 = y$, a tudíž $\rho_1 \neq \rho_2$. Existuje proto nějaké $z \in X$, pro něž $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$. Ovšem pak i $F(y, \rho_1)(z) \neq F(y, \rho_2)(z)$. Takže F je prosté.

Na každý prvek se nějaký prvek zobrazí: mějme $\sigma \in G$ a hledejme $y \in X$, $\rho \in St_x$, že $F(y, \rho) = \sigma$. Stačí vzít $y = \sigma(x)$ a $\rho = (\pi_y)^{-1} \circ \sigma$.

(2) Abychom ukázali, že $|St_x| = |St_y|$, najdeme nějaké zobrazení $F : St_x \to St_y$, které bude prosté a kde na každý prvek se nějaký prvek zobrazí. Položme $F(\rho) = \pi_y \circ \rho \circ (\pi_y)^{-1}$.

Ihned vidíme, že pro $\rho \in St_x$ je $F(\rho) \in St_y$. Nepříliš těžko vidíme, že F je prosté a na každý prvek se nějaký prvek zobrazí.

Důkaz Burnsideova lemmatu[8]:

Dokazovanou rovnost upravme na tvar $|\mathscr{O}| \cdot |G| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$. Uvažme nyní množinu $A = \{(\pi, x) \mid \pi \in G, x \in P_\pi\}$. Nyní použijeme poměrně častý trik: budeme počítat velikost množiny A dvěma způsoby. Nejprve berme permutace π z G jednu po druhé a pro každou zjistěme, kolik $x \in X$ je možno k π přidat, aby vznikla dvojice z A. Tímto postupem zjistíme, že $|A| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$.

A teď naopak probírejme prvky X a pro každý určeme, kolik k němu můžeme přidat permutací π. Takto zjistíme, že $|A| = \sum_{x \in X} |St_x|$. Vzhledem k předchozímu lemmatu, části (2), je toto rovno $\sum_{O \in \mathscr{O}} |O_{x_O}| \cdot |St_{x_O}|$, kde x_O je libovolný prvek O. Vzhledem k lemmatu, části (1), můžeme toto dále upravit na $\sum_{O \in \mathscr{O}} |G| = |\mathscr{O}| \cdot |G|$. Dohromady tedy dostáváme $|\mathscr{O}| \cdot |G| = \sum_{\pi \in G} |P_\pi|$, což jsme chtěli dokázat.

2.1.2 Řešené příklady

Příklad 2.1.1. *Náhrdelníky*

Máme tři brilianty a pět safírů. Kolik různých náhrdelníků z nich můžeme sestavit?

Náhrdelníkem rozumíme navlečení drahokamů na šňůrku (ta je vzadu svázaná, čili je to kruh). Přitom dva náhrdelníky, které se liší jen pootočením, považujeme za shodné. [8]

Řešení:

S náhrdelníkem můžeme provést celkem osm rotací R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, přičemž R_k je rotace o $k \cdot 45°$ ($360°/8 = 45°$ – pootočení o jeden drahokam).

Každé této rotaci odpovídá permutace na množině všech pevných náhrdelníků. Např. rotaci R_1 odpovídá permutace π_1, která každý pevný náhrdelník zobrazí na jiný pevný náhrdelník, oproti původnímu otočený o $45°$.

Nyní počet orbit, tj. $|\mathscr{O}|$, je hledaný počet různých náhrdelníků. Jedna orbita je totiž tvořena pevnými náhrdelníky, které jdou na sebe převést otočením a které tedy považujeme za jeden náhrdelník. Burnsideovo lemma nám říká, že tento počet můžeme zjistit tak, že pro $\pi_0, \ldots, \pi_7$ určíme počet pevných bodů a spočteme průměr.

π_0 je identita, má $|X| = 56$ pevných bodů (je to počet různých pevných náhrdelníků). Snadno se rozmyslí, že ostatní permutace žádné pevné body nemají (pokud otočím jakkoli uspořádaný náhrdelník, nikdy jej nemohu otočit na stejně uspořádaný). Průměrný počet pevných bodů je tedy

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{8} \cdot (56 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 7.$$

Hledaný počet náhrdelníků je tedy 7.

Příklad 2.1.2. *Monomino*

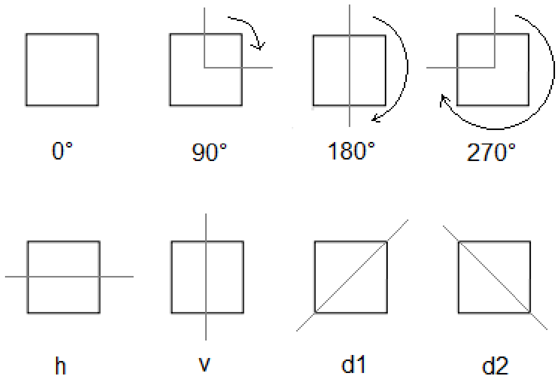
Kolika způsoby můžeme umístit jedno monomino do tabulky $8x8$ tak, že nerozlišujeme situace vzniklé pootočením i překlopením?

(Monomino je čtvereček o straně délky 1.)

Řešení:

Permutace v tomto případě představují 4 rotace a 4 osové souměrnosti.

Rotace o 0°, 90°, 180° a 270°. Osové souměrnosti s osou horizontální(h), vertikální(v) a 2 diagonální osy(d_1, d_2), viz obrázek:



Obrázek 2.1: Permutace na čtvercové tabulce, zdroj: autor

Podle lemmatu dostáváme:

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{8} \cdot (|P_0| + |P_{90}| + |P_{180}| + |P_{270}| + |P_h| + |P_v| + |P_{d1}| + |P_{d2}|),$$

P_0 je identita a počet pevných bodů je roven počtu různých rozmístění 1 monomina, tj. $|P_0| = 64$.

V dalších otočeních P_{90}, P_{180} a P_{270} ať umístíme monomino kamkoli, po otočení se nikdy nedostane do stejné pozice, tedy počet pevných bodů je v těchto případech 0.

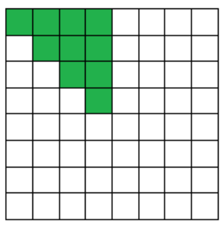
V osových souměrnostech P_h a P_v také není žádný pevný bod.

Ovšem pro P_{d1} a P_{d2} máme vždy 8 pevných bodů, jsou to právě ty, které leží na příslušné diagonále (po převrácení se pozice monomina nezmění).

Dosazením:

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{8} \cdot (64 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 8 + 8) = 10.$$

Všechny různé možnosti, kam můžeme monomino umístit, jsou znázorněné níže:

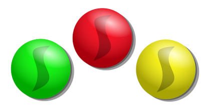


Obrázek 2.2: Možná umístění monomina, zdroj: autor

Příklad 2.1.3. *Náramky*

Na náramek máme připraveno pět žlutých korálků, pět červených a pět zelených, které máme navléknout na nitku a svázat. Kolik různých náramků můžeme vytvořit?

Náramky lišící se pouze pootočením nebo překlopením jsou shodné. [1]



Obrázek 2.3: Korálky, zdroj: [11]

Řešení:

S náramkem můžeme provést celkem 15 rotací $R_0,\dots,R_{14}$, přičemž R_k je rotace o $k\cdot 24^\circ$ ($360^\circ/15 = 24^\circ$ – pootočení o jednu korálku). A 15 překlopení kolem osy procházející středem náramku (kruhu) a některým z korálků. Při překlopení zůstává jeden korálek na místě a sedm dvojic korálků si vymění místa. Nemá-li tato výměna mít vliv na barevnost náramku, musí být každá z dvojic stejnobarevná, což však v našem případě není možné.

Podobnou úvahu lze ověřit pro neidentická otáčení. Barevnost, která se otočením nezmění, existuje jen pro otočení o $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$ a 288°. Přitom pro každé z uvedených otočení existuje právě 6 takových rozmístění korálků, které i po otočení náramku barevnost náramku nezmění (každé tři po sobě jdoucí korálky mají různou barvu). Tzn. pro každé takové otočení existuje 6 pevných bodů.

Z Burnsideova lemmatu plyne, že hledaný počet náramků je roven:

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{30}\cdot\left(\frac{15!}{5!5!5!}+6+6+6+6\right) = 25226.$$

Příklad 2.1.4. *Dvě monomina*

Kolika způsoby můžeme umístit dvě monomina do tabulky 8*x*8 tak, že
A) nerozlišujeme situace vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme situace vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:

A) Permutace v tomto případě představují 4 rotace (o 0°, 90°, 180° a 270°).

Rotace o 0° (identita) má tolik pevných bodů, kolik je různých rozmístění dvou monomin do tabulky 8x8. Těch je $\frac{64!}{2!62!} = 2016$.

Rotace o 90° nemá žádný pevný bod (ať umístíme monomina kamkoli, po otočení nikdy nepřejdou ve stejné pozice).

V rotaci o 180° jsou ty pevné body, které odpovídají pozicím monomin, kdy jedno umístíme do levé poloviny a druhé do pravé poloviny tabulky tak, aby si po otočení pozice vyměnila. Přičemž do levé poloviny, do tabulky 8x4 máme 32 možností, jak monomino umístit. Pozice druhého v pravé polovině je určena jednoznačně umístěním prvního.

Rotace o 270° nemá žádný pevný bod stejně tak jako rotace o 90°.

Celkem různých způsobů, jak umístit dvě monomina do tabulky 8x8, kdy nerozlišujeme situace vzniklé jen pootočením, je:

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{4}\cdot(2016+32) = 512.$$

B) Permutace v tomto případě představují navíc oproti A) ještě 4 osové souměrnosti (horizontální(h), vertikální(v) a 2 diagonální osy(d_1, d_2).

Horizontální i vertikální osové souměrnosti mají stejný počet pevných bodů jako otočení o 180°. Opět umístíme jedno monomino v jedné polovině a umístění druhého je jednoznačně určeno (po převrácení si monomina vymění pozice).

U diagonálních osových souměrností rozdělíme tabulku diagonálou. Pokud umístíme jedno monomino na jedno z 28 políček nad diagonálou, umístění druhého je opět jednoznačně určené (tak, aby si po překlopení vyměnily místa), nebo můžeme obě monomina umístit kamkoli přímo na diagonálu, těchto možností je $\frac{8!}{2!6!} = 28$.

Celkem pevných bodů pro každou z diagonálních souměrností je $28+28=56$.

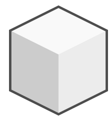
Celkem takových umístění dvou monomin je:

$$|\mathscr{O}| = \frac{1}{8}\cdot(2016+32+32+32+56+56) = 278.$$

Příklad 2.1.5. *Krychle*

Kolika způsoby lze obarvit stěny dané krychle dvěma barvami (černou a bílou)?

Krychle lišící se pouze jakýmkoli otočením považujeme za shodné. [1]



Obrázek 2.4: Krychle, zdroj: [11]

Řešení:

Protože krychli můžeme položit na libovolnou z šesti stěn a čtyřmi způsoby ji otočit některou ze sousedních stěn dopředu, získáváme 24 různých permutací.

I) identita: počet různých obarvení pevně postavené krychle dvěma barvami je $2^6 = 64$.

II) neidentické otáčení kolem osy procházející protějšími vrcholy: (máme 4 dvojice protějších vrcholů a pro každou dvojici jsou dvě neidentická otočení – o 120° a o 240°, celkem 8 neidentických otočení) pevné body tvoří ta otočení, kdy tři stěny u vrcholu, kterým prochází osa otáčení, mají stejnou barvu. Takových různých obarvení krychle je $2^2 = 4$.

III) neidentické otáčení kolem osy procházející středy protějších hran: (takových dvojic hran je 6 a pro každou dvojici je jediné otočení o 180°, celkem jde o 6 neidentických otočení) pevné body tvoří ta otočení, kdy dvě stěny přiléhající k hranám, kterými prochází osa otáčení, mají stejnou barvu. I zbylá dvojice stěn musí mít stejnou barvu. Proto takových různých obarvení krychle je $2^3 = 8$.

IV) neidentické otáčení kolem osy procházející středy protějších stěn: (máme 3 dvojice protějších stěn a pro každou dvojici tři neidentická otočení – o 90°, o 180° a o 270°, celkem 9 neidentických otočení) v případě otočení o 90° a o 270° tvoří pevné body ta otočení, ve kterém všechny čtyři stěny, kterými neprochází osa, jsou obarveny stejnou barvou. Pro tato otočení (kterých je celkem 6) je $2^3 = 8$ různých obarvení. V případě otočení o 180° tvoří pevné body ta otočení, ve kterém jsou obě dvojice protějších stěn, kterými neprochází osa, obarveny stejnou barvou. Těchto různých obarvení je celkem $2^4 = 16$.

Popsali jsme $1+8+6+(6+3) = 24$ permutací. Podle lemmatu platí:

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{24} \cdot (64 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 16) = 10. \text{ [1]}$$

2.1.3 Příklady k procvičení

Příklad 2.1.6.

Kolika způsoby můžeme umístit jedno monomino do tabulky 7x7 tak, že nerozlišujeme situace vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:

Permutace v tomto případě představují 4 rotace a 4 osové souměrnosti.

Rotace o o 0°, 90°, 180° a 270°.

Osové souměrnosti s osou horizontální(h), vertikální(v) a 2 diagonální osy(d_1, d_2).

Rotace o 0° (identita) má 49 pevných bodů.

Rotace o 90° má 1 pevný bod (umístění monomina na střed).

Stejně tak i rotace o 180° a o 270° mají každá 1 pevný bod.

V osových souměrnostech je vždy 7 pevných bodů (umístění monomina na jedno ze 7 políček na ose).

Stejně i na diagonálních souměrnostech je v každé 7 pevných bodů.

Celkem:

$$\frac{1}{8} \cdot (49 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7 + 7 + 7) = 10.$$

Příklad 2.1.7.

Kolika způsoby můžeme umístit dvě monomina do tabulky 7x7 tak, že

A) nerozlišujeme situace vzniklé jen pootočením,

B) nerozlišujeme situace vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:

A) Permutace v tomto případě představují 4 rotace (0°, 90°, 180° a 270°).

Rotace o 0° (identita) má $\frac{49!}{2!47!} = 1176$ pevných bodů.

Rotace o 90° nemá žádný pevný bod.

V rotaci o 180° je 21 pevných bodů, kdy umístíme jedno monomino v levé polovině a druhé je opět jednoznačně určené. A 3 pevné body v situaci, kdy jedno monomino umístíme na prostřední sloupec na jedno ze 3 horních políček a druhé na jeho otočenou pozici. Celkem v této rotaci je 24 pevných bodů.

Rotace o 270° nemá žádný pevný bod stejně tak jako rotace o 90°.

Celkem různých způsobů, jak umístit dvě monomina do tabulky 7x7, kdy nerozlišujeme situace vzniklé jen pootočením, je:

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{4} \cdot (1176 + 24) = 300.$$

B) Permutace v tomto případě představují navíc oproti A) ještě 4 osové souměrnosti (horizontální(h), vertikální(v) a 2 diagonální osy(d_1, d_2).

Horizontální i vertikální osové souměrnosti mají 21 pevných bodů, kdy umístíme monomina v odpovídajících si políčkách v opačných polovinách. A $\frac{7!}{2!5!} = 21$ pevných bodů, kdy jsou obě monomina na ose souměrnosti.

U diagonálních osových souměrností je situace velmi podobná jako u horizontální a vertikální souměrnosti. Pro každou diagonální souměrnost je 42 pevných bodů.

Celkem:

$$\frac{1}{8} \cdot (1176 + 24 + 42 + 42 + 42 + 42) = 171.$$

Příklad 2.1.8.

Kolika způsoby lze obarvit dvěma barvami políčka šachovnice
A) 3x3,
B) 4x4?

Přitom dvě obarvení, které můžeme jedno z druhého získat otočením šachovnice, považujeme za stejná. [9]

Řešení:

Opět uvažujeme 4 permutace (4 rotace):

A)

$$\frac{1}{4} \cdot (2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3) = 140$$

B)

$$\frac{1}{4} \cdot (2^{16} + 2^4 + 2^8 + 2^4) = 16456$$

Příklad 2.1.9.

Kolika způsoby lze obarvit dvěma barvami políčka prosklené šachovnice
A) 3x3,
B) 4x4?

Dvě obarvení, které můžeme jedno z druhého získat otočením nebo překlopením šachovnice, považujeme za stejná. [9]

Řešení:

Uvažujeme 8 permutací (4 rotace a 4 osové souměrnosti):

A)

$$\frac{1}{8} \cdot (2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6) = 102$$

B)

$$\frac{1}{8} \cdot \left(2^{16} + 2^4 + 2^8 + 2^4 + 2^8 + 2^8 + 2^{10} + 2^{10}\right) = 8548$$

Příklad 2.1.10.

Dětská skládanka obsahuje 3 červené, 3 modré a 3 zelené čtvercové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého čtverce 3x3, nezáleží-li na natočení? [9]

Řešení:

4 permutace (4 rotace):

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9!}{3!3!3!}+0+0+0\right)=5040$$

Příklad 2.1.11.

Kolik různých náramků si můžeme vytvořit ze 2 žlutých a 4 oranžových korálků, jestliže:
A) nerozlišujeme náramky vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme náramky vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:
A) 6 pootočení

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{6!}{2!4!}+0+0+3+0+0\right)=3$$

B) 6 pootočení a 6 překlopení

$$\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{6!}{2!4!}+0+0+3+0+0+3+3+3+3+3+3\right)=3$$

Příklad 2.1.12.

Kolik různých náramků si můžeme vytvořit ze 3 safírů a 4 rubínů, jestliže:
A) nerozlišujeme náramky vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme náramky vzniklé pootočením i překlopením?

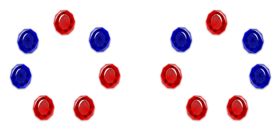
Řešení:
A) 7 pootočení

$$\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7!}{3!4!}+0+0+0+0+0+0\right)=5$$

B) 7 pootočení a 7 překlopení

$$\frac{1}{14}\cdot\left(\frac{7!}{3!4!}+0+0+0+0+0+0+3+3+3+3+3+3+3\right)=4$$

Poznámka: Všimněme si, že v tomto příkladě se 3 safíry a 4 rubíny je 5 různých náramků, pokud nerozlišujeme jen náramky vzniklé pootočením. Pokud navíc nerozlišujeme náramky vzniklé i překlopením, dostáváme 4 různé náramky. To znamená, že překlopením nám splynou 2 náramky, které jsme v možnosti za A) považovali za různé. Jsou to právě tyto dva:



Obrázek 2.5: Náramky ze 3 safírů a 4 rubínů, které překlopením splynou, zdroj: autor

Příklad 2.1.13.

Kolik různých náhrdelníků si můžeme vytvořit ze 2 modrých, 4 bílých a 4 červených korálků, jestliže:
A) nerozlišujeme náhrdelníky vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme náhrdelníky vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:
A)

$$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{10!}{2!4!4!}+0+0+0+0+5\cdot\frac{4!}{2!2!}+0+0+0+0\right)=318$$

B)

$$\frac{1}{20}\cdot\left[\frac{10!}{2!4!4!}+0+0+0+0+5\cdot\frac{4!}{2!2!}+0+0+0+0+10\cdot\left(5\cdot\frac{4!}{2!2!}\right)\right]=174$$

Příklad 2.1.14.

Kolik různých náramků si můžeme vytvořit ze 2 zelených, 2 žlutých a 3 bílých korálků, jestliže:
A) nerozlišujeme náramky vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme náramky vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:
A)

$$\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7!}{2!2!3!}+0+0+0+0+0+0\right)=30$$

B)

$$\frac{1}{14}\cdot\left[\frac{7!}{2!2!3!}+0+0+0+0+0+0+7\cdot(3!)\right]=18$$

Příklad 2.1.15.

Kolik různých náramků si můžeme vytvořit ze 2 safírů, 3 smaragdů a 3 rubínů, jestliže:
A) nerozlišujeme náramky vzniklé jen pootočením,
B) nerozlišujeme náramky vzniklé pootočením i překlopením?

Řešení:
A)

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8!}{2!3!3!}+0+0+0+0+0+0+0\right)=70$$

B)

$$\frac{1}{16}\cdot\left[\frac{8!}{2!3!3!}+0+0+0+0+0+0+0+4\cdot 0+4\cdot(2\cdot 3!)\right]=38$$

Příklad 2.1.16.

Určete, kolik způsoby je možné obarvit stěny krychle, máme-li k dispozici tři různé barvy. Přitom dvě obarvení, které můžeme jedno z druhého získat otočením krychle, považujeme za stejná. [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(3^6+8\cdot 3^2+6\cdot 3^3+6\cdot 3^3+3\cdot 3^4)=57$$

Příklad 2.1.17.

Na každou ze stěn krychle máme nakreslit některou z úhlopříček. Kolik různých krychlí můžeme získat? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(2^6+8\cdot 2^2+6\cdot 2^3+6\cdot 0+3\cdot 2^4)=8$$

Příklad 2.1.18.

Na každou ze stěn krychle máme nakreslit šipku mířící k některému z vrcholů krychle ležících v této stěně. Kolik různých krychlí můžeme získat? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(4^6+8\cdot 4^2+6\cdot 4^3+6\cdot 0+3\cdot 0)=192$$

Příklad 2.1.19.

Jak se změní odpověď v předchozím příkladu, můžeme-li na libovolný počet stěn šipku nenakreslit? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(5^6+8\cdot 5^2+6\cdot 5^3+6\cdot 5+3\cdot 5^2)=695$$

Příklad 2.1.20.

Kolika způsoby můžeme obarvit krychli, mají-li být dvě stěny bílé, dvě černé a dvě červené? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(\frac{6!}{2!2!2!}+8\cdot 0+6\cdot 3!+6\cdot 0+3\cdot 3!)=6$$

Příklad 2.1.21.

Kolika způsoby můžeme obarvit hrany krychle dvěma barvami? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(2^{12}+8\cdot 2^4+6\cdot 2^7+6\cdot 2^3+3\cdot 2^6)=218$$

Příklad 2.1.22.

Kolika způsoby můžeme obarvit vrcholy krychle třemi barvami? [1]

Řešení:

$$\frac{1}{24}\cdot(3^{8}+8\cdot 3^4+6\cdot 3^4+6\cdot 3^2+3\cdot 3^4)=333$$

2.2 Princip inkluze a exkluze

Jedná se o další kombinatorické pravidlo, blízké pravidlu součtu. Pokud se vrátíme k pravidlu součtu, vzpomeneme si, že v příkladech bylo důležité, aby množiny byly konečné a po dvou disjunktní (žádné dvě množiny neměly žádný společný prvek).

Jak se dá počet prvků sjednocení množin určit, i v případě, kdy množiny jsou stále konečné ale nejsou po dvou disjunktní, nám právě prozradí tento princip inkluze a exkluze (neboli slučování a vylučování).

2.2.1 Řešené příklady

Příklad 2.2.1. *Turnaje*

V Husovicích se konal fotbalový a volejbalový turnaj. Na fotbalový turnaj přišlo 35 účastníků, na volejbalový 32 účastníků. 12 se jich zúčastnilo fotbalového i volejbalového turnaje.

Kolik přišlo sportovců celkem?

Řešení:

Poznámka: Řešení tohoto příkladu je vysvětleno také pomocí interaktivního obrázku, který je uveden v příloze 3.

Přepis řešení:

Označme si jednotlivé množiny:
Množina hráčů fotbalu $= F$
Množina hráčů volejbalu $= V$
Množina hráčů obou sportů $= F \cap V$
Množina všech hráčů $= F \cup V$

Pro připomenutí, počet prvků dané množiny M označujeme $|M|$.

Zajímá nás počet všech hráčů: $F \cup V = ?$

V množině hráčů fotbalu jsou i hráči, kteří hráli také volejbal.

A v množině hráčů volejbalu jsou i hráči, kteří hráli také fotbal.

Z toho důvodu, pokud sečteme počet hráčů fotbalu a počet hráčů volejbalu, přičteme dvakrát počet hráčů obou sportů ($F \cap V$).

Počet všech hráčů tedy obdržíme, pokud sečteme $|F| + |V|$ a jednou odečteme $F \cap V$:

$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V|$$

Dosazením:

$$|F \cup V| = 35 + 32 - 12 = 55$$

Příklad 2.2.2. *Cizí jazyky*

Na jazykovém gymnáziu si studenti musí vybrat 1, 2 nebo 3 cizí jazyky. Mají na výběr z angličtiny, němčiny a francouzštiny.

Ve třídě I. A:

– si angličtinu zvolilo 21 studentů, němčinu si zvolilo 16 studentů a francouzštinu si zvolilo 14 studentů.

– angličtinu a němčinu má 9 studentů, angličtinu a francouzštinu má 8 studentů, němčinu a francouzštinu má 7 studentů.

– všechny tři jazyky si vybrali 3 studenti.

Kolik je ve třídě studentů?

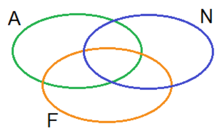
Řešení:

Označme si jednotlivé množiny:

Množina studentů, kteří si zvolili angličtinu $= A$

Množina studentů, kteří si zvolili němčinu $= N$

Množina studentů, kteří si zvolili francouzštinu $= F$



Obrázek 2.6: Označení množin studentů, zdroj: autor

Množina studentů, kteří si zvolili angličtinu i němčinu $= A \cap N$

Množina studentů, kteří si zvolili angličtinu i francouzštinu $= A \cap F$

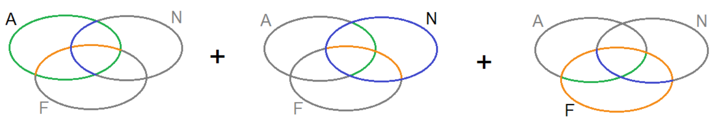
Množina studentů, kteří si zvolili němčinu i francouzštinu $= N \cap F$

Množina studentů, kteří si zvolili všechny tři jazyky $= A \cap N \cap F$

Množina všech studentů $= A \cup N \cup F$

Zkusíme postupovat stejně jako v předchozím příkladu. Nejprve sečteme počet prvků množin A, N, F:

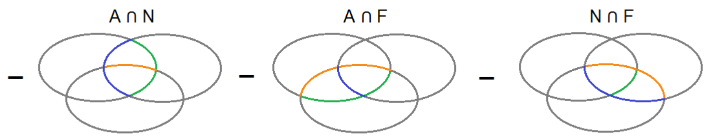
$|A| + |N| + |F|$:



Obrázek 2.7: Sečtení množin studentů, zdroj: autor

Všimněte si, že vždy přičítáme dvakrát počet prvků v průniku dvou sousedních množin, tj. $|A \cap N|$, $|A \cap F|$, $|N \cap F|$.

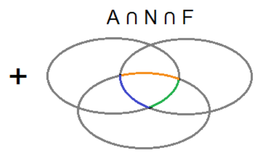
A dokonce třikrát počet prvků v průniku všech tří množin, tj. $|A \cap N \cap F|$.



Obrázek 2.8: Odečítání průniků dvou množin, zdroj: autor

Pomůže nám odečíst počet prvků v jednotlivých průnicích dvou sousedních množin $|A \cap N|$, $|A \cap F|$, $|N \cap F|$?

Pomůže, ale uvědomme si, že s tímto odčítáním odečteme také třikrát počet prvků v průniku všech tří množin, tj. $|A \cap N \cap F|$. Nejprve jsme ho třikrát přičetli, poté třikrát odečetli, musíme proto ještě jednou přičíst $|A \cap N \cap F|$.



Obrázek 2.9: Přičtení průniku tří množin, zdroj: autor

Počet všech studentů v I. A je:
$|A \cup N \cup F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F|$.

Dosazením: $|A \cup N \cup F| = 21 + 16 + 14 - 9 - 8 - 7 + 3 = 30$.

Princip inkluze a exkluze:

Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_n$ jsou konečné množiny. Pak platí:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = {} & |M_1| + |M_2| + \ldots |M_n| - \\ & - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \ldots - |M_{n-1} \cap M_n| + \\ & + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \ldots + |M_{n-2} \cap M_{n-1} \cap M_n| - \\ & \ldots \\ & + (-1)^{n+1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n| = \\ & = \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_r}|, \end{aligned}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ indexové množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Součet jsme uspořádali tak, že na i-tém řádku jsou zapsány sčítance odpovídající i-prvkovým podmnožinám, je tam tedy $\binom{n}{i}$ sčítanců. Celkový počet sčítanců na pravé straně vzorce je zřejmě $2^n - 1$. [1]

Důkaz[1]:

Zvolme libovolný prvek $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ a označme $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_s}$ právě ty z uvažovaných n množin, v nichž prvek m leží ($s \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Zkoumejme, ve kterých množinách typu $M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ je prvek m obsažen — zřejmě právě v těch, pro které platí

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subseteq \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}.$$

Pro každé $r \in \{1,2,\ldots,s\}$ je tedy prvek m započten v právě $\binom{s}{r}$ sčítancích typu $|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|$, pro $r > s$ pak v žádném. Proto celkový příspěvek prvku m k pravé straně vzorce je

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \ldots + (-1)^{s+1}\binom{s}{s} = 1$$

podle identity níže. Na levé straně vzorce je prvek m ovšem započten také právě jednou. Tím je důkaz tvrzení ukončen; zpřesnili jsme v něm názornou myšlenku, která k odvození vzorce vede: v součtu $|M_1| + |M_2| + \ldots |M_n|$ jsou započteny právě jednou ty prvky, které leží v právě jedné z množin M_i; ty prvky, které leží zároveň v několika množinách, jsou zde započteny vícekrát. Odečteme-li $\sum |M_i \cap M_j|$, uvedeme na pravou míru ty prvky, které leží právě ve dvou množinách, přitom počty prvků patřících do aspoň tří množin jsou redukovány příliš. To se pro ty prvky, které patří do právě tří množin, napraví přičtením součtu $\sum |M_i \cap M_j \cap M_k|$ atd.

Identita:

Pro $n \geq 1$ platí:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

2.2.2 Příklady k procvičení

Příklad 2.2.3.

Ve zverimexu mají 15 zvířat, jenž žerou rostlinnou stravu, a 9 zvířat, jenž žerou maso. 5 z těchto zvířat jsou všežravci.

Kolik zvířat mají ve zverimexu?

Řešení:

Označíme si:
zvířata, jenž žerou rostlinnou stravu $= R$,
zvířata, jenž žerou maso $= M$,
zvířata, která jsou všežravci $= R \cap M$,
všechna zvířata $= R \cup M$.
$|R \cup M| = |R| + |M| - |R \cap M| = 15 + 9 - 5 = 19.$

Příklad 2.2.4.

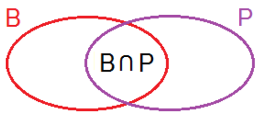
Dopravní kontrola zjišťovala technický stav brzd a ojetí pneumatik. Za špatný stav brzd uložila pokutu 15 řidičům, za ojeté pneumatiky uložila pokutu 12 řidičům. Ze všech 53 kontrolovaných řidičů nezjistila žádnou chybu u 30.

Vypočítejte, kolik řidičů zaplatilo pokutu za oba zmíněné nedostatky svého vozidla, kolik jen za špatný technický stav brzd, a kolik jen za ojetí pneumatik. [7]

Řešení:

Kontrolováno bylo 53 řidičů. U 30 aut kontrola nenašla žádnou chybu. Proto počet aut s nějakou závadou je $53-30=23$.

Označíme si:
auta se špatnými brzdami $= B$, $|B| = 15$,
auta s ojetými pneumatikami $= P$, $|P| = 12$,
auta s nějakou závadou $= B\cup P$, $|B\cup P| = 23$,
auta s oběma závadami $= B\cap P$, $|B\cap P| =?$.



Obrázek 2.10: Označení množin aut, zdroj: autor

Kolik bylo aut s oběma závadami?

$$|B\cup P| = |B| + |P| - |B\cap P|$$

$$|B\cap P| = |B| + |P| - |B\cup P| = 15+12-23 = 4$$

Kolik bylo aut jen se špatnými brzdami?

$$|B| - |B\cap P| = 12-4 = 8$$

Kolik bylo aut jen se špatnými pneumatikami?

$$|P| - |B\cap P| = 15-4 = 11$$

Příklad 2.2.5.

Ve vědeckém ústavu pracuje několik lidí, z nichž každý zná alespoň 1 cizí jazyk. 6 ovládá angličtinu, 6 němčinu a 7 francouzštinu. 4 umějí angličtinu i němčinu, 2 angličtinu a francouzštinu, 3 němčinu a francouzštinu. 1 člověk ovládá všechny 3 jazyky.

A) Kolik osob pracuje v ústavu? B) Kolik z nich ovládá pouze angličtinu? C) Kolik z nich umí jen francouzsky? [7]

Řešení:

Označíme si:
lidé, kteří umí anglicky $= A$,
lidé, kteří umí německy $= N$,
lidé, kteří umí francouzsky $= F$.
A) $|A|\cup|N|\cup|F| =?$

$$|A|\cup|N|\cup|F| = |A| + |N| + |F| - |A\cap N| - |A\cap F| - |N\cap F| + |A\cap N\cap F| =$$

$$= 6+6+7-4-2-3+1 = 11$$

B) Z náčrtku vyčteme, že jen angličtinu ovládá:

$$|A| - |A \cap N| - |A \cap F| + |A \cap N \cap F| = 6-4-2+1 = 1$$

C) Z náčrtku vyčteme, že jen francouzsky umí:

$$|F| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F| = 7-2-3+1 = 3$$

Příklad 2.2.6.

Z 326 žáků určité školy hraje 92 žáků odbíjenou, 143 žáků nehraje fotbal. Právě jeden z těchto dvou sportů pěstuje 213 žáků. Kolik žáků hraje fotbal i odbíjenou? [7]

Řešení:
Označíme si:
žáci hrající odbíjenou $= O$, $|O| = 92$,
žáci hrající fotbal $= F$,
žáci nehrající fotbal ani odbíjenou $= N$,
všichni žáci $= O \cup F \cup N$, $|O \cup F \cup N| = 326$,
Jaký je počet žáků hrajících fotbal?
$|F| =$ počet všech žáků - počet žáků nehrajících fotbal $= 326 - 143 = 183$.
Dále víme, že právě jeden ze dvou sportů pěstuje 213 žáků. Tzn.:

$$|O| + |F| - 2 \cdot |O \cap F| = 213.$$

Z toho vyplývá, že žáků, kteří hrají fotbal i odbíjenou, je

$$|O \cap F| = 31.$$

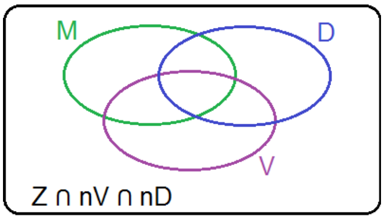
Příklad 2.2.7.

Personalistka jisté firmy poskytla řediteli následující informaci: ve firmě pracuje 250 mužů a 200 žen, přitom 160 mužů a 140 žen má vysokoškolské vzdělání, do práce dojíždí 180 mužů a 100 žen, vysokoškolsky vzdělaných mužů dojíždí 150 a vysokoškolsky vzdělaných žen 20.

Co z toho může ředitel usoudit?

Řešení:
Ve firmě podle údajů pracuje celkem $250 + 200 = 450$ lidí.
Kolik z nich je žen bez vysokoškolského vzdělání, které do práce nedojíždějí?

Označme vlastnosti osob:
mužské pohlaví $= M$,
ženské pohlaví $= Z$,
všichni lidé $= M \cup Z = L$,
má vysokoškolské vzdělání $= V$,
nemá vysokoškolské vzdělání $= nV$,
dojíždí do zaměstnání $= D$,
nedojíždí do zaměstnání $= nD$.



Obrázek 2.11: Označení množin zaměstnanců, zdroj: autor

Platí:
$|M| = 250$,
$|M \cup Z| = 450$,
$|V| = 160 + 140 = 300$,
$|D| = 180 + 100 = 280$,
$|M \cap V| = 160$,
$|M \cap D| = 180$,
$|V \cap D| = 150 + 20 = 170$,
$|M \cap V \cap D| = 150$.

$$|Z \cap nV \cap nD| = |L| - |M| - |V| - |D| + |M \cap V| + |M \cap D| + |V \cap D| - |M \cap V \cap D|$$

$$|Z \cap nV \cap nD| = 450 - 250 - 300 - 280 + 160 + 180 + 170 - 150 = -20$$

To samozřejmě není možné. Ředitel může usoudit, že personalistka udělala někde chybu.

Příklad 2.2.8.

Kolik přirozených čísel mezi 1 a 300 je A) dělitelných 3, 5 nebo 7; B) dělitelných 3 a 5, ale nedělitelných 7; C) dělitelných 5, ale ne 3 nebo 7 ? [7]

Řešení:
Označíme si:
čísla dělitelná $3 = A = \{n; 1 \leq n \leq 300, 3|n\}$,
čísla dělitelná $5 = B = \{n; 1 \leq n \leq 300, 5|n\}$,
čísla dělitelná $7 = C = \{n; 1 \leq n \leq 300, 7|n\}$,

A) Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Při počítání počtu prvků v jednotlivých množinách zaokrouhlujeme u dělení dolů. Zkuste se zamyslet proč?

$|A| = \lfloor 300 : 3 \rfloor = 100$
$|B| = \lfloor 300 : 5 \rfloor = 60$
$|C| = \lfloor 300 : 7 \rfloor = 42$

Co v našem případě znamená $|A \cap B|$? Čísla dělitelná 3 a zároveň 5, tedy čísla dělitelná 15. U $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ a $|A \cap B \cap C|$ analogicky.

$|A \cap B| = \lfloor 300 : 15 \rfloor = 20$
$|A \cap C| = \lfloor 300 : 21 \rfloor = 14$
$|B \cap C| = \lfloor 300 : 35 \rfloor = 8$
$|A \cap B \cap C| = \lfloor 300 : 105 \rfloor = 2$

Dosazením:

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162.$$

B) Hledáme čísla dělitelná 3 a 5, ale nedělitelná 7. Počet prvků této množiny bude roven:

$$|A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 20 - 2 = 18.$$

C) Hledáme čísla, která jsou dělitelná 5, ale nejsou dělitelná 3 nebo 7. Počet prvků této množiny bude roven

$$|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 60 - 20 - 8 + 2 = 34.$$

Příklad 2.2.9.

Určete počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14.

Řešení:

Označíme si:
čísla dělitelná $6 = A = \{n; 1 \leq n \leq 840, 6|n\}$,
čísla dělitelná $10 = B = \{n; 1 \leq n \leq 840, 10|n\}$,
čísla dělitelná $14 = C = \{n; 1 \leq n \leq 840, 14|n\}$,
Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Počet přirozených čísel mezi 1 a 840, která nejsou dělitelná 6, 10 ani 14, je:

$$840 - |A \cup B \cup C|$$

Počty prvků v jednotlivých množinách::

$|A| = \lfloor 840 : 6 \rfloor = 140$
$|B| = \lfloor 840 : 10 \rfloor = 84$
$|C| = \lfloor 840 : 14 \rfloor = 60$

V předchozím příkladu jsme jako $|A \cap B|$ brali čísla dělitelná 3 a zároveň 5, tedy dělitelná 15. Jednalo se o prvočísla, proto to bylo v pořádku. Nyní chceme znát počet čísel dělitelných 6 a zároveň 10, a to jsou čísla dělitelná právě jejich nejmenším společným násobkem.

$|A \cap B| = \lfloor 840 : nsn(6,10) \rfloor = 28$
$|A \cap C| = \lfloor 840 : nsn(6,14) \rfloor = 20$
$|B \cap C| = \lfloor 840 : nsn(10,14) \rfloor = 12$
$|A \cap B \cap C| = \lfloor 840 : nsn(6,10,14) \rfloor = 4$
Dosazením:

$$840 - |A \cup B \cup C| = 840 - (140 + 84 + 60 - 28 - 20 - 12 + 4) = 612.$$

Příklad 2.2.10.

Ve vědeckovýzkumném ústavu pracuje 67 osob, z nich 47 ovládá angličtinu, 35 němčinu a 20 francouzštinu, 23 osob umí anglicky i německy, 12 osob anglicky i francouzsky a 11 osob německy i francouzsky. Všemi třemi jazyky hovoří 5 osob. Určete, kolik osob neovládá žádný z uvedených tří světových jazyků? [1]

Řešení:

$$|A| \cup |N| \cup |F| = |A| + |N| + |F| - |A \cap N| - |A \cap F| - |N \cap F| + |A \cap N \cap F| =$$

$$= 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61$$

$$67 - |A \cup N \cup F| = 67 - 61 = 6.$$

Příklad 2.2.11.

Dokažte, že následující zpráva o jednom ročníku jisté základní školy je chybná. Do ročníku chodí 45 dětí, z toho je 30 chlapců. 30 dětí má dobrý prospěch, z nich je 16 chlapců. Sportu se věnuje 28 dětí, z toho 18 chlapců a 17 dětí, které mají dobrý prospěch. 15 chlapců má dobrý prospěch a současně sportuje. [1]

Řešení:
Označme množinu všech dětí v ročníku R, množinu všech chlapců CH, množinu všech dětí s dobrým prospěchem P a množinu všech sportovců S. Pro množinu všech nesportujících dívek, které nemají dobrý prospěch D, platí:

$$|D| = |R| - |CH \cup P \cup S| = 45 - (30 + 30 + 28 - 16 - 18 - 17 + 15) = -7,$$

což není možné.

Příklad 2.2.12.

Zkoušku z matematiky a z fyziky absolvovalo 120 studentů.

Zkoušku z matematiky udělalo 82 studentů, zkoušku z fyziky 85 studentů a obě zkoušky udělalo 77 studentů.

Určete:

A) Kolik studentů udělalo alespoň jedno zkoušku?

B) Kolik studentů neudělalo zkoušku z matematiky?

C) Kolik studentů neudělalo zkoušku z fyziky?

D) Kolik studentů udělalo zkoušku z matematiky a neudělalo zkoušku z fyziky?

E) Kolik studentů udělalo zkoušku z fyziky a neudělalo zkoušku z matematiky?

Řešení:

Označme S množinu všech studentů. M množinu studentů, kteří udělali zkoušku z matematiky. F množinu studentů, kteří udělali zkoušku z fyziky.

Počet prvků jednotlivých množin je: $|S| = 120, |M| = 82, |F| = 85, |M \cap F| = 77$.

A) $|M \cup F| = |M| + |F| - |M \cap F| = 90$

B) $|nM| = |S| - |M| = 38$ (nM – neudělali zkoušku z matematiky)

C) $|nF| = |S| - |F| = 35$ (nF – neudělali zkoušku z fyziky)

D) $|M \cap nF| = |M| - |M \cap F| = 5$

E) $|F \cap nM| = |F| - |M \cap F| = 8$

Závěr

Během mého studia jsem pracovala jako e-technička Informačního systému Masarykovy univerzity, kde při tvorbě multimediálních studijních materiálů jsme využívali webové šablony Servisního střediska IS MU. Tyto šablony se mi zalíbily. S dovolením s-techniků z IS MU jsem si jednu z nich zvolila i jako podklad mé práce.

Celá práce je psána v jazyce xhtml, do kterého je sazba matematických symbolů zakomponována pomocí webové služby MathJax, dostupná z https://www.mathjax.org/.

Na vysvětlení některých příkladů jsem využila interaktivní obrázky. Při jejich vytváření jsem si pomohla aplikací Google Web Designer. Při konkrétních příkladech je použit interaktivní prvek, kde může uživatel postupným posouváním myší procházet sadu obrázků. Sada obrázků se skládá z několika schémat, které krok za krokem vysvětlují postup řešení daného příkladu.

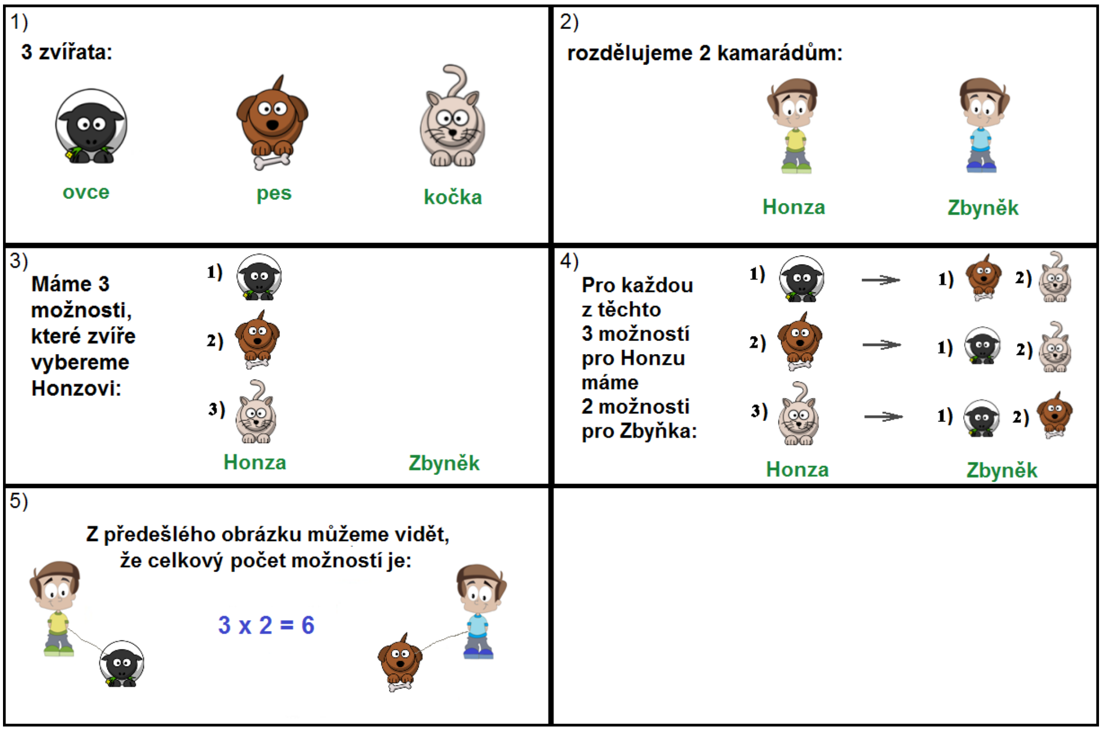
Obrázky, které jsou v učebnici použity, jsou buď mé vlastní nebo jsem je čerpala z http://pixabay.com/[11]. Tento server obsahuje volně šiřitelné obrázky vysoké kvality, které lze použít kdekoli a není nutné uvádět zdroj. Přesto jsem při použitých obrázcích z tohoto serveru zdroj uvedla.

Na adrese https://is.muni.cz/auth/th/357537/prif_m/web/ je dostupná praktická část této práce.

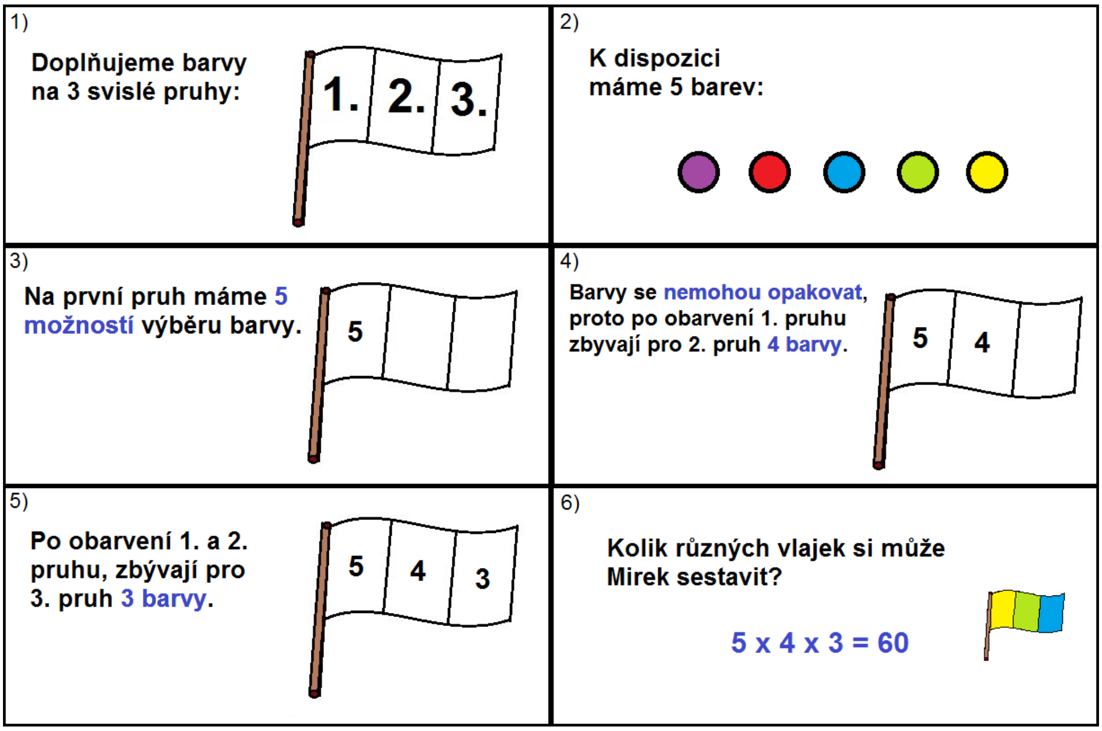
Text práce je vysázen systémem LaTeX.

Přílohy

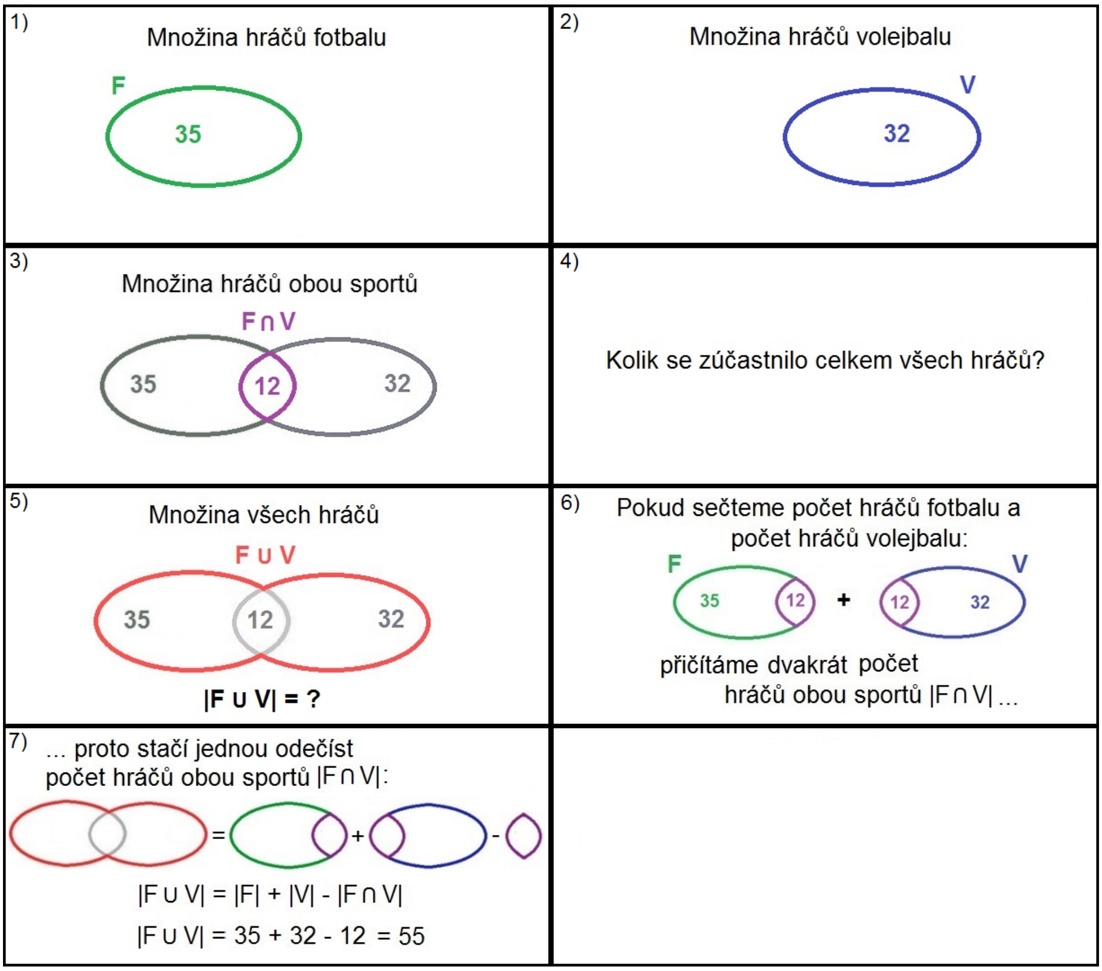
1. Řešení příkladu 1.1.2. Zvířata



2. Řešení příkladu 1.2.1. Vlajky, části A)



3. Řešení příkladu 2.2.1 Turnaje



4. Náhled webových stránek

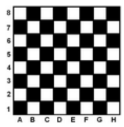
5. Náhled příkladu a jeho zdrojového kódu

Příklad 5

Kolika způsoby lze vybrat na šachovnici 8x8 jedno bílé a jedno černé pole?

Kolika způsoby to lze učinit, nesmějí-li vybraná pole ležet ve stejném řádku ani ve stejném sloupci?

Řešení: (skrýt text)



Bílé pole lze vybrat 32 způsoby, černé rovněž. Celkový počet způsobů výběru je tedy v prvním případě roven $32 \cdot 32 = 1024$.

Vybereme-li v druhém případě jedno bílé pole (32 způsobů), lze černé vybrat už jen z řádků a sloupců, v nichž vybrané bílé pole neleží, tj. 24 způsobů. Počet výběrů je tedy $32 \cdot 24 = 738$.

```
<!-- příklad 5  -->
<h3 >Příklad 5 </h3>

<p> Kolika způsoby lze vybrat na šachovnici 8x8 jedno bílé a jedno černé pole?</p>
<p> Kolika způsoby to lze učinit, nesmějí-li vybraná pole ležet ve stejném řádku ani ve stejném sloupci? </p>

<h4 class="show-box" onclick="showDiv('priklad05',this)" >
Řešení:<span style="font-size: 11px; font-weight:normal; float:right;">(zobrazit text)</span> </h4>
<div style="display:none" id="priklad05">
<img src="../pics/01_p_05/sachovnice.jpg" width="110px" alt="Náhled šachovnice" style="margin:  8px 0px 0px 10px; border:0px">

<p>Bílé pole lze vybrat 32 způsoby, černé rovněž.
Celkový počet způsobů výběru je tedy v prvním případě roven $32 \cdot 32 = 1024$.</p>
<p> Vybereme-li v druhém případě jedno bílé pole (32 způsobů),
lze černé vybrat už jen z řádků a sloupců, v nichž vybrané bílé pole neleží, tj. 24 způsobů.
Počet výběrů je tedy $32 \cdot 24 = 738$.
</p>
</div>

<!-- příklad 5 konec -->

<hr class="mhr">
```

6. Náhled příkladu se skrytým a zobrazeným řešením

Příklad 10

V prodejně mají na výběr 15 různých hrníčků a skleniček. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit A) 17; B) 8; C) 8 různých.

Řešení: (zobrazit text)

Příklad 10

V prodejně mají na výběr 15 různých hrníčků a skleniček. Určete, kolika způsoby si lze z nich koupit A) 17; B) 8; C) 8 různých.

Řešení: (skrýt text)

A) $\binom{31}{17}$ $[= 265182525]$

B) $\binom{22}{8}$ $[= 319770]$

C) $\binom{15}{8}$ $[= 6435]$

7. Náhled příkladu s interaktivním řešením

Řešené příklady

Příklad 1 - Turnaje

V Husovicích se konal fotbalový a volejbalový turnaj. Na fotbalový turnaj přišlo 35 účastníků, na volejbalový 32 účastníků. 12 se jich zúčastnilo fotbalového i volejbalového turnaje.

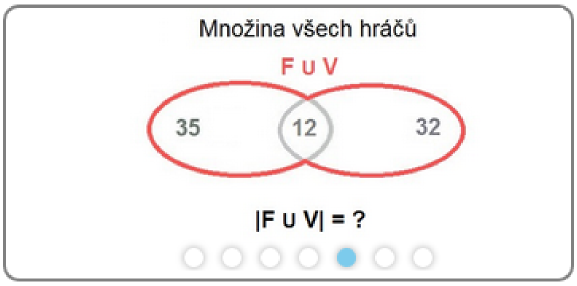
Kolik přišlo sportovců celkem?

Řešení: (skrýt text)

Označme si jednotlivé množiny:
Množina hráčů fotbalu $= F$
Množina hráčů volejbalu $= V$
Množina hráčů obou sportů $= F \cap V$
Množina všech hráčů $= F \cup V$

Pro připomenutí, počet prvků dané množiny M označujeme $|M|$.

Počítáme počet všech sportovců, kteří se zúčastnili obou turnajů:



*Interaktivním obrázkem můžete pohybovat pomocí modrých bodů ve spodní části obrázku anebo kliknutím a tažením pravým tlačítkem myši.

Přepis řešení:

Zajímá nás počet všech hráčů: $F \cup V = \ ?$
V množině hráčů fotbalu jsou i hráči, kteří hráli také volejbal.
A v množině hráčů volejbalu jsou i hráči, kteří hráli také fotbal.

Z toho důvodu, pokud sečteme počet hráčů fotbalu a počet hráčů volejbalu, přičteme dvakrát počet hráčů obou sportů ($F \cap V$).

Počet všech hráčů tedy obdržíme, pokud sečteme $|F| + |V|$ a jednou odečteme $F \cap V$:

$$|F \cup V| = |F| + |V| - |F \cap V|$$

Dosazením:

$$|F \cup V| = 35 + 32 - 12 = 55$$

Seznam použité literatury

[1] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Metody řešení matematických úloh*. 3., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004, 355 s. ISBN 80-210-3569-2.

[2] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5.vyd. Praha: Prometheus, 2012, 170 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1963-653.

[3] FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011, 178 s. ISBN 978-802-1054-592.

[4] SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013, 773 s. ISBN 978-80-210-6307-5.

[5] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 608 s. ISBN 8071962678.

[6] Petáková, Jindra. *Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2007, 288 s. ISBN 978-80-7196-099-7.

[7] ZAGOROVÁ, Pavla. *MuDisMat: Multimediální Diskrétní Matematika* [online]. 2007 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://xzagorov.webzdarma.cz/MuDisMat3/

[8] ŠÁMAL, Robert. *Burnsideovo lemma aneb kterak náhrdelníky spočítati*. Matematický korespondenční seminář [online]. Rokytnice, 1998 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/BurnsideovoLemmaRS/BurnsideovoLemmaRS.pdf

[9] BENDOVÁ, Háňa. *Burnsideovo lemma*. Matematický korespondenční seminář [online]. Domaslav, 2010 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/Burnsideovo_lemma_HB/Burnsideovo_lemma_HB.pdf

[10] FARSKÁ, Jana. *Kombinační čísla: Binomická věta*. Laboratoř Carolina, Karlova Univerzita: Centrum podpory studia zrakově postižených na Universitě Karlově [online]. 2015 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://carolina.mff.cuni.cz/ jana/kombinatorika/04binomicka_veta.htm

[11] *Pixabay: Volné obrázky vysoké kvality, které můžete použít kdekoli* [online]. 2015 [cit. 2015-05-03]. Dostupné z: http://pixabay.com/