



**PEDAGOGICKÁ
FAKULTA**
Masarykova univerzita

Mechanika a molekulová fyzika

Ideální plyn

Doc. RNDr. Petr Sládek, CSc.

Pedagogická fakulta
Masarykova Univerzita
Poříčí 7, 603 00 Brno



Pro potřeby přednášky zpracováno s využitím www.studopory.vsb.cz materialy html_files

Ideální plyn, stavová rovnice

Ideální plyn. Vlastnosti molekul plynu v tomto modelu jsou:

1. Rozměry molekul jsou ve srovnání se střední vzdáleností molekul od sebe zanedbatelně malé (tj. zanedbáváme vlastní objem molekul).
2. Molekuly nepůsobí na sebe navzájem přitažlivými silami (zanedbáváme síly interakce mezi molekulami plynu).
3. Vzájemné srážky molekul a srážky molekul se stěnami nádoby jsou dokonale pružné (při srážkách platí ZZH a ZZE).
4. Protože doba trvání srážky molekul je ve srovnání se střední dobou volného pohybu molekul zanedbatelná, pohybuje se v určitém okamžiku převážná část molekul rovnoměrným přímočarým pohybem.
5. Pohyb molekul je dokonale neuspořádaný (tj. všechny směry pohybu molekuly jsou stejně pravděpodobné).

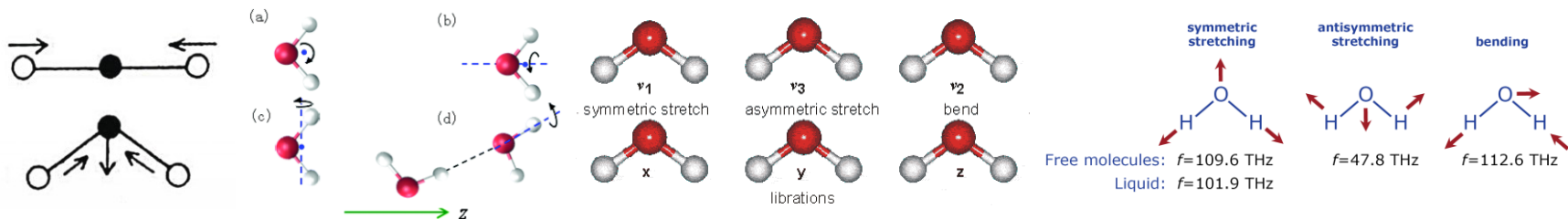
Při dostatečně vysokých teplotách a nízkých tlacích se skutečné plyny svými vlastnostmi přibližují vlastnostem modelu ideálního plynu.

Ideální plyn, stavová rovnice

Molekuly ideálního plynu **nepůsobí** na sebe navzájem silami, je **potenciální energie** soustavy molekul ideálního plynu **nulová**.

Vnitřní energie ideálního plynu

1. s jednoatomovými molekulami se rovná součtu *kinetických energií* jeho molekul pohybujících se neuspořádaným posuvným pohybem,
2. - s víceatomovými molekulami pak kromě toho zahrnuje *kinetickou energii rotačního a kmitavého pohybu* těchto molekul.).



Ideální plyn, stavová rovnice

Molekuly plynu  nemají v určitém okamžiku stejnou rychlost.

Vzájemnými srážkami molekul se neustále **mění velikost** a **směr** jejich rychlosti.

Velikosti rychlosti molekul jsou v intervalu od nulových až po velmi velké (teoreticky nekonečně velké).

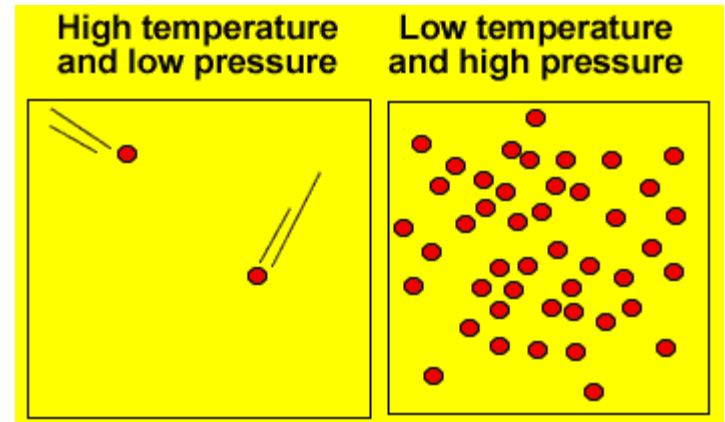
Četnost velikostí rychlosti však v soustavě molekul plynu **není stejná**,



odpovídají určitému ***statistickému rozdělení***.

Chování velkého počtu částic se vyšetřuje metodami ***matematické statistiky***.

Ideální plyn, stavová rovnice



Pro popis rozdělení molekul ideálního plynu podle rychlostí se zavádí **rozdělovací funkce $f(v)$** .

Hodnoty této funkce pro danou **rychlost v** jsou relativní počty molekul, jejichž rychlosti jsou z diferenciálně malého intervalu rychlostí $(v, v + dv)$, což se dá zapsat vztahem

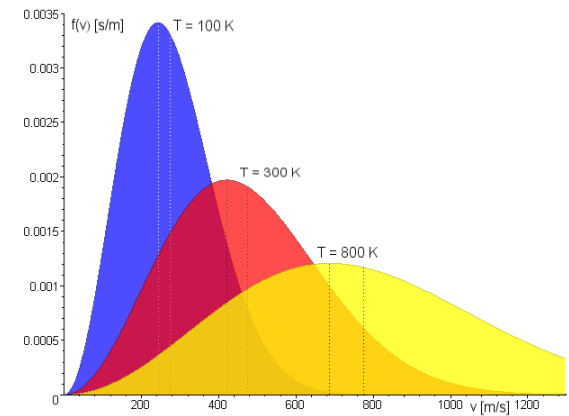
$$f(v) = \frac{dN}{N} \frac{1}{dv}$$

kde N je celkový počet molekul plynu v soustavě a dN je počet molekul s rychlostmi v intervalu $(v, v + dv)$

Ideální plyn, stavová rovnice

Maxwellova – Boltzmannova rozdělovací funkce.

Tato funkce má tvar $f(v) = Av^2 e^{-\frac{E}{kT}}$



Ideální plyn, stavová rovnice

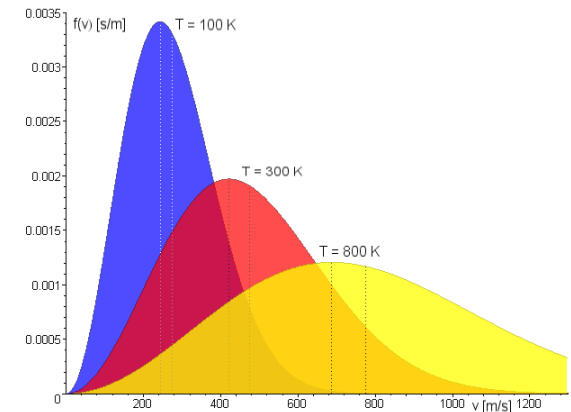
Největší význam má veličina, která se nazývá **střední kvadratická rychlost** v_k .

Střední kvadratická rychlost je rychlost, se kterou by se pohybovaly **všechny** molekuly plynu v soustavě, aby celková kinetická energie byla stejná jako kinetická energie soustavy molekul, které se pohybují rychlostmi podle daného rozdělení rychlostí.

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

kde m_0 je *hmotnost molekuly plynu* a $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ je *Boltzmanova konstanta*.

- Střední kvadratická rychlost se s rostoucí teplotou zvětšuje.



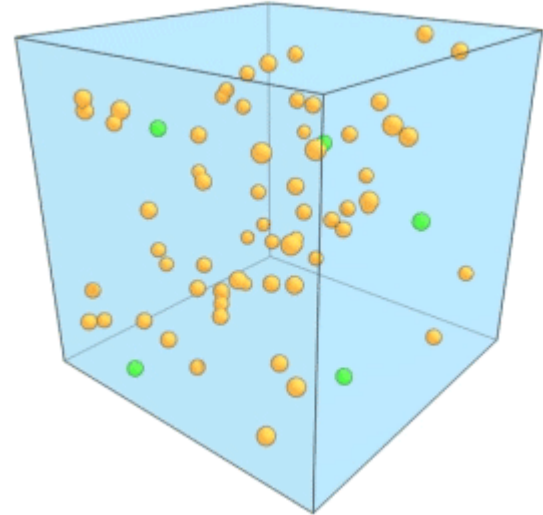
Ideální plyn, stavová rovnice

Střední kinetická energie E_{k0} ,

kteřou má molekula ideálního plynu pohybující


se posuvným pohybem je $E_{k0} = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_{k0} = \frac{3}{2} kT$$



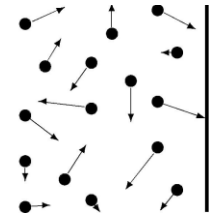
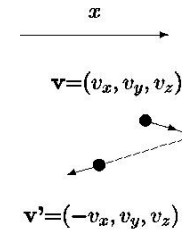
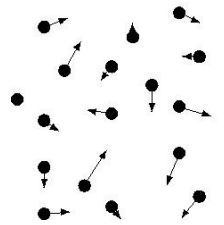
Ideální plyn, stavová rovnice

Kinetická energie molekul plynu může záviset maximálně na šesti parametrech (3 translační, 3 rotační)

Ekvipartiční teorém  na každý stupeň volnosti mechanické energie (plynu) připadá stejná energie $\frac{1}{2} kT$ (pro ideální plyn – 1atomový – 3 stupně volnosti)



$$dU = n \frac{i}{2} R \cdot dT$$



Ideální plyn, stavová rovnice

Tlak plynu p vysvětlujeme z hlediska molekulové fyziky současnými nárazy molekul plynu na stěny nádoby (dále krychle), ve které je plyn uzavřen.

Molekuly, které dopadají na stěnu se pohybují neuspořádaně, a proto jejich počet i jejich rychlosti se neustále mění → **fluktuace tlaku**.

Odchytky jsou velmi malé a skutečný tlak lze ztotožnit s jeho střední hodnotou $p_s = p$.

Každá molekula, která se od plochy o obsahu S pružně odrazí, změní svojí hybnost $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -2\vec{p}_1 = -2m_0\vec{v}$
 Za dobu τ dopadne na 1 stěnu krychle $\frac{1}{6}N_V v \tau S$ molekul. Kde $N_V = NV$.

Velikost celkové změny hybnosti všech molekul, které se za dobu τ odrazí od plochy o obsahu S je $|\Delta\vec{p}| = 2m_0 v \cdot \frac{1}{6}N_V v \tau S$.

Při velkém počtu dopadajících molekul se nárazy jeví tak, jako by na plochu o obsahu S působila po

dobu τ stálá síla o velikosti $F = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\tau} = \frac{1}{3}m_0 v^2 N_V S$. Druhou mocninu rychlosti musíme nahradit aritmetickým průměrem druhých mocnin rychlostí všech molekul, tj. druhou mocninou střední kvadratické rychlosti.

Základní rovnice pro tlak ideálního plynu

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m_0 v_k^2$$

Ideální plyn, stavová rovnice

Plyn, který je v rovnovážném stavu, lze charakterizovat stavovými veličinami *termodynamickou teplotou T , tlakem p , objemem V a počtem molekul N* (nebo odpovídajícími veličinami – *hmotností plynu m nebo látkovým množstvím n*).



$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m_0 v_k^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \frac{m_0 3kT}{m_0} = \frac{1}{V} NkT \quad pV = NkT$$

$$pV = nN_A kT$$

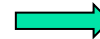
$$pV = nRT$$

Ideální plyn, stavová rovnice

Pro dva stavy 1 a 2 pak

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{pV}{T} = \textit{konst}$$



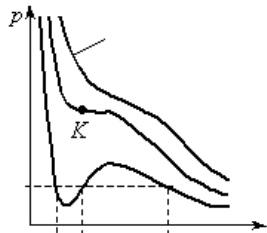
Ideální plyn, stavová rovnice

Holandský fyzik *van der Waals* upravil stavovou rovnici pro reálný plyn, která lépe vyjadřoval vlastnosti plynu.

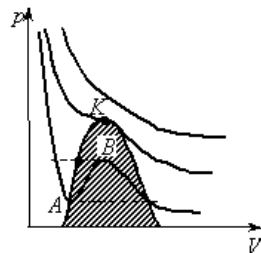
V tomto modelu předpokládal, že molekuly plynu mají vlastní objem a působí na sebe navzájem přitažlivými silami.

Van der Waalsova stavová rovnice pro plyn o látkovém množství n má tvar kde a a b jsou konstanty závislé na druhu plynu.

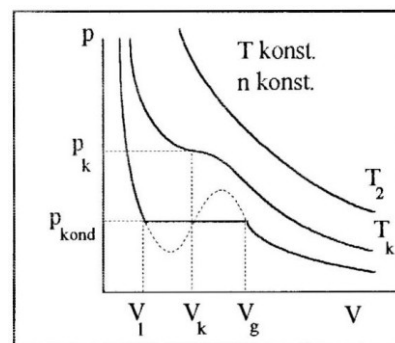
$$\left(p + n^2 \frac{a}{V^2}\right) (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$



Obr. 7.1.9 p-V diagram reálného plynu



Obr. 7.1.10 Nestabilní oblasť

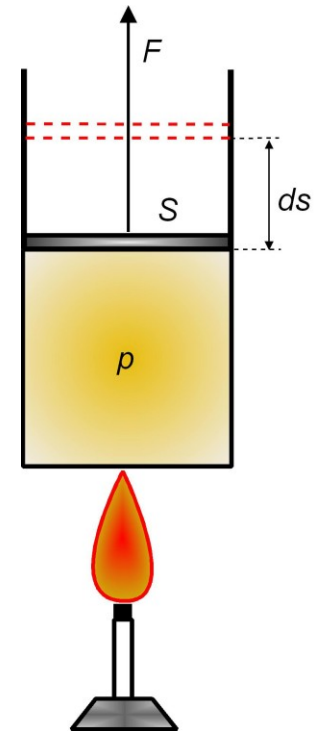


Je-li teplota nižší, než je kritická teplota, má křivka lokální maximum a lokální minimum. U reálných plynů zmenšováním objemu pod V_g plyn začne kapalnět a tlak se nemění, dokud všechen plyn nezkapalní.

Práce plynu

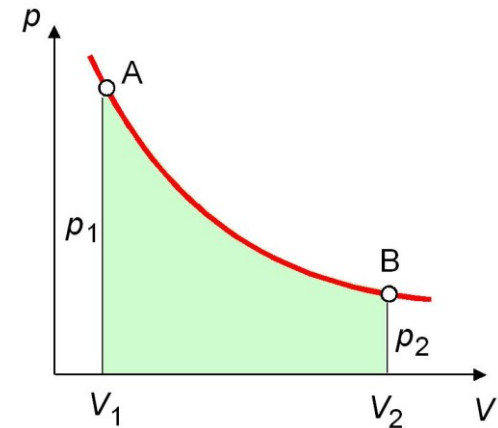
Plyn je pod *tlakem* p a na píst *plochy* S působí *tlakovou silou* F . Při zvětšování objemu bude konat práci:

$$dA = F \cdot ds = p \cdot S \cdot ds = p \cdot dV$$



Bude-li $V_1 < V_2$, je $A > 0$ a plyn práci koná. Bude-li $V_1 > V_2$, je $A < 0$ a plyn práci spotřebovává.

Stavová rovnice, p-V diagram



Stavovou změnu (děj) probíhající v plynu můžeme znázornit v **p-V diagramu**,

Děj v plynu je znázorněn křivkou závislosti tlaku plynu na objemu $p = p(V)$ odpovídající uvažovanému ději od stavu (p_1, V_1) do stavu (p_2, V_2)

Práce konaná plynem je pak úměrná velikosti **obsahu plochy** pod grafem závislosti $p = p(V)$ a rovnoběžkami s osou p vedenými hodnotami V_1 a V_2 .

Za **tlak** p dosazujeme ze stavové rovnice.

Molární tepelná kapacita

Při tepelné výměně plynu s okolními tělesy záleží na podmínkách, při kterých tepelná výměna probíhá.

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT} \quad dQ = dA + dU \quad C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

Proto má plyn dvě *molární (měrné) tepelné kapacity*:

Molární tepelná kapacita ideálního plynu při **stálém objemu** je

$$C_{mV} = \frac{i}{2} R, \text{ kde } i = 3, 5, 6 \text{ je počet stupňů volnosti molekuly plynu.}$$

Molární tepelná kapacita ideálního plynu při **stálém tlaku** je

$$C_{mp} = \frac{i+2}{2} R$$



Molární tepelná kapacita

- Při $V = \text{konst.}$ je teplo dáno vztahem

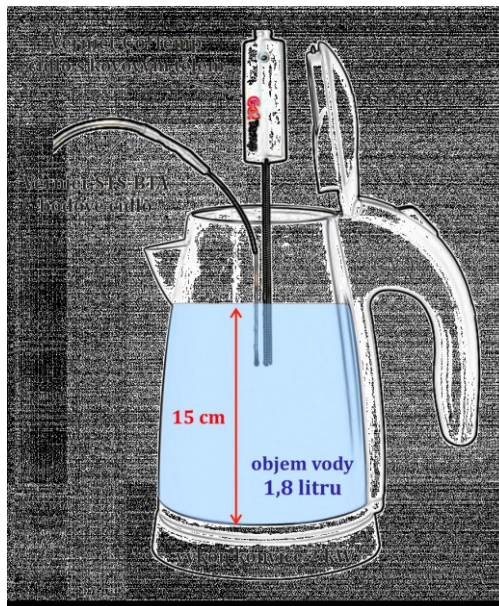
- $Q = n \cdot C_{mV} \cdot \Delta T$ resp. $Q = m \cdot c_V \cdot \Delta T$

$$n \cdot C_{mV} = m \cdot c_V$$

- Pro $p = \text{konst.}$ je teplo

- $Q = n \cdot C_{pV} \cdot \Delta T$ resp. $Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$

$$n \cdot C_{pV} = m \cdot c_p$$

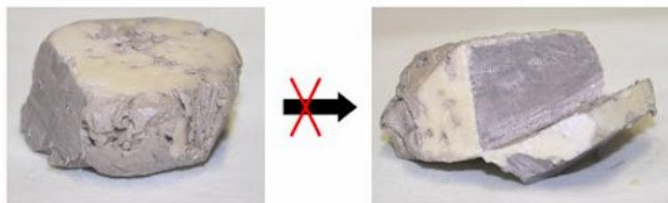
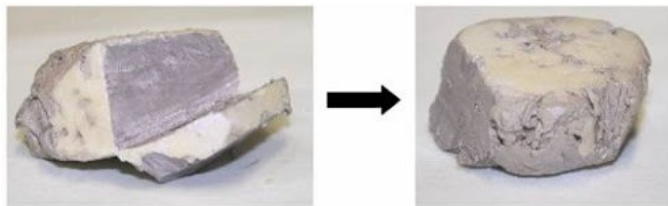


Vratné děje v ideálním plynu

Termodynamický děj (nebo také stavová změna) je fyzikální děj, při kterém soustava přejde z *daného počátečního stavu* časovou posloupností stavů do *stavu výsledného*

Vratný děj: počáteční stav \longleftrightarrow výsledný stav (rovnovážný děj)

Nevratný děj: počáteční stav \longrightarrow výsledný stav (skutečné děje v přírodě)

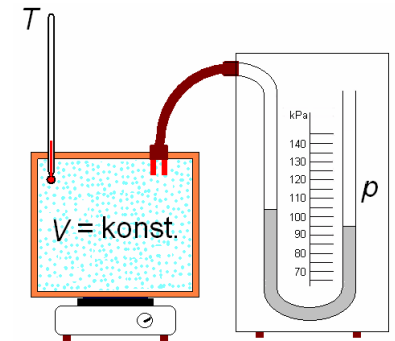


$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Izochorický děj s ideálním plynem

Izochorický děj - při stálém objemu plynu ($V = \text{konst}$)

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \frac{p}{T} = \text{konst}$$

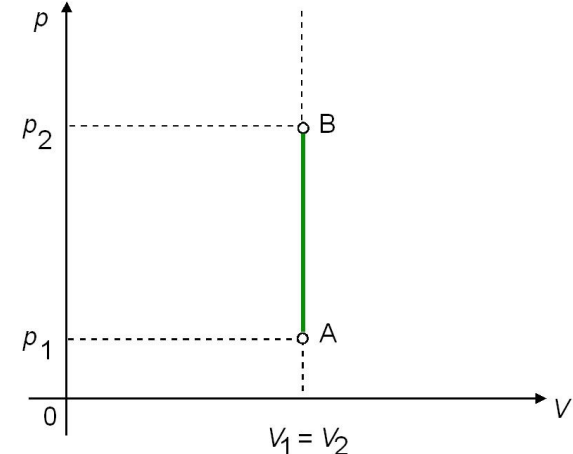


Charlesův zákon: Při izochorickém ději s ideálním plynem stálé hmotnosti je tlak plynu přímo úměrný jeho termodynamické teplotě.

V p-V diagramu: **izochora** ($V = \text{konst}$)

$$dA = p \cdot dV = 0 \quad \Delta U = A' + Q_V = Q_V = m \cdot c_v \cdot \Delta T$$

Teplo přijaté ideálním plynem při izochorickém ději se rovná přírůstku jeho vnitřní energie.



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

Izobarický děj s ideálním plynem

Izobarický děj - při stálém tlaku plynu ($p = \text{konst}$)

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \frac{V}{T} = \text{konst}$$

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

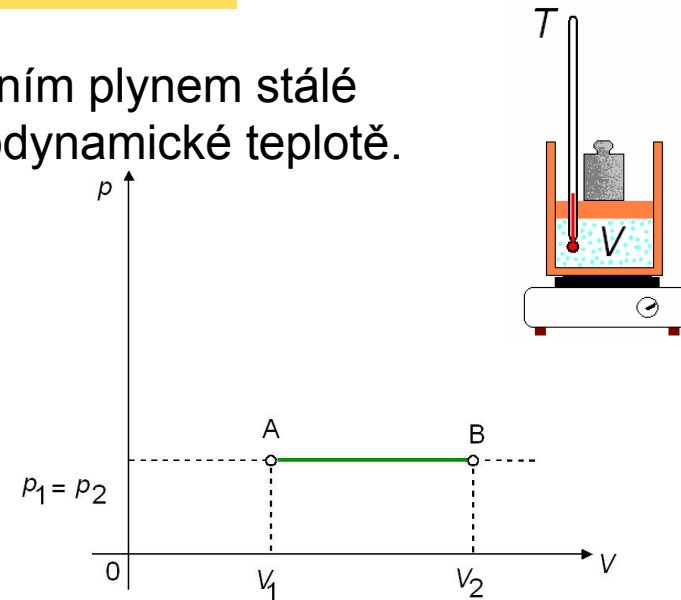
Gay-Lussacův zákon: Při izobarickém ději s ideálním plynem stálé hmotnosti je objem plynu přímo úměrný jeho termodynamické teplotě.

V p-V diagramu: **izobara** ($p = \text{konst}$)

$$A = p \cdot \Delta V = nR\Delta T \quad (c_p > c_v)$$

$$Q_p = A + \Delta U = (nR + nC_v) \Delta T = n \cdot C_p \cdot \Delta T = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

Teplo přijaté ideálním plynem při izobarickém ději se rovná součtu přírůstku jeho vnitřní energie a práci, kterou plyn vykoná.



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

Izotermický děj s ideálním plynem

Izotermický děj - při stálé teplotě plynu ($T = \text{konst}$)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$pV = \text{konst} = nRT$$

Boyle-Marriotův zákon: Při izotermickém ději s ideálním plynem stálé hmotnosti je součin tlaku a objemu plynu stálý.

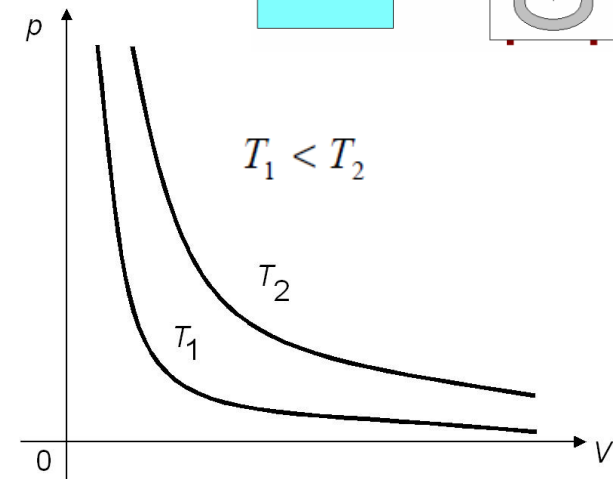
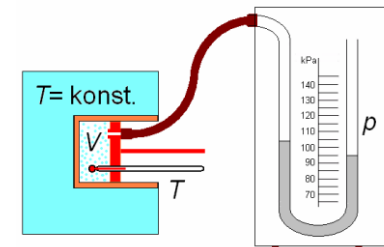
V p-V diagramu: **izoterma** ($p = \frac{\text{konst}}{V}$)

$$\Delta U = mc_V \Delta T = 0$$

$$dA = p \cdot dV = \frac{nRT}{V} dV \quad A = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$Q_T = A + \Delta U = A + 0 = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Teplu přijaté ideálním plynem při izotermickém ději se rovná práci, kterou plyn vykoná.



$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

Adiabatický děj s ideálním plynem

Adiabatický děj - bez tepelné výměny s okolím ($Q = 0$)

Odvození Poissonova zákona :

Do prvního termodynamického zákona v diferenciálním tvaru $dQ = dA + dU$ dosadíme $dQ = 0$, $dA = p \cdot dV$ a $dU = n \cdot C_{mV} \cdot dT$ a dostaneme :

$$p \cdot dV + n \cdot C_{mV} \cdot dT = 0 .$$

Za dT dosadíme výraz, který získáme z úplného diferenciálu stavové rovnice (2.2.-36)

$$dT = \frac{p \cdot dV + V \cdot dp}{n \cdot R} . \text{ Dosadíme jej a rovnici postupně upravíme}$$

$$p \cdot dV + n \cdot C_{mV} \cdot \frac{p \cdot dV + V \cdot dp}{n \cdot R} = 0 ,$$

$$R \cdot p \cdot dV + C_{mV} \cdot p \cdot dV + C_{mV} \cdot V \cdot dp = 0 ,$$

$$(C_{mV} + R) \cdot p \cdot dV + C_{mV} \cdot V \cdot dp = 0 .$$

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

Adiabatický děj s ideálním plynem

Adiabatický děj - bez tepelné výměny s okolím ($Q = 0$)

Odvození Poissonova zákona :

$$(C_{mV} + R) \cdot p \cdot dV + C_{mV} \cdot V \cdot dp = 0.$$

Rovnici vydělíme součinem $p \cdot V$ a použijeme Mayerovy rovnice

$$C_{mP} \cdot \frac{dV}{V} + C_{mV} \cdot \frac{dp}{p} = 0.$$

Zavedeme Poissonovu konstantu a rovnici integrujeme

$$\kappa \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0,$$

$$\kappa \cdot \ln V + \ln p = \ln K,$$

kde K je konstanta. Odtud po odlogaritmování dostaneme $p \cdot V^\kappa = K$.

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

Adiabatický děj s ideálním plynem

Adiabatický děj - bez tepelné výměny s okolím ($Q = 0$)

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \quad pV^\kappa = \text{konst} = nRT$$

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

kde κ je **Poissonova konstanta**. Poissonova konstanta je definována vztahem

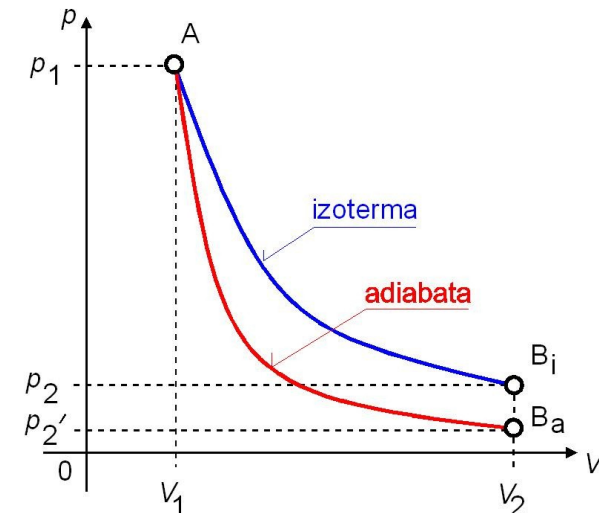
$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i + 2}{i}$$

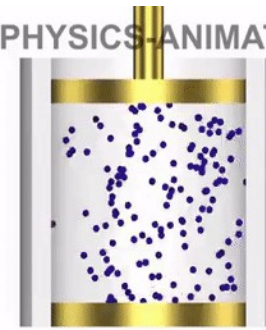
kde i je počet stupňů volnosti molekuly ideálního plynu.

V p-V diagramu: **adiabata** ($p = \frac{\text{konst}}{V^\kappa}$)

$$\Delta U = -A = mc_v \Delta T$$

Při adiabatickém stlačení plynu v nádobě konají práci vnější síly, plyn práci spotřebovává a jeho vnitřní energie a teplota se zvětšuje. Při adiabatickém rozpínání koná práci plyn a jeho vnitřní energie a teplota se zmenšuje.





Adiabatický děj s ideálním plynem

Adiabatický děj - bez tepelné výměny s okolím ($Q = 0$)

- V technické praxi se dosáhne **adiabatické komprese** nebo **expanze** zmenšením nebo zvětšením objemu plynu **ve velmi krátké době** tak, že plyn během této doby nepřijme ani neodevzdá svému okolí teplo.
- Ochlazení plynu, které provází adiabatickou expanzi, se využívá k získání nízkých teplot.
- U vznětových motorů se při adiabatické kompresi vzduchu zvýší jeho teplota na zápalnou teplotu nafty, která po vstříknutí do horkého vzduchu se vznítí.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

Polytropický děj s ideálním plynem

Polytropický děj - nemění se tepelná kapacita plynu ($C_v = \text{konst}$)

$$dQ = dA + dU$$

$$C_m = \frac{dU + dA}{n \cdot dT}$$

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

$$p_1 V_1^\nu = p_2 V_2^\nu \quad pV^\nu = \text{konst}$$

$$TV_1^{\nu-1} = TV_2^{\nu-1} \quad TV^{\nu-1} = \text{konst}$$

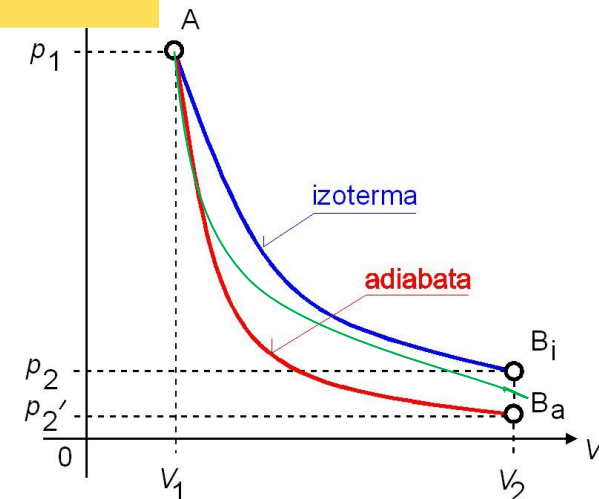
$$p_1^{1-\nu} T_1^\nu = p_2^{1-\nu} T_2^\nu \quad p^{1-\nu} T^\nu = \text{konst}$$

kde ν je **polytropický koeficient**.

$$\nu = \frac{C_{mp} - C_{mv}}{C_{mV} - C_{m\nu}}$$

kde $C_{m\nu}$ je molární polytropická tepelná kapacita.

V p-V diagramu: **polytropa** $(p = \frac{\text{konst}}{V^\nu})$



Kruhový děj s ideálním plynem

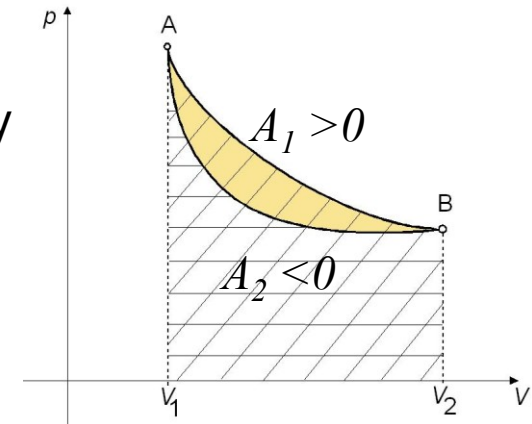
Kruhový děj - Termodynamický děj, při kterém je **konečný stav** soustavy totožný s **počátečním stavem** (tj. se stejnou vnitřní energií $\Delta U = 0$).

Grafickým znázorněním kruhového děje ve stavovém diagramu (p-V, V-T, p-T) je vždy **uzavřená** křivka.

Práce A je dána obsahem plochy uvnitř uzavřené křivky znázorňující kruhový děj .

$$A = A_1 + A_2, \text{ kde } A_1 > 0 \text{ a } A_2 < 0$$

$$A = A_1 + A_2 = -\Delta U + Q = Q_1 + Q_2 \quad \longleftarrow \text{1.VT}$$



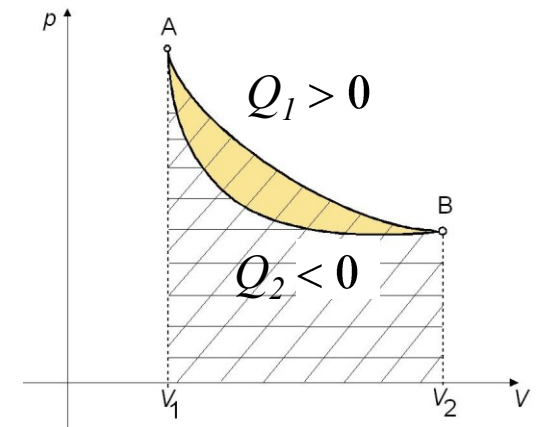
kde dodané teplo plynu $Q_1 > 0$ a odebrané teplo $Q_2 < 0$.

kde $A_1 > 0$ (plyn pracuje = koná práci, objem se zvětšuje) a $A_2 < 0$ (objem se zmenšuje).

$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

Kruhový děj s ideálním plynem

■ Těleso, od kterého plyn (pracovní látka) **přijme** během jednoho cyklu kruhového děje **teplo Q_1** , nazýváme **ohříváč**



$$C_m = \frac{dQ}{n \cdot dT}$$

Kruhový děj s ideálním plynem

Carnotův cyklus - 2 izotermy a 2 adiabaty

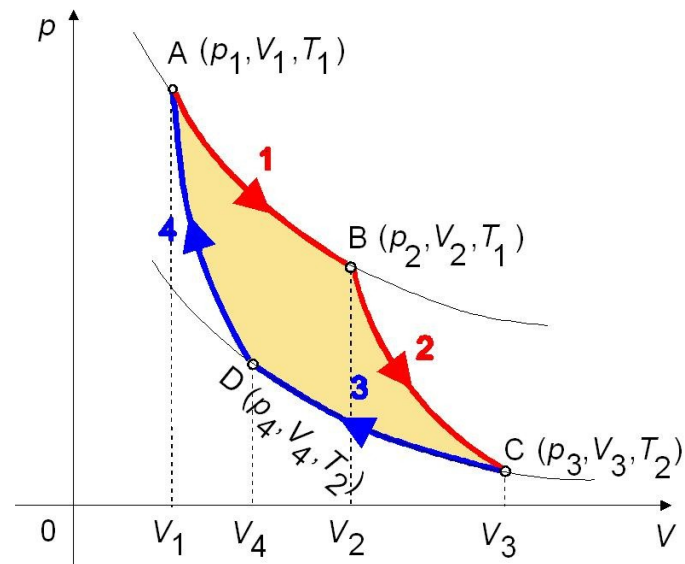
- 1. izotermická expanze (křivka AB)

$$Q_1 = A_1 = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} > 0$$

$$Q_2 = 0$$

$$Q_3 = A_3 = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} < 0$$

$$Q_4 = 0$$

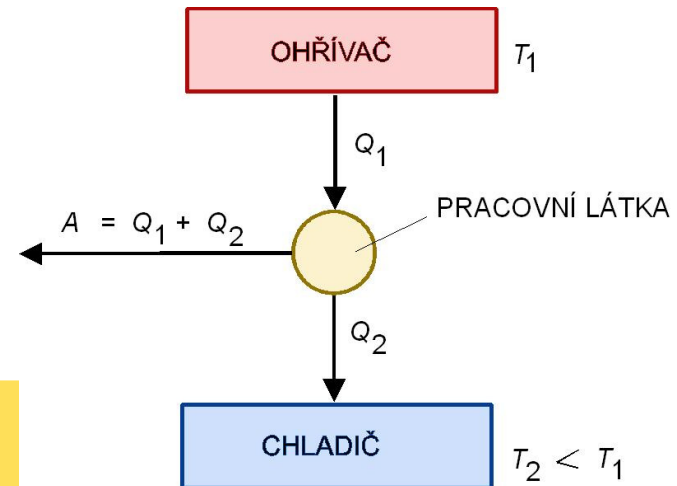
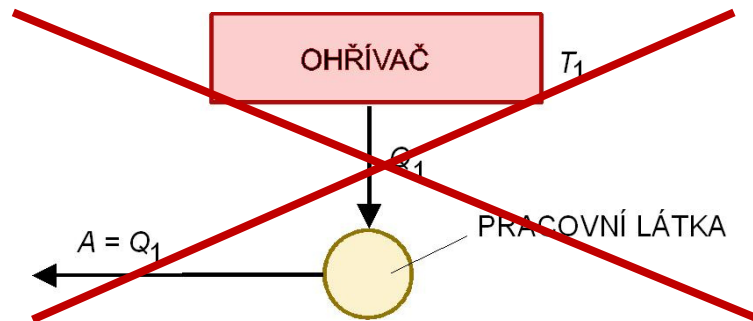


Kruhový děj s ideálním plynem

Z tepla přijatého od ohříváče lze jen část využít ke konání práce.
 Zbytek odevzdává pracovní látka chladiči.

Druhý termodynamický zákon (2.VT): (~~Perpetuum mobile 2. druhu~~)

Není možné sestavit periodicky pracující tepelný stroj, který by jen přijímal teplo od určitého tělesa (ohříváče) a vykonával trvale stejně velkou práci.



Při tepelné výměně teplejší těleso nemůže přijímat teplo od tělesa studenějšího.

Planck - Clausius

Je nemožné přenášet cyklickým procesem teplo z chladnějšího tělesa na teplejší, aniž se přitom jistá část práce změní na teplo.

Zdroje

- https://concept-stories.s3.ap-south-1.amazonaws.com/test/Stories%20-%20Images_story_5743/image_2019-01-29%2011%3A29%3A40.169173%2B00%3A00
- <https://www.nist.gov/sites/default/files/images/2018/05/15/translation.gif>
- <https://fyzikalnipokusy.cz/media/02335/1.full.tagged.png>
- https://lh3.googleusercontent.com/proxy/ppisIUeg483R-oE33jp5pGfKxLgyAz7loC3Ez0smCGsq3SGzh4xaxaBZnBcwKQArOfyUHv6WhVkmIXsjqA9A24_DuC-wD0l_xkLAXGZI-9hyAYJSPXjwOHtevrhtRXhRXxuGBeYIx_1Z8aYFfiGA4wQSowxpRxUip50Am9ynPdSrfwgi
- https://thumbs.gfycat.com/HandsomeEcstaticLadybug-size_restricted.gif