1.6. Dynamika tuhého tělesa

1. Objasnit a diskutovat pojmy hmotný bod – soustava hmotných bodů – těleso. Definovat tuhé těleso.
2. Charakterizovat postupný, otáčivý a složený pohyb tuhého tělesa.
3. Definovat těžiště tělesa.
4. Vědět, že moment síly je příčinou změny pohybového stavu tělesa z hlediska rotačního pohybu, stejně jako síla je příčinou změny pohybového stavu tělesa při posuvném pohybu.
5. Znát vztah pro moment síly a pro moment hybnosti ve vektorovém tvaru.
6. Složit síly působící na těleso v jednom bodě.
7. Umět graficky i početně složit různoběžné síly působící na těleso v různých bodech.
8. Vypočítat výslednici rovnoběžných sil stejné i opačné orientace působících v různých bodech tělesa. Umět vypočítat polohu jejího působiště.
9. Definovat dvojici sil, uvést praktické příklady, vypočítat velikost momentu dvojice sil.
10. Umět definovat podmínky rovnováhy tuhého tělesa. Rozlišit stabilní, labilní a volnou rovnováhu tělesa, uvést příklady.
11. Rozlišit kinetickou energii posuvného a otáčivého pohybu.
12. Znát vztah pro kinetickou energii posuvného pohybu tělesa.
13. Znát vztah pro kinetickou energii otáčivého pohybu tělesa.
14. Umět vysvětlit pojem moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. Vypočítat moment setrvačnosti těles.
15. Vědět, jak se vypočítá kinetická energie složeného pohybu.
16. Vysvětlit pojem pohybová rovnice rotujícího tělesa, znát základní vztah.
17. Definovat rotační impuls.
18. Umět vypočítat práci konanou při rotaci tělesa a stanovit výkon.

V předchozích kapitolách jsme se zabývali pohybem hmotného bodu (kinematika) a jeho příčinou (dynamika). Často jsme nebyli příliš důslední. Třeba jsme počítali dráhu, rychlost a zrychlení auta na silnici ale nebrali jsme v úvahu, že velký autobus není hmotným bodem vzhledem třeba ke stometrové dráze. Při řešení většiny praktických problémů je toto zjednodušení přijatelné.

Ne však vždy. Co když autobus havaruje a začne se kutálet ze svahu. Teď už těžko popíšeme jeho pohyb jednoduchou rovnicí dráhy. Autobus se jednak pohybuje vpřed, ale také se otáčí, zkrátka koná složitý pohyb. Pokud si všimnete důkladně tohoto pohybu, zjistíte, že různé části autobusu se pohybují různou rychlostí, po odlišných trajektoriích. Někdy musíme opustit zjednodušení hmotného bodu a zabývat se tělesem s nezanedbatelnými rozměry a určitého tvaru.

Každé těleso je více či méně uspořádaný soubor atomů, molekul nebo iontů. Rozměry těchto stavebních prvků tělesa jsou ovšem malé v porovnání s rozměry tělesa, takže je můžeme považovat za hmotné body. Těleso tak můžeme považovat za **soustavu hmotných bodů**.

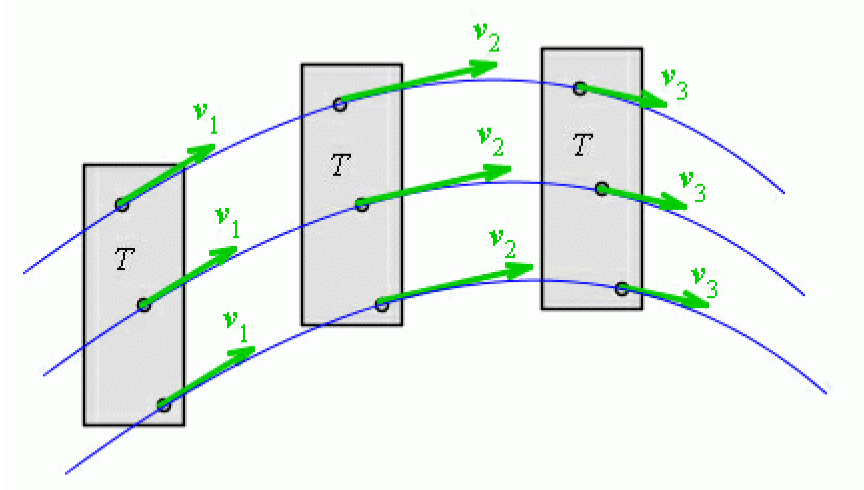
Když vyšetřujeme pohyb tělesa vycházíme z předpokladu, že síly které jednotlivé částice drží pohromadě (vnitřní síly) nemají na vzdálenost jednotlivých částic prakticky žádný vliv. Takové těleso se působením vnějších sil nedeformuje – nazýváme jej dokonale tuhým tělesem.

Tuhé těleso je ideální těleso, model tělesa. **Jeho tvar ani objem se působením sil nemění**.

1.6.1. Pohyb tuhého tělesa, těžiště tělesa

Tuhé těleso může konat dva základní druhy pohybů. Vlastně jsme si je ukázali na příkladu havarovaného autobusu. Zaprvé může konat pohyb posuvný (autobus jede po silnici). Zadruhé může konat pohyb otáčivý (převrací se). A samozřejmě může vykonávat pohyb složený z těchto dvou pohybů (kutálí se, valí se).

- **Posuvný pohyb**, někdy označovaný jako **translační,** vykonává těleso, které se po trajektorii **posunuje** jak je vidět na Obr.1.6.-1. Důležité je, že všechny body tělesa mají v určitém čase stejně velkou rychlost. Také směr okamžité rychlostí je stejný. Pozor, trajektorií může být zcela obecná křivka (nejen přímka) a má pro všechny body tělesa stejný tvar.



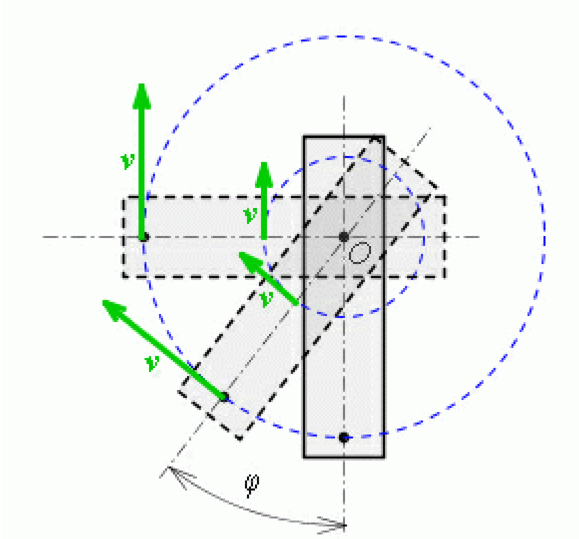
Obr.1.6.-1

Jak už bylo řečeno všechny body mají stejnou rychlost, rychlost *k*-tého bodu je stejná jako rychlost *j*-tého bodu i těžiště $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_t$. Totiž platí i pro zrychlení jednotlivých bodů – jsou stejná $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_t$

Příkladem je náš autobus. Pokud se nedostane do smyku, karoserie, cestující i řidič se pohybují stejnou rychlostí.

Důležité je, že translační pohyb homogenního tělesa můžeme nahradit pohybem jeho těžiště ve kterém je soustředěna hmotnost tělesa a platí všechny dosud uvedené zákony pro pohyb hmotného bodu.

- **Otáčivý pohyb**, neboli **rotační,** koná těleso při otáčení **kolem pevné osy otáčení** *o*. Při tomto pohybu všechny body tělesa opisují kružnice se středem na ose otáčení jak je vidět na Obr.1.6.-2. Z tohoto obrázku vidíte, že obvodové rychlosti různých bodů tělesa závisí na vzdálenosti od osy otáčení (vztah z kinematiky $v = \omega r$). Přece však všechny body tělesa mají něco společného, a to je úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ε. Ve stejném čase opíší také



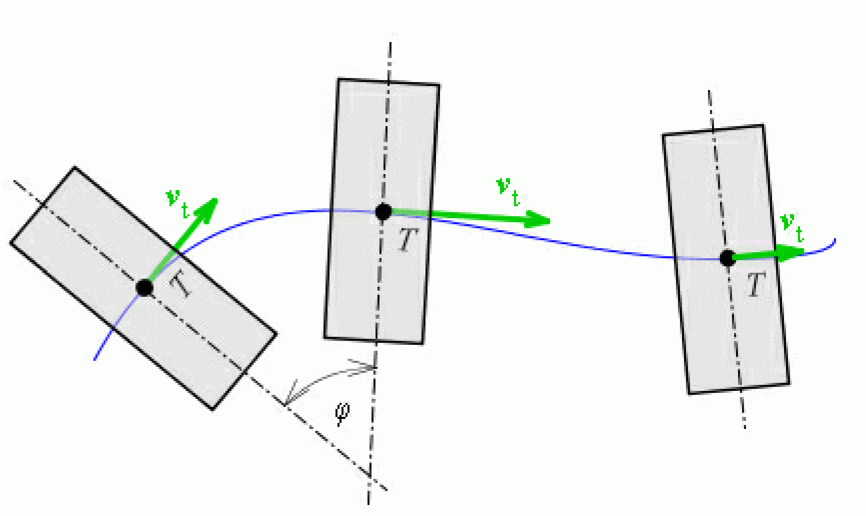
stejnou úhlovou dráhu φ. Obr.1.6.-2

Zapíšeme-li si tento poznatek pro *j*-tý a *k*-tý bod dostaneme vztahy: $_k = {}_j =$, respektive $_k = {}_j =$.

A zase jako příklad autobus. Rotačním pohybem se pohybují jeho kola je-li na zvedáku, některé části jeho motoru atp.

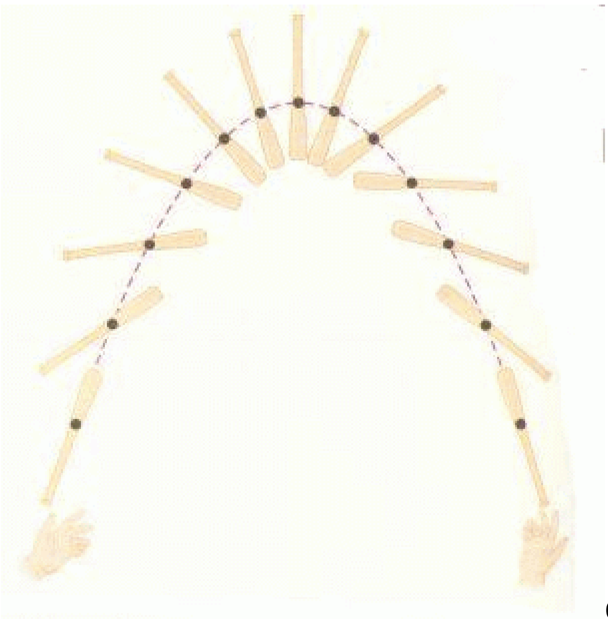
Teď ale můžete namítnout, že kola autobusu se za jízdy jednak otáčejí, ale spolu s celým autobusem se pohybují vpřed. Máte pravdu, kola za jízdy vykonávají složený pohyb.

- **Složený pohyb** je pohyb složený z posuvného a rotačního pohybu. Složený pohyb je znázorněn na Obr.1.6.-3. Těleso se pohybuje posuvným pohybem rychlostí ***v*** a navíc se těleso otáčí úhlovou rychlostí ω kolem okamžité osy otáčení (její poloha se v čase mění). U tohoto pohybu nenajdeme žádnou veličinu, která by pro všechny body tělesa nabývala stejných



hodnot. Obr.1.6.-3

Nenajdeme sice žádnou společnou fyzikální veličinu, ale můžeme si označit jeden význačný bod. Podívejte se na obrázek Obr.1.6.-4. Na obrázku jsou znázorněny jednotlivé fáze pohybu cvičebního kužele (baseballové pálky chcete-li). Vidíte, že černý bod se pohybuje po jednoduché trajektorii. Trajektorie ostatních bodů kužele jsou značně komplikovanější. Černý bod se nazývá těžiště tělesa. **Pohyb celého tělesa** (kužele**) si můžeme nahradit pohybem těžiště *T*.** Musíme si ale do těžiště soustředit veškerou hmotnost tělesa.

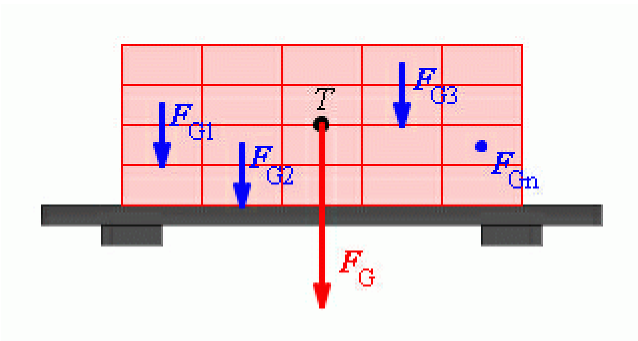


Obr.1.6.-4

Těžiště tělesa je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmotnost tělesa.

Těžiště se častěji definuje poněkud jinak. Představte si , že tuhé těleso je složené z velkého počtu hmotných bodů. Například přepravní paleta s cihlami, nebo jděte ve své představivosti dále. Každé těleso je složeno z atomů či molekul což jsou skutečně pro nás hmotné body. Ale vraťme se raději k cihlám.

Na všechny hmotné body tělesa (cihly) působí v tíhovém poli Země tíhové síly $\boldsymbol{F}_{G1}$, $\boldsymbol{F}_{G2}$, $\boldsymbol{F}_{G3}$,… $\boldsymbol{F}_{Gn}$ viz Obr.1.6.-5. Tyto síly jsou rovnoběžné a mají stejný směr. Výslednicí všech těchto tíhových sil působících na jednotlivé části tělesa je tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, kterou působí Země na celé těleso (naloženou paletu). Působiště této síly je v těžišti tělesa.



Obr.1.6.-5

Těžiště tělesa je působiště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tvořící dané těleso.

Jak je to nyní s rychlostmi jednotlivých bodů. Vezměme si náš *j*-tý bod. Jeho rychlost je dána vektorovým součtem translační rychlosti těžiště $\boldsymbol{v}_t$ a okamžité obvodové rychlosti $\boldsymbol{v}_o$.

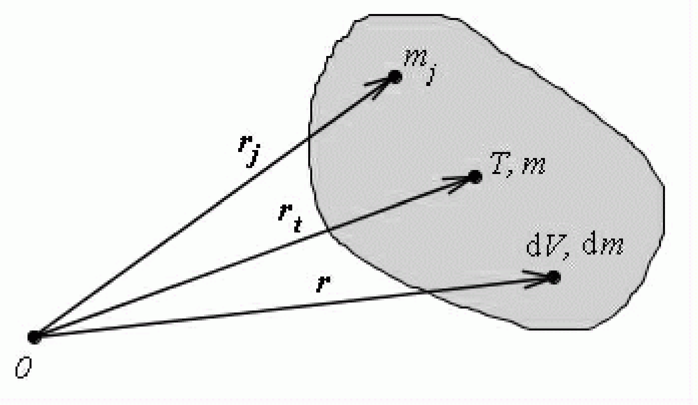
$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{\omega} \quad \boldsymbol{r}_j \qquad 1.6.-1$$

V případně vyšetřování rotačního pohybu tělesa musíme postupovat jak je ukázáno v následujících kapitolách.

Podívejme se na pojem těžiště tělesa podrobněji – určeme si jak stanovíme jeho polohu vůči zvolenému bodu O.

Vyjdeme z představy tělesa jako soustavy hmotných bodů o hmotnostech m_j a hybnostech $m_j\boldsymbol{v}_j$. Polohu jednotlivých hmotných bodů si určíme pomocí jejich polohových vektorů $\boldsymbol{r}_j$ jak je znázorněno na Obr. 1.6.-6. Jak už jsme si řekli výše je těleso hmotný bod s hmotností $m = \sum m_j$ a celkovou hybností $\boldsymbol{p} = \sum m_j \boldsymbol{v}_j$. Hybnost celého tělesa je dána součtem hybností jeho jednotlivých hmotných bodů. Soustředíme-li celkovou hmotnost tělesa do těžiště, pak jeho hybnost můžeme vyjádřit jako součin celkové hmotnosti a rychlosti těžiště $\boldsymbol{v}_t$.

Musí tedy platit:



Obr. 1.6.-6

$$m\boldsymbol{v}_t = \sum m_j \boldsymbol{v}_j \;.$$

Rychlosti si v tomto vztahu vyjádříme jako první časovou derivaci $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ a po integraci získaného vztahu přes čas dostaneme

$$m\,\boldsymbol{r}_t = \sum m_j \boldsymbol{r}_j \,,$$

kde symbolem $\boldsymbol{r}_t$ jsme si označili polohový vektor těžiště. Z posledního vztahu si vyjádříme tento polohový vektor

$$\boldsymbol{r}_t = \frac{1}{m}\sum m_j \boldsymbol{r}_j \qquad 1.6.\text{-}2$$

Vztah 1.6.-2 je vhodný pro určení polohy těžiště v případě soustavy hmotných bodů. Ale my se zabýváme tělesem, u kterého předpokládáme spojitě rozloženou hmotnost. Celé těleso si tedy rozložíme na malé objemové element $\mathrm{d}V$, které považujeme za hmotné body hmotnosti $\mathrm{d}m$ jejichž poloha je určena polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. V tomto případě nahradíme sumaci ve vztahu 1.6.-2 integrálem a dostaneme vztah

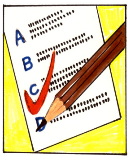
$$\boldsymbol{r}_t = \frac{1}{m}\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m \,. \qquad 1.6.\text{-}3$$

Pro praktický výpočet polohy těžiště tělesa je výhodné určit si souřadnice těžiště pomocí jeho složek:

$$x_t = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m\,, \qquad y_t = \frac{1}{m}\int y\,\mathrm{d}m\,, \qquad z_t = \frac{1}{m}\int z\,\mathrm{d}m \qquad 1.6.\text{-}4$$

V případě homogenního tělesa je těžiště tělesa totožné s jeho geometrickým středem.

TO 1.6.-1 *Jaké je zrychlení **a*** různých bodů tělesa pohybujícího se posuvným pohybem?



TO 1.6.-2 U rotačního pohybu tělesa se některé body nepohybují. *Které*?

TO 1.6.-3 Z následujícího soupisu pohybů *vyberte posuvné pohyby*:

a) pohyb pístu v motoru auta,

b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,

c) otevírání okna,

d) pohyb kola jedoucího automobilu

e) pohyb automobilu v zatáčce

f) pohyb Země kolem Slunce

TO 1.6.-4 Z následujícího soupisu pohybů *vyberte otáčivé pohyby*:

a) pohyb pístu v motoru auta,

b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,

c) otevírání okna,

d) pohyb kola jedoucího automobilu

e) pohyb automobilu v zatáčce

f) pohyb Země kolem Slunce

TO 1.6.-5 Z následujícího soupisu pohybů *vyberte složené pohyby*:

a) pohyb pístu v motoru auta,

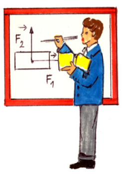
b) pohyb řezného kotouče cirkulárky,

c) otevírání okna,

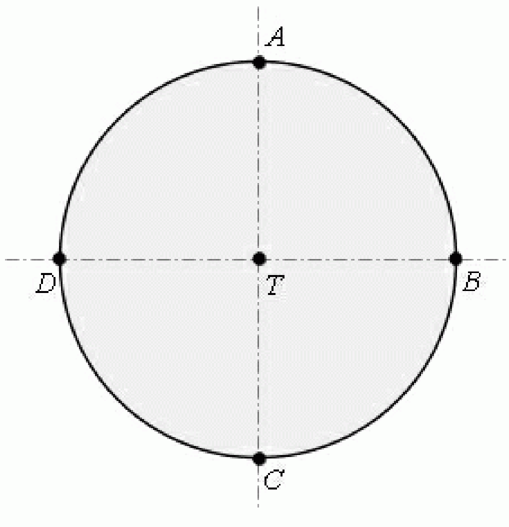
d) pohyb kola jedoucího automobilu

e) pohyb automobilu v zatáčce

f) pohyb Země kolem Slunce



Válec poloměru R se valí po vodorovné rovině . Jeho těžiště se pohybuje dopředu rychlostí v_T. Úhlová rychlost rotace válce je ω. *Jaké jsou rychlosti obvodových bodů A, B, C* a *D* v Obr.1.6.-7? Řešte pouze graficky.



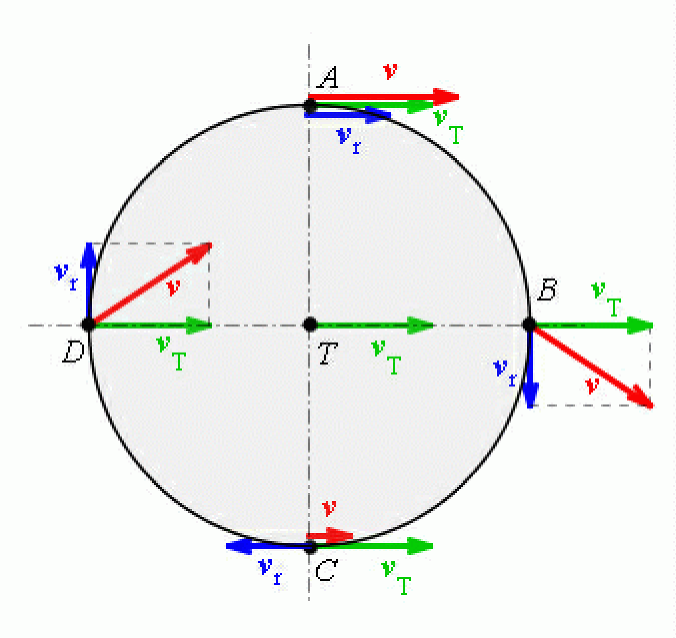
Obr.1.6.-7

Zkuste si nejdříve vyřešit úlohu sami. Vycházejte z toho, že skládáte pohyb posuvný a pohyb rotační kolem osy procházející těžištěm.

Teď si ověřte váš výsledek.

Valení je složený pohyb. Také rychlost jednotlivých bodů se bude skládat. Translační pohyb přispěje rychlostí, která je rovna rychlosti těžiště $\boldsymbol{v}_T$. Druhou složkou výsledné rychlostí $\boldsymbol{v}$ bude rychlost otáčivého pohybu $v_r = \omega R$. Obě složky musíme složit **vektorově**. Výsledná rychlost bude obecně dána vztahem $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_T + \boldsymbol{v}_r$. A teď bude záležet ve kterém bodě budeme hledat výslednou rychlost. V každém z bodů *A*, *B*, *C* a *D* bude jiný směr rychlosti otáčivého pohybu.

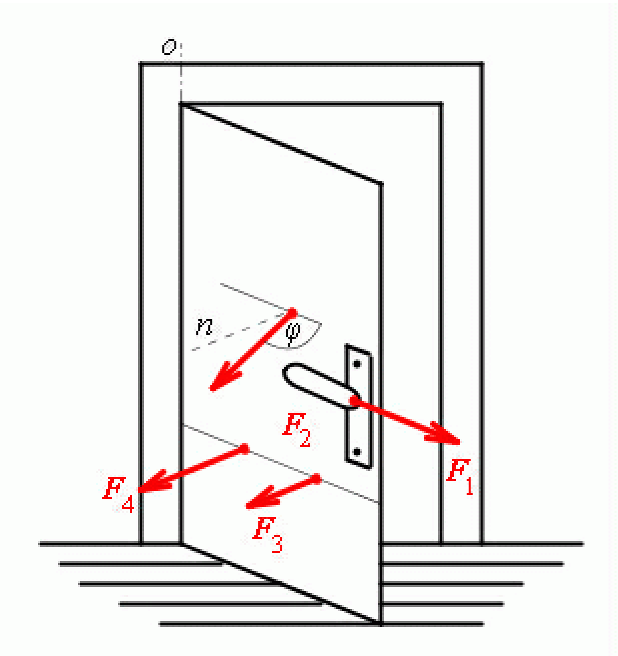
Zkuste si zakreslit složky výsledné rychlosti ve všech bodech sami. Pak si zkontrolujte svůj výsledek na Obr.1.6.-8.



Obr.1.6-8

1.6.2. Otáčivé účinky síly, moment síly, moment hybnosti

Snad každý učitel začíná výklad momentu síly příkladem otevírání dveří. Tahá za kliku ve směru ležícím v rovině dveří (F_1 na Obr.1.6.-9) a demonstruje, že takto sebe větší silou dveřmi nepohne. Postupně působí svou silou F_2 ve směru více a více odkloněném od roviny dveří, až nakonec ukazuje ideální působení ve směru kolmém na rovinu dveří F_3. Při pokračování pokusu se pak přibližuje s působištěm síly k ose otáčení (ta prochází panty dveří). Předvádí, že čím blíže je síla F_4 ose otáčení, tím musí vynaložit větší sílu k dosažení stejných otáčivých účinků. A pokus zpravidla končí působení síly v ose otáčení – opět dveřmi nepohne.



Obr.1.6.-9

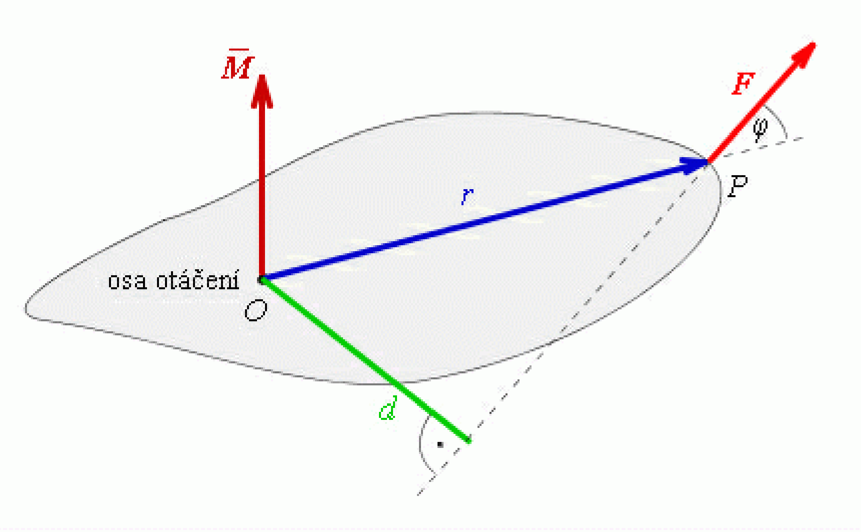
Shrneme-li tento pokus pak dojdeme k závěru:

Otáčivý účinek síly působící na těleso závisí na velikosti síly, na jejím směru a orientaci a na poloze jejího působiště.

To, co jsme si vyslovili si nyní zapíšeme pomocí rovnice. Otáčivý účinek síly si vyjadřujeme veličinou **moment síly** *M* **vzhledem k ose otáčení** *o*. Je to součin působící síly a **ramena síly** *d*.

$M = F\,d$ 1.6.-5

Rameno síly je kolmá vzdálenost vektorové přímky *p* síly od osy otáčení. To zní dosti komplikovaně, raději se podívejte na vysvětlující obrázek Obr.1.6.-10.



Obr.1.6.-10

Pokud budeme působit na dveře silou v jiném směru než kolmém bude se vám těžko hledat a odměřovat rameno síly. Proto je výhodnější vyjadřovat moment síly pomocí polohového vektoru *r* působiště síly a úhlu φ. I tyto veličiny jsou na obrázku Obr.1.6.-10.

Zkráceně můžeme moment síly vyjádřit jako „míru otáčivého účinku síly“ na těleso.

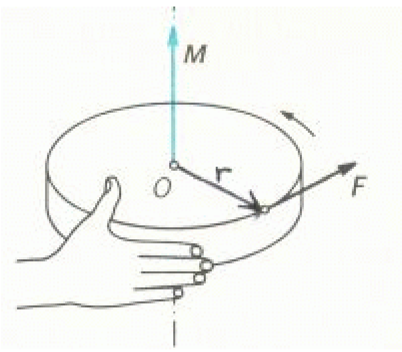
$M = F\,r \sin\varphi$. 1.6.-6

Z tohoto vztahu vyplývá, že jednotkou momentu síly je newtonmetr (N.m).

Ale již z obrázku je vidět, že se jedná o součin dvou vektorů a také moment síly je vektor. Výraz sin*φ* napovídá, že půjde o vektorový součin. Můžeme tedy napsat obecnou rovnici pro **moment síly** jako vektor:

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. [kg.m^2.s^{-2}] 1.6.-7

Vektor ***M*** bude kolmý na oba vektory ***r*** a ***F*** a jeho směr bude dán pravidlem pravotočivého šroubu. Otáčíme-li šroubem proti směru hodinových ručiček, šroub se zavrtává směrem nahoru jak je vidět na Obr.1.6.-11.



Obr.1.6.-11

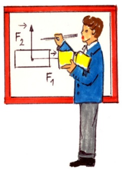
Na tuhé těleso otáčivé kolem pevné (nehybné) osy může působit více sil s různými otáčivými účinky. Je zřejmé, že momenty těchto sil se nějakým způsobem sčítají. Ale jakým? Algebraickým nebo vektorovým? Protože moment síly je vektor, musíme také působící momenty sil sčítat vektorově.

Výsledný moment sil současně působících na těleso **je roven vektorovému součtu momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose otáčení**.

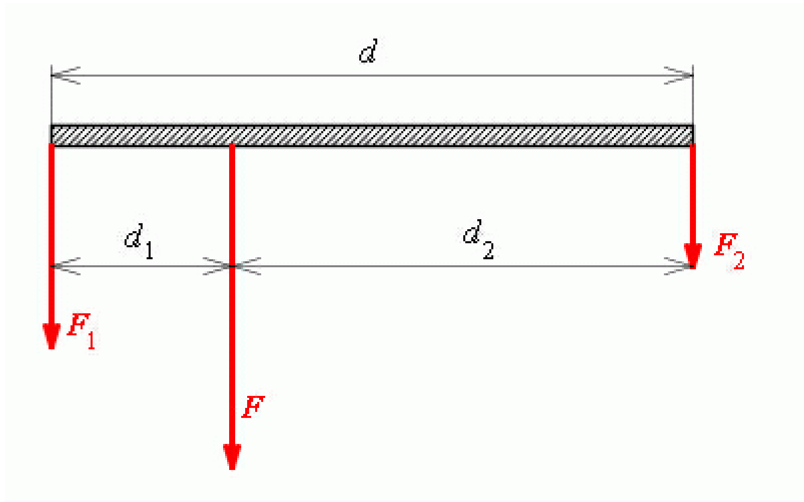
$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \qquad 1.6.\text{-}8$$

Prakticky mohou momenty jednotlivých sil působit ve směru se stejnou nebo opačnou orientací. Může dojít k situaci, že se otáčivé účinky jednotlivých sil navzájem vyruší. To vyjadřuje tzv. **momentová věta.**

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso se navzájem ruší, je-li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k dané ose roven nule.



Na koncích tyče (Obr.1.6.-12) délky 80 cm působí kolmo k tyči dvě rovnoběžné síly o velikostech 50 N a 30 N. *Ve kterém místě musíte tyč podepřít, aby se neotáčela? Jak velkou tlakovou silou působí tyč na podpěru?* Hmotnost tyče neuvažujte.



Obr.1.6.-12

Označíme si veličiny symboly: F_1 = 50 N, F_2 = 30 N, d = 0,8 m, F = ?, d_2 = ?

Velikost tlakové síly působící na podpěru tyče je rovna výslednici daných rovnoběžných sil:

$F = F_1 + F_2 = 50 + 30 = \underline{80\ \text{N}}$.

Aby se tyč neotáčela, musí být výsledný moment obou sil nulový:

$F_1 d_1 = F_2 d_2$.

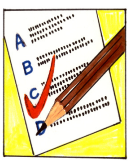
Ale my známe délku tyč, bude výhodnější dosadit za $d_2 = d - d_1$, tedy:

$F_1 d_1 = F_2 (d - d_1)$,

a odtud hledaná vzdálenost:

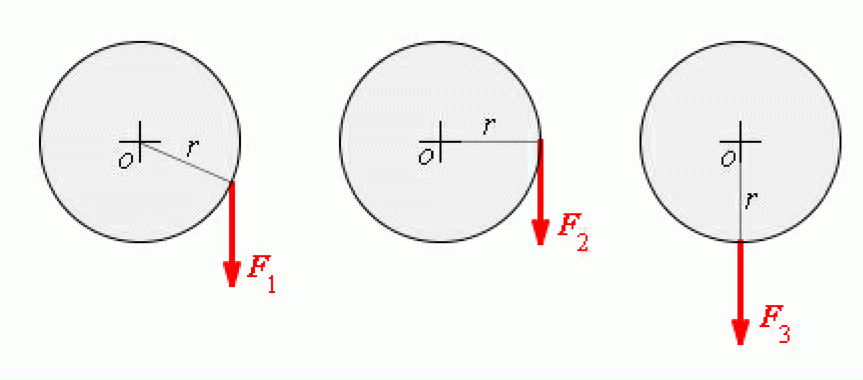
$$d_1 = \frac{F_2\, d}{F_1 + F_2} = \frac{30.0{,}8}{80} = \underline{0{,}3\ \text{m}}.$$

Tyč musíme podepřít ve vzdálenosti 30 cm od působiště větší síly. Tyč působí na podpěru tlakovou silou 80 N.



TO 1.6.-6 . *Napište jednotku momentu síly v základních jednotkách soustavy SI.*

TO 1.6.-7 Kotouč o poloměru *r* je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem. Na kotouč působí síly $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$, které mají stejný směr i velikost (Obr.1.6.-13) . *Která síla má na kotouč největší otáčivý účinek?*



Obr.1.6.-13

a) $\boldsymbol{F}_1$ b) $\boldsymbol{F}_2$ c) $\boldsymbol{F}_3$ d) všechny stejný

TO 1.6.-8 Momentem síly ***F*** vzhledem k ose *O nazýváme veličinu*

a) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

b) $M = \boldsymbol{r}.\boldsymbol{F}$

c) $M = r.F$

d) $M = r \times F$

TO 1.6.-9 *Moment síly je*

a) vektor, kolmý na rovinu určenou vektory ***r*** a ***F***

b) skalár

c) vektor, ležící v rovině určené vektory ***r*** a ***F***

TO 1.6.-10 *Moment síly* při dané velikosti vektorů **r** a **F** je

a) maximální, jsou-li oba vektory na sebe kolmé

b) maximální, leží-li oba vektory na jedné vektorové přímce

c) nezávislý na úhlu, který vektory ***r*** a ***F*** svírají

d) vektor, jehož velikost je určena vztahem $M = F\, r \cos\varphi$

e) vektor, jehož velikost je určena vztahem $M = F\, r \sin\varphi$

TO 1.6.-11 *Rozměr jednotky* momentu síly je stejný jako rozměr jednotky

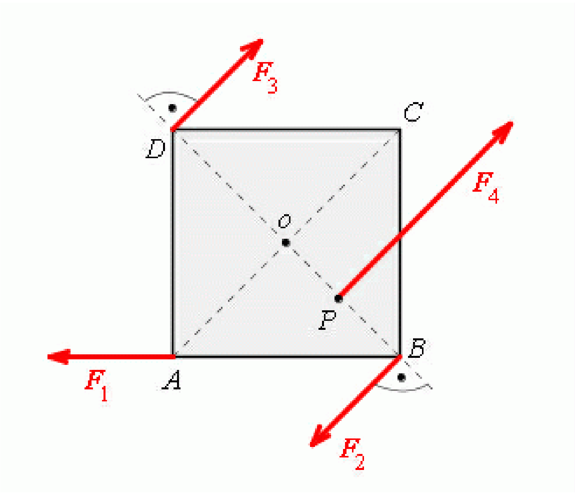
a) práce

b) momentu hybnosti

c) výkonu

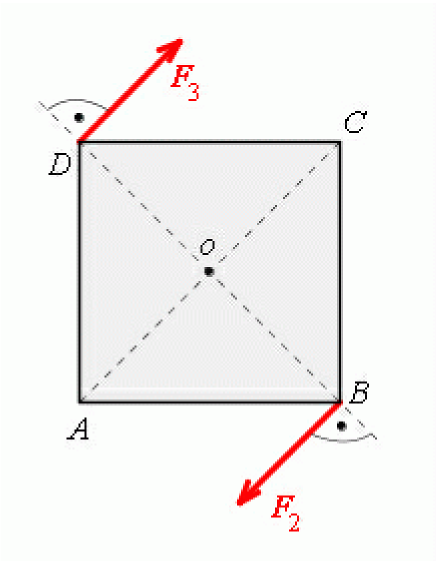
d) impulsu síly

U 1.6.-1 Čtvercová deska o straně $a = 2$ m je otáčivá kolem pevné osy *o* (Obr.1.6.-14). Ve vrcholech *A,B,D* čtverce působí síly $F_1 = F_2 = F_3 = 10$ N. V bodě *P*, který je středem úsečky *OB*, je působiště síly $F_4 = 20$ N. *Jaké jsou velikosti momentů sil* F_1 až F_4 *vzhledem k dané ose?*



Obr.1.6.-14

U 1.6.-2 Čtvercová deska o straně a = 2 m je otáčivá kolem pevné osy o (Obr.1.6.-15). Ve vrcholech B,D čtverce působí síly $F_2 = F_3$ = 10 N. *Jaká je velikost momentu dvojice sil F_2, F_3?*



Obr.1.6.-15

Podobně jako jsme definovali vztahem 1.6.-7 moment síly $\boldsymbol{M}$, obdobně můžeme definovat i **moment hybnosti *b*** vektorovým součinem polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ a vektoru hybnosti $\boldsymbol{p}$:

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = J\,\boldsymbol{\omega}$. [kg.m^2.s^{-1}] 1.6.-9

Výraz $J\boldsymbol{\omega}$ pro moment hybnosti je analogií s výrazem pro hybnost $m\boldsymbol{v}$ translačního pohybu. Symbolem J je označen moment setrvačnosti, veličina charakterizující setrvačné vlastnosti tělesa u rotačního pohybu. Blíže se s ním seznámíte v kapitole 1.6.6.

U translačního pohybu jsme si vyjadřovali souvislost mezi působící silou $\boldsymbol{F}$ a hybností $\boldsymbol{p}$ vztahem 1.3.-2 $\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ - druhým Newtonovým zákonem. Analogicky existuje stejná závislost mezi momentem síly $\boldsymbol{M}$ a momentem hybnosti $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} \qquad 1.6.\text{-}10$$

1.6.3. Skládání sil působících na těleso

Skládání a rozkládání sil jsme již probírali v úvodu celé mechaniky v kapitole o sčítání vektorů. Nezaškodí, když si pravidla zopakujete. Tyto znalosti si nyní rozšíříme, síly nám totiž nepůsobí jen na jeden hmotný bod, ale na rozměrné tuhé těleso.

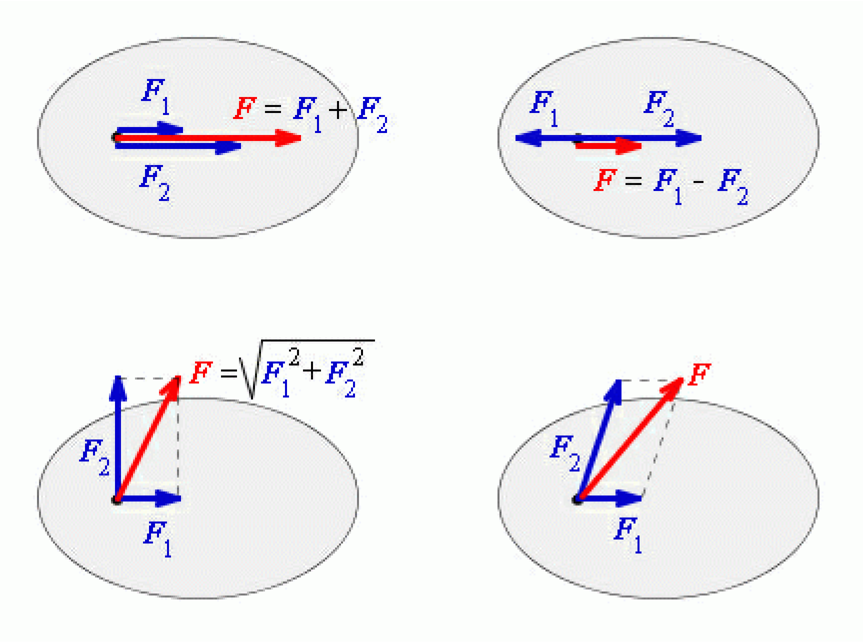
Problematika se nám totiž u tělesa trochu zkomplikuje. Příklad: potřebuje v bytě posunout úzkou vysokou knihovnu. Tlačíme-li na ni ve spodní části, knihovnu posouváme. Zatlačíme-li však nahoře, můžeme ji převrhnout. V prvém případě knihovna koná posuvný pohyb, v druhém pohyb rotační. Záleží tedy na místě působiště síly. Samozřejmě, je-li knihovna těžká, musí nás být na její přemístění více, působíme více silami, které skládáme.

Skládat síly působící na těleso znamená nahradit je silou jedinou, která má na těleso stejný pohybový účinek.

A teď k působišti skládaných sil. Mohou nastat dvě situace. Buď síly působí v jednom bodě tělesa, nebo v bodech různých.

- ***Síly působící v jednom bodě tělesa.***

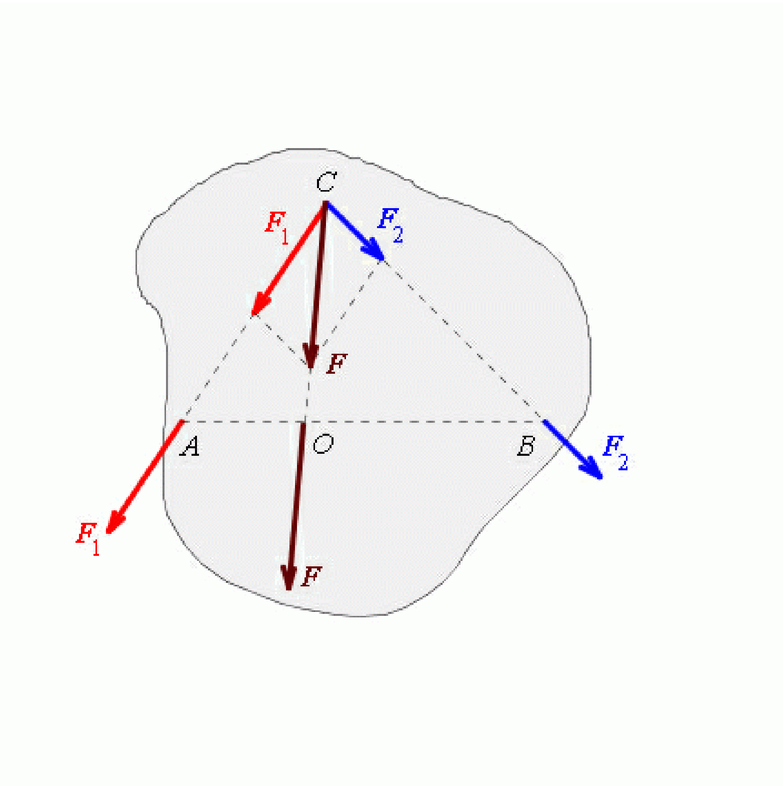
Tyto síly skládáme stejným způsobem, se kterým jste se již seznámili v úvodu. Různé možné situace jsou na obrázku Obr.1.6.-16. Na obrázku jsou zakresleny dvě působící síly. Na situaci se nic nezmění, je-li působících sil více. Síly skládáme postupně po dvojicích.



Obr.1.6.-16

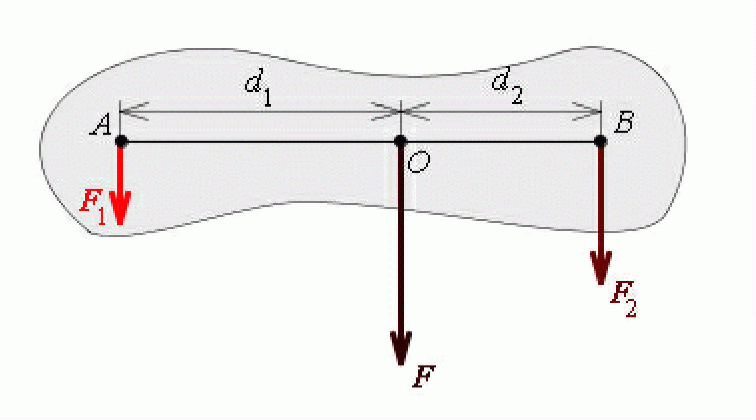
- ***Síly působí v různých bodech tělesa.***

Nejjednodušeji se skládají dvě působící **různoběžné síly** $\boldsymbol{F_1}$ a $\boldsymbol{F_2}$. Jak dostaneme jejich výslednici $\boldsymbol{F}$ je znázorněno na Obr.1.6.-17. Každou z těchto sil posuneme po přímkách, na kterých leží do společného působiště *O*. Tam je složíme podle pravidla o vektorovém součtu, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$. Působiště výsledné síly můžeme libovolně posunou po přímce *p*. Nejlépe je výslednici posunout do působiště *P*, do bodu, který je průsečíkem vektorových přímek sil $\boldsymbol{F_1}$ a $\boldsymbol{F_2}$. Pak výslednice $\boldsymbol{F}$ v tomto bodě má stejný pohybový účinek na těleso jako složky $\boldsymbol{F_1}$ a $\boldsymbol{F_2}$ působící v bodech *A* a *B*.



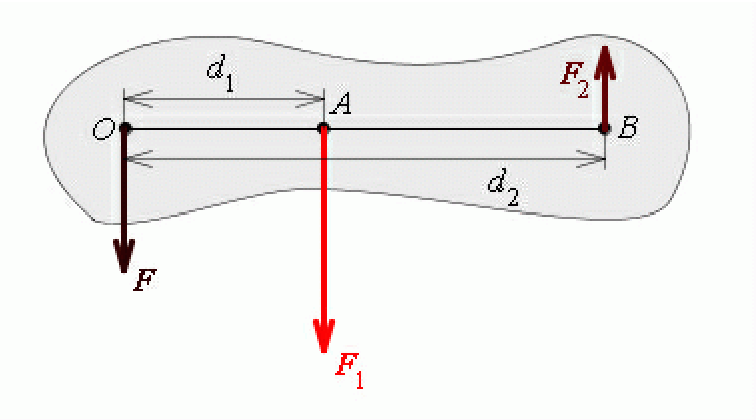
Obr.1.6.-17

Když působí na těleso dvě **rovnoběžné síly $\boldsymbol{F_1}$** a **$\boldsymbol{F_2}$ stejné orientace** pak jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ má stejnou orientaci jako působící síly. Její velikost je rovna součtu velikostí obou sil $F = F_1 + F_2$. Pro polohu působiště výslednice platí $F_1\, d_1 = F_2\, d_2$ (momenty obou sil jsou stejné). Situace je znázorněna na Obr.1.6.-18.



Obr.1.6.-18

A ještě poslední situace. Na těleso teď působí **rovnoběžné sily $\boldsymbol{F_1}$** a **$\boldsymbol{F_2}$** , ale **opačného směru** (Obr.1.6.-19). Výslednice $\boldsymbol{F}$ má zase stejný směr jako působící síly. Její velikost je rovna rozdílu velikostí obou sil $F = F_1 - F_2$. Pro polohu působiště výslednice platí stejně jako v předešlém případě $F_1\, d_1 = F_2\, d_2$.

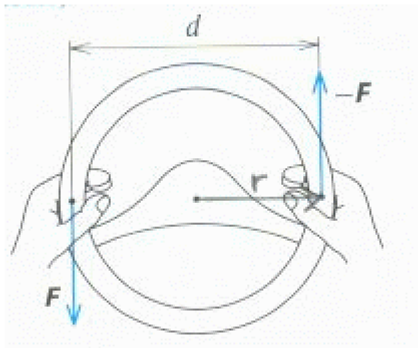


Obr.1.6.-19

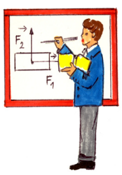
- ***Dvojice sil.***

Zvláštním případem dvou rovnoběžných sil opačné orientace je dvojice sil. Jsou to například síly rukou řidiče působící na volant (Obr.1.6.-20). Výsledkem působení těchto sil je otáčení se tělesa, tedy volantu.

Dvojici sil tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F'}$ opačné orientace, které působí ve dvou různých bodech tělesa otáčivého kolem pevné osy.



Obr.1.6.-20



Určete výsledný moment dvojice sil působících na volant. Řidič působí každou rukou silou 50 N, volant má průměr 40 cm.

Protože obě síly způsobují otáčení volantu ve stejném směru, bude výsledný moment dvojice sil dán součtem momentů obou sil.

$D = M_1 + M_2 = F\,r + F'\,r.$

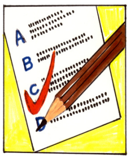
Protože velikosti obou sil jsou stejné, můžeme napsat pro **velikost momentu dvojice sil** vztah

$D = F\,d$,

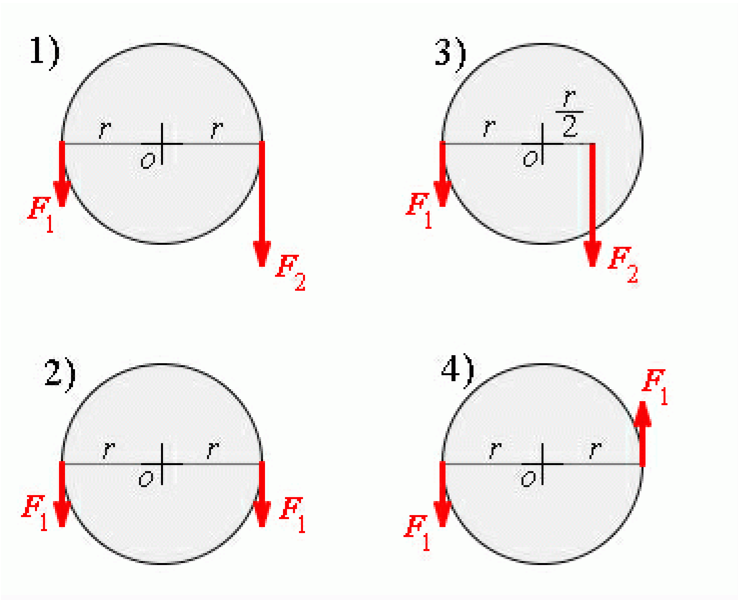
kde d je kolmá vzdálenost vektorových přímek obou sil označovaná jako **rameno dvojice sil.**

Dosadíme-li numerické hodnoty dostaneme:

D = 50.0,4 = 20 N.m.



TO 1.6.-12 Na kotouč o poloměru r, který je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem, působí dvě rovnoběžné síly. Čtyři různé případy působení těchto sil jsou znázorněny na obrázku Obr.1.6.-21. Síly $\boldsymbol{F_1}'$ a $\boldsymbol{F_1}$ mají stejnou velikost F, síla $\boldsymbol{F_2}$ má velikost $2F$. *Ve kterých případech se otáčivé účinky sil navzájem ruší?*



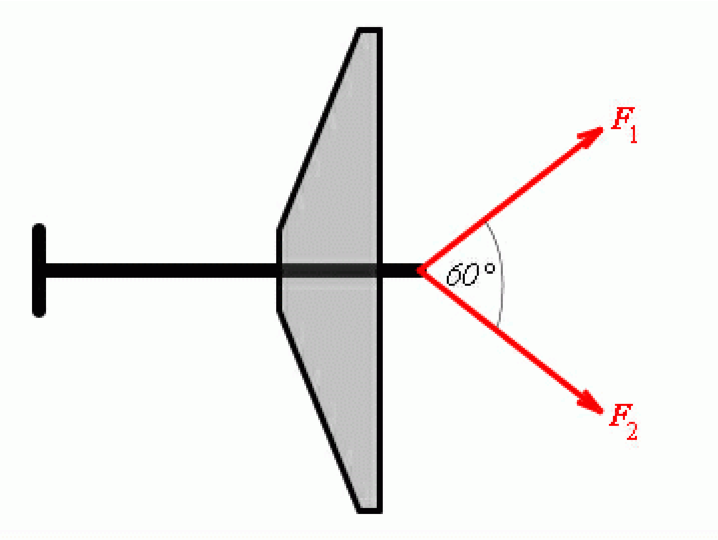
Obr.1.6.-21

a) v žádném případě b) jen v případě 2 c) v případech 2 a 3 d) jen v případě 4

TO 1.6.-13 Na kotouč o poloměru r, který je otáčivý kolem nehybné osy jdoucí jeho středem, působí Obr.1.6.-21. Síly $\boldsymbol{F_1}'$ a $\boldsymbol{F_1}$ mají stejnou velikost F, síla $\boldsymbol{F_2}$ má velikost $2F$. *Ve kterých případech tvoří síly dvojici sil?*

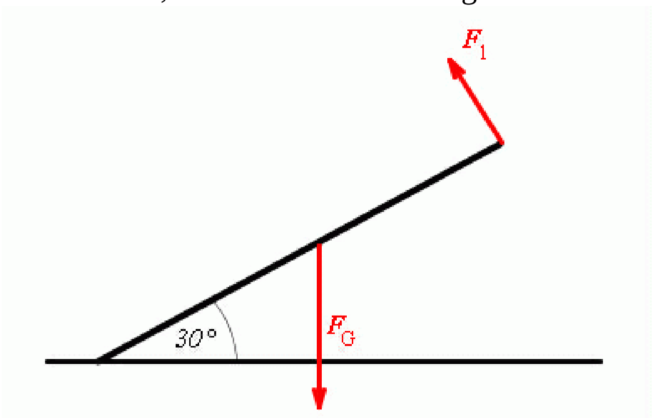
a) ve všech případech b) jen v případě 2 c) v případech 2 a 4 d) jen v případě 4

U 1.6.-3 *Jak velkou silou je tažen větroň* na Obr.1.6.-22, jestliže síly napínající dvě lana svírají úhel 60^{o} a každá z nich má velikost 1000 N?



Obr.1.6.-22

U 1.6.-4 Dělník zvedá za jeden konec trám o délce 4,0 m a hmotnosti 40 kg. Při určité poloze, jak je vidět na obrázku Obr.1.6.-23, svírá trám s vodorovným směrem úhel 30^{o}. *Určete velikost síly F_1, kterou působí dělník na trám v dané poloze.* Síla $\boldsymbol{F}_1$ je kolmá k trámu (g = 9,8 m.s^{-2}).



Obr.1.6.-23

1.6.4. Rovnováha tuhého tělesa

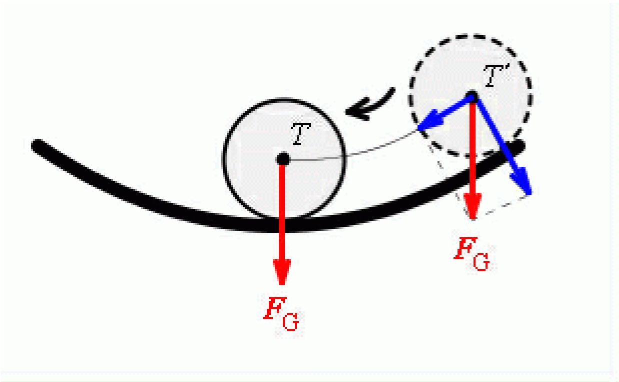
Řekneme-li, že **těleso je v rovnovážné poloze** (v rovnováze), znamená to, že **výslednice sil i výsledný moment sil na něj působících je nulový a těleso je v klidu**. Budou tedy platit vztahy

$$\sum \boldsymbol{F} = 0, \quad \sum \boldsymbol{M} = 0. \qquad 1.6.\text{-}11$$

Uveďme si příklady. V jedné televizní reklamě tlačí dvě party pivařů auto. Jedna skupina zepředu a druhá zezadu. Pokud se auto nepohne, znamená to, že výslednice sil jedné skupiny je stejně velká jako výsledná síla vyvinutá druhou skupinou. Říkáme, že auto je v rovnovážné poloze.

Jiný příklad, tentokrát na výsledný moment síly. Chceme se dostat do pootevřených dveří. Působíme na dveře momentem své síly. Člověk na druhé straně dveří nám brání vstoupit. Pokud je moment jeho síly stejně velký jako je můj, dveře se nepohnou, jsou v rovnováze.

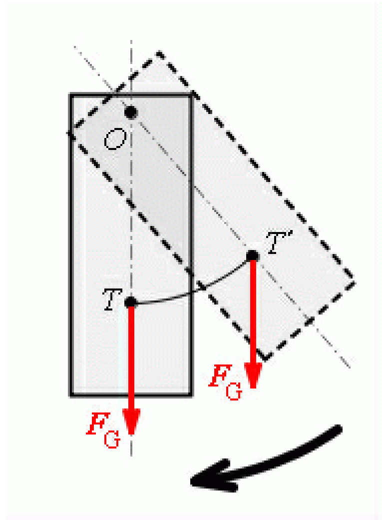
Vraťme se ještě k autu. Auto stojí v dolíku, je v klidu, je v rovnovážné poloze. Zatlačíme-li na něj, posuneme jej nahoru. Když přestaneme působit silou, auto se vrátí do původní polohy. Situace je vidět na obrázku Obr.1.6.-24, pro jednoduchost je auto nahrazeno kuličkou. Tuto rovnovážnou polohu označujeme jako stálou nebo stabilní rovnovážnou polohu.



Obr.1.6.-24

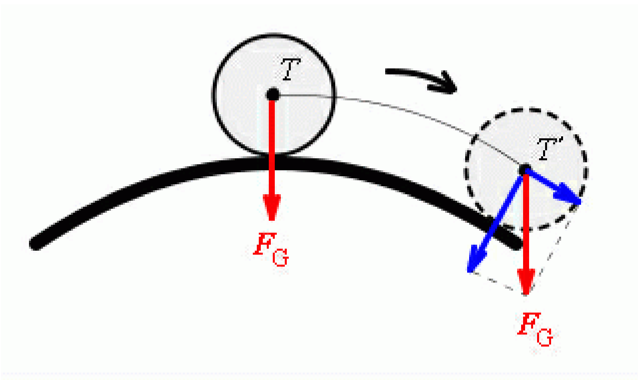
Stabilní rovnovážnou polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy opět do ní vrací.

Stabilní rovnovážnou polohu má také těleso, které je otáčivé kolem osy **umístěné nad** svým **těžištěm**. Vychýlíme-li toto těleso působením momentu síly, těleso se vrací zpátky do stabilní polohy. Situaci máme znázorněnu na obrázku Obr.1.6.-25.



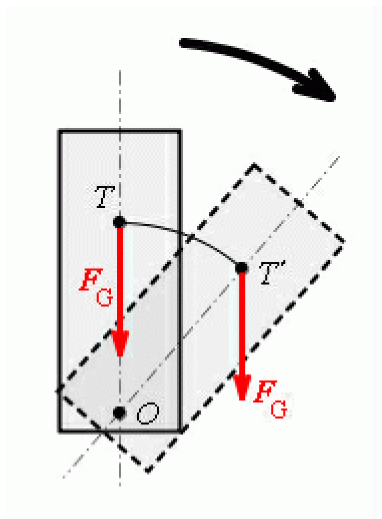
Obr.1.6.-25

Naopak tlačíme-li auto stojící na vrcholu kopce, po vychýlení z rovnovážné polohy se auto již pohybuje „samo“. V tomto případě se auto nevrací do výchozí rovnovážné polohy. Na obrázku Obr.1.6.-26 je zase znázorněna modelová situace kuličky.



Obr.1.6.-26

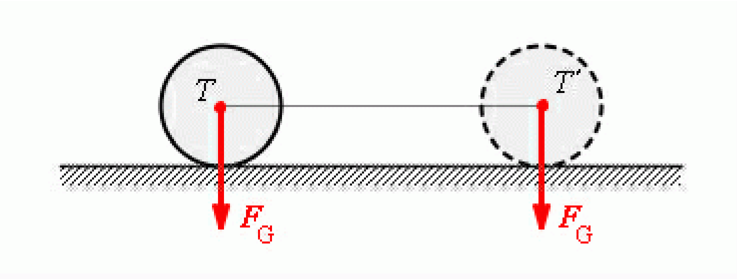
Podobně je to také s tělesem, které se může otáčet kolem osy umístěné pod svým těžištěm jako je vidět na obrázku Obr.1.6.-27. V obou posledních dvou případech těleso zaujímá tzv. vratkou neboli labilní polohu.



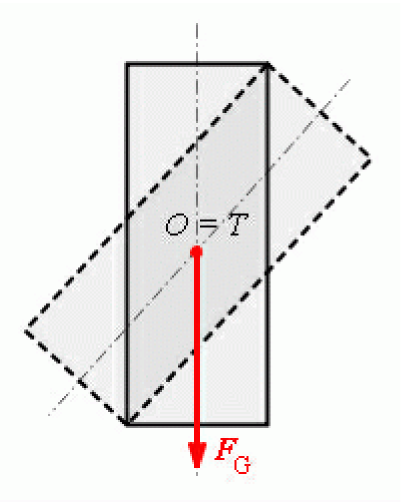
Obr.1.6.-27

Labilní rovnovážnou polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy do ní nevrací. Těleso po vychýlení přechází do nové stabilní polohy.

A konečně může mít těleso rovnovážnou polohu, kterou označujeme jako volnou neboli indiferentní rovnovážnou polohu. Tu má naše kulička na vodorovné rovině na Obr.1.6.-28 nebo kvádr, jehož osa otáčení prochází jeho těžištěm jako na Obr.1.6.-29 .

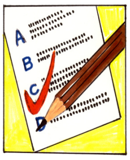


Obr.1.6.-28



Obr.1.6.-29

Volnou rovnovážnou polohu má těleso, které po vychýlení zůstává v jakékoliv nové opět stabilní poloze.



TO 1.6.-14 *Jak daleko od osy otáčení houpačky musí sedět* otec hmotnosti 90 kg, chce-li se houpat se synem „vážícím“ 15 kg? Dítě sedí ve vzdálenosti 3 m od osy otáčení houpačky.

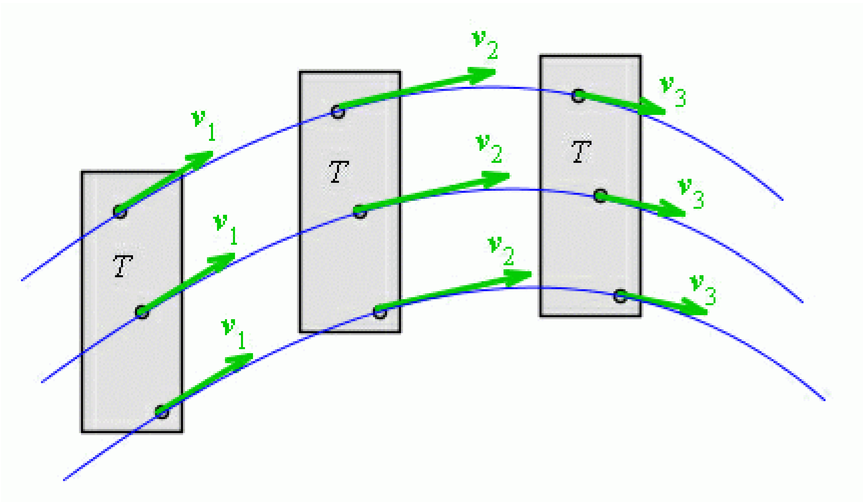
TO 1.6.-15 *V jaké vzdálenosti* musí dělník zvedající bednu o hmotnosti 200 kg podložit páku? Páka má délku 2 m. Dělník je schopen zvednout přímo těleso hmotnosti 50 kg.

1.6.5. Kinetická energie tuhého tělesa

Pro kinetickou energii hmotného budu hmotnosti m pohybujícího se rychlostí v jsme si uváděli vztah $E_k = ½\ m\ v^2$. S kinetickou energií tuhého tělesa je to poněkud složitější. Musíme se vrátit k začátku této kapitoly, kde jsme si rozlišovali dva základní pohyby tělesa – posuvný a rotační.

- **Kinetická energie posuvného pohybu.**

Podívejte se ještě jednou na obrázek Obr.1.6.-1 znázorňující translační pohyb tělesa. Pro tento pohyb je charakteristické, že všechny body tělesa se pohybují stejnou rychlostí v. Kinetickou energii tělesa dostaneme, sečteme-li kinetické energie všech jednotlivých n hmotných bodů tělesa m_i.



Obr.1.6.-1

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}m_3v^2 + ...+ \frac{1}{2}m_nv^2 .$$

Na pravé rovnice vytkneme výraz $\frac{1}{2}v^2$.

$$E_k = \frac{1}{2}v^2(m_1 + m_2 + m_3 + ...m_n) = \frac{1}{2}v^2\sum_{j=1}^{n} m_j .$$

Součet hmotností jednotlivých bodů tělesa m_j je celková hmotnost tělesa m.

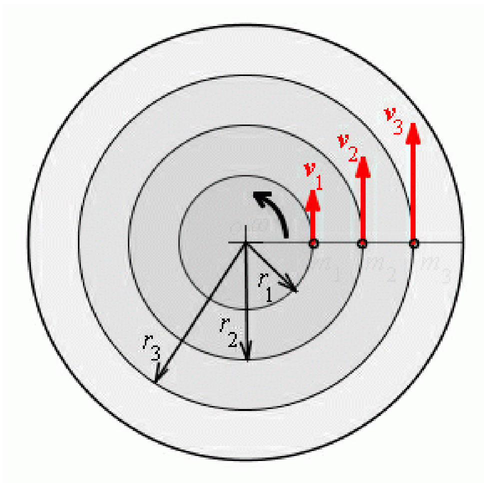
Kinetická energie tělesa při posuvném pohybu se tedy vyjádří stejně jako kinetické energie hmotného bodu. Vlastně nahrazujem naše tuhé těleso hmotným bodem celkové hmotnosti tělesa umístěným do jeho těžiště.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 . \qquad 1.6.-12$$

- **Kinetická energie otáčivého pohybu.**

Při určování kinetické energie rotujícího tělesa budeme postupovat obdobně jako u pohybu posuvného. To znamená, že si vyjádříme kinetické energie jednotlivých bodů tělesa a pak je sečteme.

Vyjdeme z obrázku Obr.1.6.-30. Zde je nakresleno rotující těleso ve tvaru kotouče otáčející se úhlovou rychlosti ω kolem osy jdoucí středem. Na obrázku jsou znázorněny hmotné body jejichž kinetická energie se mění v závislosti na vzdálenosti od osy otáčení. Důležité je, že všechny body mají stejnou úhlovou rychlost ω. Energie j-tého hmotného bodu je dána výrazem $E_{kj} = \frac{1}{2}m_jv_j^2 = \frac{1}{2}m_j\omega^2r_j^2$. Opět sečteme kinetické energie všech n -bodů tvořících otáčející se těleso.



Obr.1.6.-30

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2} m_n \omega^2 r_n^2 \,.$$

Po vytknutí společného výrazu $\frac{1}{2}\omega^2$ dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots m_n r_n^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2 \,.$$

Součet výrazů $m_j r_j^2$ se označuje jako **moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení** a označuje se *J*. Takže kinetickou energii otáčejícího se tělesa vyjádříme vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \,. \qquad 1.6.\text{-}13$$

V další kapitole se naučíme moment setrvačnosti počítat.

Podívejme se ještě jinak na tento vztah a srovnejme ho se vztahem pro kinetickou energii posuvného pohybu $E_k = \frac{1}{2} m v^2$. Začněme od poslední veličiny v těchto vztazích . U posuvného pohybu máme druhou mocninu rychlosti pohybu v^2. U rotačního pohybu je zase druhá mocnina úhlové rychlosti ω^2. O úhlové rychlosti jsme si řekli, že charakterizuje rychlost rotačního pohybu.

Jděme dál. Druhý člen ve vztahu pro kinetickou energii posuvného pohybu je hmotnost tělesa *m*. Hmotnost nám určuje setrvačné vlastnosti tělesa při posuvném pohybu. Obdobný význam by měl mít i moment setrvačnosti. A skutečně **moment setrvačnosti *J* určuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotačním pohybu**. Moment setrvačnosti je schopnost tělesa „setrvávat“ v rotačním pohybu.

Můžeme si vliv momentu setrvačnosti vyzkoušet sami. Zkuste zastavit lehké kolo jízdního kola a těžké kolo náklaďáku o stejném poloměru. Když budou obě kola vykonávat stejný počet otáček za minutu (mají stejnou úhlovou rychlost) asi podstatně snáze zastavíme jízdní kolo.

- **Kinetická energie složeného pohybu.**

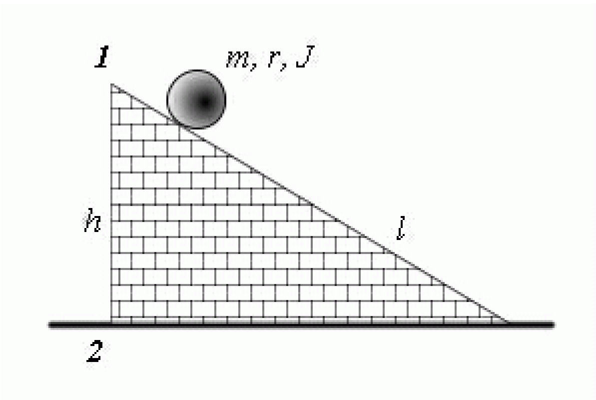
Vyřešit tento problém už nebude tak těžké, uvědomíme-li si, že tento pohyb vzniká složením posuvného a rotačního pohybu. Protože kinetická energie je skalární veličina, jednoduše sečteme kinetickou energii posuvného a rotačního pohybu.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \,. \qquad 1.6.\text{-}14$$

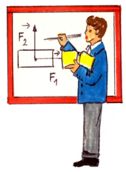
U 1.6.-5 Rotor elektromotoru s hmotností 110 kg má moment setrvačnosti 2 kg.m^2 a koná 20 otáček za sekundu. *Jak velkou má kinetickou energii?*

U 1.6.-6 Válec o hmotnosti 2 kg se valí bez prokluzování po vodorovné podložce stálou rychlostí velikosti 4 m/s. *Určete kinetickou energii válce.*

U 1.6.-7 Koule ($J_T = 2mr^2/5$) o hmotnosti 0,25 kg a průměru 6 cm se valí bez klouzání po vodorovné podložce, přičemž frekvence otáčení je 4 Hz. *Určete kinetickou energii koule.*



Obr.1.6.-31



Po nakloněné rovině o délce 5 m se začne valit bez prokluzování válec tak, že jeho těžiště sníží svoji polohu o 1 m (Obr.1.6.-31). *Určete velikost rychlosti, s níž se těleso pohybuje na konci daného úseku.*

Označíme si veličiny: l = 5 m, h = 1 m, $J_T = mr^2/2$, g = 9,8 m.s^{-2}, v = ?

Využijeme zákona zachování mechanické energie. Válec v horní poloze má potenciální energii $E_{p1} = m\,g\,h$, v dolní poloze $E_{p2} = 0$. Kinetická energie v horní poloze je nulová, $E_{k1} = 0$ a v dolní poloze je dána kinetickou energií posuvného pohybu a kinetickou energií rotačního pohybu

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m v^2 - + \frac{1}{2} J_T\,\omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right)$$

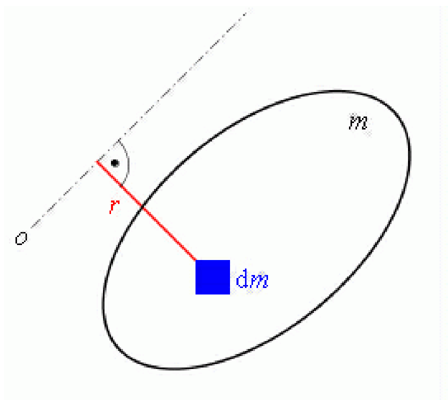
Vyjádříme-li si ze zákona zachování energie $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$ velikost rychlosti, dostáváme

$$v = \sqrt{\left(\frac{4}{3} g\,h\right)} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} 9{,}8.1\right)} \quad = \underline{3{,}6 \text{ m/s}}$$

Velikost rychlosti válce ve spodní poloze je 3,6 m/s.

1.6.6. Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti J, veličina, která má u rotačního pohybu stejnou funkci jako hmotnost m u pohybu translačního – **charakterizuje setrvačné vlastnosti rotujícího tělesa**. Je to veličina, která charakterizuje rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace. Podívejme se na Obr.1.6.-32. Je zde znázorněno těleso hmotnosti m a z něj jsme vybrali objemový element dV hmotnosti dm. Tento element hmotnosti je vzdálen od osy otáčení o o r.

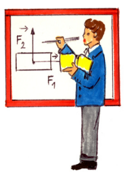


Obr.1.6.-32

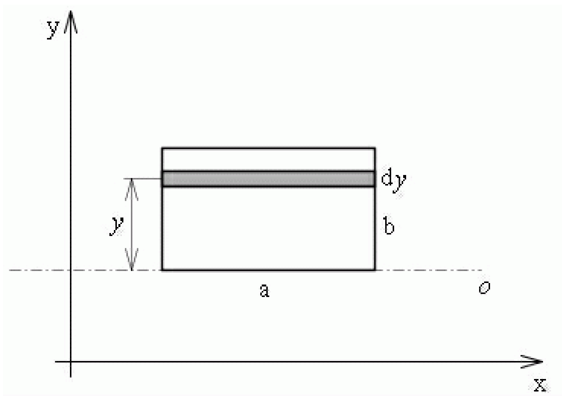
Moment setrvačnosti tohoto elementu dm je dán výrazem r^2dm. Moment setrvačnosti celého tělesa hmotnosti m dostaneme integrováním tohoto vztahu.

$$J = \int_m r^2 \mathrm{d}m \quad [\mathrm{kg.m^2}] \qquad 1.6.\text{-}15$$

Symbol m u integrálu nám říká, že integrujeme přes celou hmotnost vyšetřovaného objektu m.



Stanovte moment setrvačnosti plošné desky (zanedbáváme třetí rozměr) o stranách a, b vzhledem k ose otáčení procházející stranou a (Obr.1.6.-33).



Deska je vyrobena z materiálu plošné hustoty σ.

Vyjdeme z definičního vztahu

$$J = \int_m r^2 \mathrm{d}m .$$

Teď je nejdůležitější si správně zvolit element hmotnosti dm.

Tento element si vyjádříme pomocí elementu plochy

dm = σ dS = σ dxdy a po dosazení

$$J = \sigma \int_S r^2 \mathrm{d}S$$

Měli bychom tedy použít k integrování dvojitý integrál.

$$J = \sigma \int_0^a \int_0^b y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dvojitý integrál ale není nutný. Podívejme se pořádně na obrázek. Na něm je jako element plochy dS použit obdélníček o straně a a výšce dy. Vyhovuje tato volba? Odpověď zní ano. Takto zvolený element totiž vyhovuje podmínce aby **každý bod elementu** dm **měl stejnou vzdálenost od osy otáčení** (my jsme si označili tuto vzdálenost ne jako r, ale jako y. Takže použijeme upravený vztah a dostaneme

$$J = \sigma a \int_0^b y^2 \mathrm{d}y = \sigma \frac{1}{3} a b^3$$

Podívejte se ještě jednou na zápis

$$J = \sigma \int_S r^2 \mathrm{d}S$$

Integrál $\int_S r^2 \mathrm{d}S$ představuje moment setrvačnosti desky vyrobené z libovolného materiálu.

Často se pod pojmem moment setrvačnosti rozumí tento typ vyjádření a to

$$J_V = \int_V r^2 \mathrm{d}V$$

pro objemový moment setrvačnosti

$$J_S = \int_S r^2 \mathrm{d}S$$

pro plošný moment setrvačnosti a

$$J_L = \int_L r^2 \mathrm{d}l$$

pro délkový moment setrvačnosti.

Momenty setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm (označované jako J_T) pro jednoduché útvary můžete najít ve strojnických tabulkách. Moment setrvačnosti konkrétní součástky pak dostanete vynásobením momentu uvedeného v tabulce její hustotou.

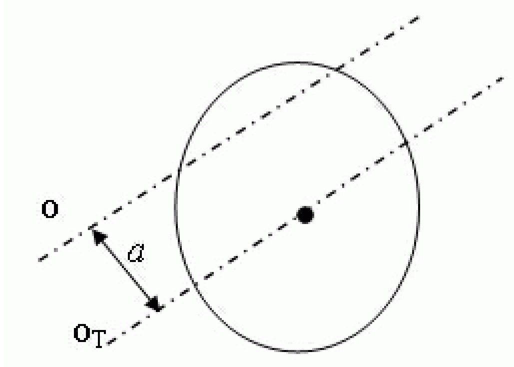
Často potřebujete stanovit moment setrvačnosti J vůči ose neprocházející těžištěm. Pokud znáte nebo najdete moment setrvačnosti vůči ose jdoucí těžištěm J_T pak vám pomůže Steinerova věta.

Podívejte se na Obr.1.6.-34. Zde máte osu otáčení jdoucí těžištěm o_T a chcete stanovit moment setrvačnosti vůči ose o, která je rovnoběžná s těžištní osou a je ve vzdálenosti a.

Použijete **Steinerovu větu**, jejíž matematický zápis je

$J = J_T + m\,a^2$. 1.6.-16

Pozor, obě osy o_T a o musí být rovnoběžné.



O
Obr.1.6.-34

TO 1.6.-16 Moment setrvačnosti tuhého tělesa je definován vztahem $J = \int r^2 \mathrm{d}m$ *kde r je*

a) vzdálenost elementu dm od těžiště tělesa

b) vzdálenost elementu dm od osy rotace

c) velikost polohového vektoru elementu dm

TO 1.6.-17 Hmotný bod m = 3 kg rotuje kolem osy, která je ve vzdálenosti 2 m od hmotného bodu. *Určete moment setrvačnosti* tohoto hmotného bodu. J =

TO 1.6.-18 *Určete moment setrvačnosti* soustavy dvou hmotných bodů hmotností m_1 a m_2, které jsou ve vzdálenosti r_1 a r_2 od osy rotace. J =

TO 1.6.-19 Moment setrvačnosti homogenní koule hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose jdoucí těžištěm je 2/5 ($m\,R^2$). *Určete moment setrvačnosti* této koule vzhledem k ose, která se koule dotýká. J =

1.6.7. Pohybová rovnice rotujícího tělesa, rotační impuls

Také u otáčivého pohybu, podobně jako u translačního, používáme pohybovou rovnici.

U translačního pohybu jsme nazývali pohybovou rovnicí rovnici $\boldsymbol{F} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$, kde na levé straně jsme uváděli součet všech působících sil.

U rotačního pohybu je obdobou matematického zápisu druhého Newtonova pohybového zákona rovnice

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}. \qquad 1.6.\text{-}17$$

Moment síly *M* působící na těleso způsobí časovou změnu jeho momentu hybnosti (točivosti).

A jestli si pod pojmem moment síly představíme součet všech momentů sil, které na objekt působí, opět hovoříme o **pohybové rovnici** tentokráte **rotačního pohybu.**

Pohybovou rovnici rotačního pohybu můžeme ještě zapsat jiným způsobem

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\varepsilon \qquad 1.6.\text{-}18$$

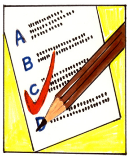
Tento vztah se v praxi často používá.

A ještě jedna analogie rotačního pohybu s pohybem posuvným. U posuvného pohybu jsme definovali vztahem 1.3.-14 $\boldsymbol{I} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_o$ veličinu impuls síly. Působením impulsu síly dochází ke změně hybnosti.

Obdobně budeme definovat **rotační impuls *L*** vztahem

$$\boldsymbol{L} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{M}\mathrm{d}t = m\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{b}_o \qquad 1.6.\text{-}19$$

Působení rotačního impulsu vede ke změně momentu hybnosti – ke změně točivosti tělesa.



TO 1.6.-20 Na těleso, které se může otáčet kolem pevné osy, působí konstantní moment síly. *Jaký pohyb bude těleso vykonávat* ?

a) bude v klidu

b) otáčivý pohyb rovnoměrně zrychlený

c) otáčivý pohyb rovnoměrný

d) otáčivý pohyb nerovnoměrný

TO 1.6.-21 *Které z následujících rovnic* představují pohybovou rovnici rotujícího tuhého tělesa ?

a) $\boldsymbol{b} = J\ \boldsymbol{\omega}$

b) $\boldsymbol{M} = m\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$

c) $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}(J\ \boldsymbol{\omega})/\mathrm{d}t$

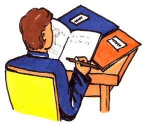
d) $\boldsymbol{F} = J\ \boldsymbol{\varepsilon}$

TO 1.6.-22 Na těleso jehož moment setrvačnosti je J působí moment síly $\boldsymbol{M}$. Ten má za následek změnu momentu hybnosti, *pro kterou platí*:

a) $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \int \boldsymbol{M}\ \mathrm{d}t$

b) $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \int J^2\ \mathrm{d}t/M$

c) $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = J^2\ M/2$



U 1.6.-8 Těleso hmotnosti 80 kg a momentu setrvačnosti 3,2 kg.m^2 se otáčí rovnoměrně zpožděně tak, že počáteční frekvence 15 Hz klesne na nulu za 480 s. *Určete velikost působícího momentu síly* M =

U 1.6.-9 Na setrvačník, jehož moment setrvačnosti je 3 kg.m^2 působí moment síly 6 N.m. *Za jak dlouho* nabude setrvačník úhlové rychlosti 12 s^{-1}, jestliže jeho počáteční úhlová rychlost byla nulová ? t =

U 1.6.-10 Na setrvačník, jehož moment setrvačnosti je 3 kg.m^2 působí moment síly 6t (N.m,s). *Za jak dlouho* setrvačník zvětší svou úhlovou rychlost z hodnoty 3 rad/s na 12 rad/s. t =

1.6.8. Práce a výkon při rotaci

V kapitole 1.4.1 jsme si definovali práci jako dráhový integrál síly výrazem $W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vztah pro práci konanou při otáčivém pohybu si můžeme odvodit z tohoto vztahu, ale také můžeme vyjít z analogie mezi translačním a rotačním pohybem. Tato analogie nám říká že u rotačního pohybu nahrazujeme translační dráhu danou polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ vektorem úhlové dráhy $\boldsymbol{\varphi}$ a vektor síly $\boldsymbol{F}$ vektorem momentu síly $\boldsymbol{M}$. Můžeme tedy práci konanou při rotačním pohybu zapsat jako

$$W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{M}.\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,. \qquad 1.6.\text{-}20$$

Protože směry vektorů $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{\varphi}$ jsou totožné a pod integrálem máme skalární součin (cos0 = 1), lze poslední rovnici zapsat následovně

$$W_{1,2} = \int_1^2 M\,\mathrm{d}\varphi\,. \qquad 1.6.\text{-}21$$

S výkonem to bude ještě jednodušší – jeho definiční vztah uvedený v kapitole 1.4.2 platí i pro rotační pohyb.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Pouze praktický vztah pro výkon translačního pohybu $P = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}$ nahradíme se znalostí analogie výrazem

$$P = M\,\omega. \qquad 1.6.\text{-}22$$

U 1.6.-11 Těleso otáčivé kolem pevné osy se otáčí s úhlovou rychlostí 2 rad/s. Moment setrvačnosti tělesa je 3 kg.m^2. Při pootočení tělesa o 30° *se vykoná práce* W =

U 1.6.-12 Plný válec poloměru 0,2 m a hmotnosti 2 kg se otáčí kolem své osy s úhlovou rychlostí 20 rad/s. Moment setrvačnosti válce je $m\,r^2/2$. Na zastavení tohoto válce musíme *vynaložit práci* W =

U 1.6.-13 Na těleso otáčivé kolem pevné osy působí moment síly 1 N.m. Těleso rotuje s úhlovým zrychlením 1 rad/s^2. *Vypočítejte výkon* v 5.sekundě. P =

U 1.6.-14 Hnací hřídel automobilu se otočí 60 krát za sekundu a přenáší výkon 60 kW. *Otáčivý moment*, který vyvíjí motor má velikost M =

Vřele doporučuji sednout si na chvíli nad **následující tabulku**, která provádí srovnání vztahů používaných při posuvném (translačním) a otáčivém (rotačním) pohybu tělesa. Zamyslete se nad ní a uvědomte si, že vztahy pro oba pohyby mají formálně stejná vyjádření, pouze se poněkud mění obsah.

Název veličiny		*Název veličiny*	
dráha	s	úhlová dráha	φ
polohový vektor	$\boldsymbol{r}$	vektor úhlové dráhy	$\boldsymbol{\varphi}$
rychlost	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
vektor rychlosti	$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	vektor úhlové rychlosti	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	úhlové zrychlení	$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$
vektor zrychlení	$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$	vektor úhlového zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{b} = J\boldsymbol{\omega}$
impuls síly	$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$	rotační impuls	$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t$
práce	$W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	práce	$W_{1,2} = \int_1^2 \boldsymbol{M}.\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
výkon	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}$	výkon	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}.\boldsymbol{\omega}$
kinetická energie	$E_k = 1/2mv^2$	kinetická energie	$E_k = 1/2J\omega^2$
potenciální energie	$\Delta E_p = -\int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F}_i.\mathrm{d}\boldsymbol{r}$		
pohybová rovnice	$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}$	pohybová rovnice	$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\varepsilon}$
zákon zachování hybnosti	$\boldsymbol{p} = \mathbf{konst}$ *při* $\boldsymbol{F} = 0$	zákon zachování momentu hybnosti	$\boldsymbol{b} = \mathbf{konst}$ při $\boldsymbol{M} = 0$

1.6.9. Struktura a deformace pevné látky

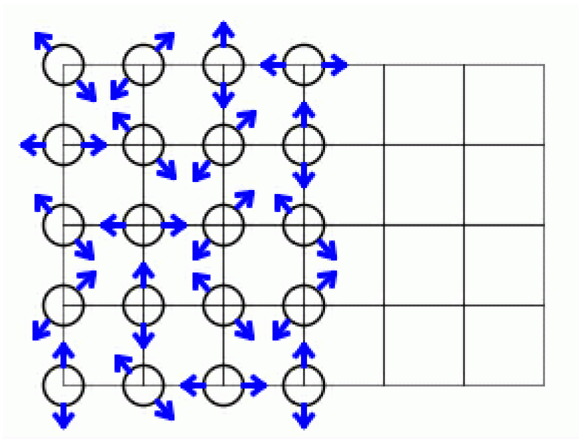
1. Znát způsob rozlišování pevných, kapalných a plynných látek podle změn vyvolaných působením vnějších sil.
2. Umět definovat krystalickou a amorfní látku.

3. Rozlišovat a definovat pružnou a plastickou deformaci.
4. Znát různé druhy namáhání pevného tělesa.
5. Umět definovat normálové napětí, relativní a absolutní deformaci.
6. Vyslovit Hookův zákon, vědět oblast jeho aplikace.
7. Umět popsat jednotlivé význačné body křivky závislosti relativní deformace na napětí.

1.6.9.1. Struktura pevných látek

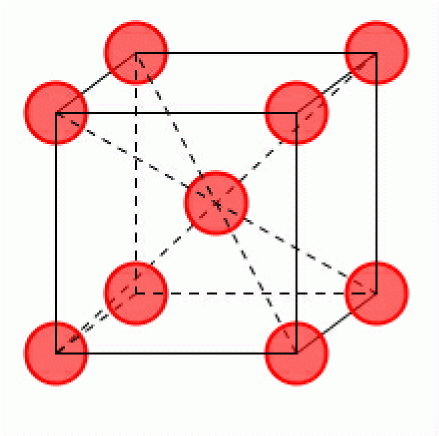
Tato kapitola je sice nazvána dynamika tuhého tělesa, ale teď připustíme, že se těleso může deformovat. Základní vlastností pevných látek je to, že si zachovávají svůj tvar, pokud na ně nepůsobí vnější síly. Tím se liší od kapalných těles, které jsou tekuté a zachovávají svůj objem, ale ne tvar. A zcela se liší plynná tělesa, která se rozpínají do okolního prostoru a mění tak svůj tvar i objem.

V pevných látkách jsou molekuly případně atomy nebo ionty pevně vázány na svá místa a mohou vykonávat jen kmitavý pohyb kolem svých rovnovážných poloh jak ukazuje Obr.1.6.-35. Pevné látky dělíme do dvou základních skupin - na látky krystalické a amorfní.



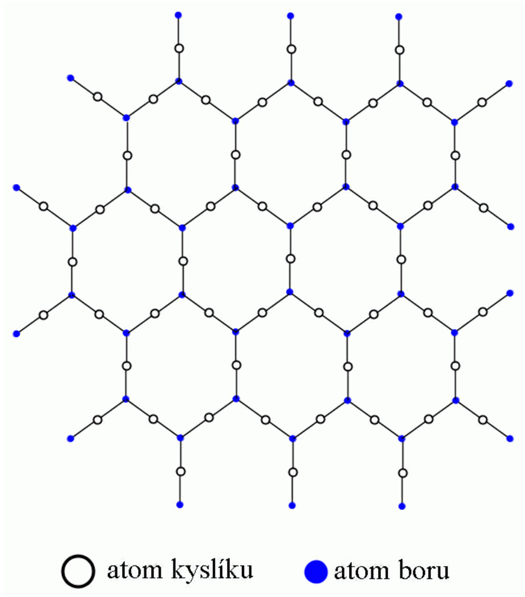
Obr.1.6.-35

Krystalické látky jsou charakterizovány pravidelným uspořádáním částic ze kterých se skládají do prostorové geometrické mřížky – Obr.1.6.-36. Vytvářejí tak **krystalickou mřížku,** která se periodicky opakuje v celém krystalu, hovoříme o **dalekodosahovém uspořádání** (Obr.1.6.-37).



Obr.1.6.-36

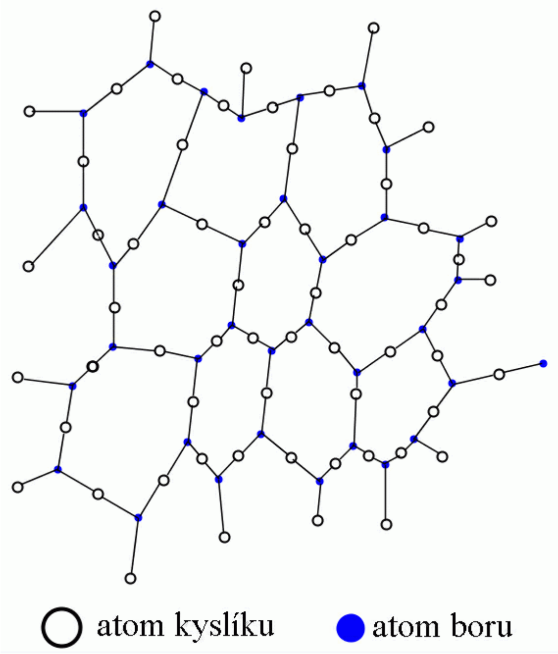
Krystalické látky mohou být ve formě **monokrystalu** ať už přírodního – křemen, ametyst (barevná odrůda křemene), kamenná sůl, vápenec nebo uměle vyrobeného (současné kameny ve šperkcích – umělé drahokamy jako safír, rubín). Také v polovodičové technice se používá uměle vyrobených monokrystalů germania a křemíku.



Obr.1.6.-37

Většina krystalických látek je však tvořena velkým množstvím drobných krystalků nazývaných **zrna**. Jejich velikost se pohybuje od 10 µm do několika mm. Hovoříme o **polykrystalech**. Polykrystaly jsou kovy, různé zeminy atp. Uvnitř zrn jsou částice uspořádány v mřížce, vzájemná poloha sousedních zrn je však zcela nahodilá.

Amorfní látky mají nepravidelné uspořádání částic, které se vyznačuje **krátkodosahovým uspořádáním** (Obr.1.6.-38)**.**



Obr.1.6.-38

To znamená že v malé oblasti jsou částice přibližně pravidelně uspořádány, tato uspořádanost se s rostoucí vzdáleností porušuje. Amorfními látkami jsou například vosk, asfalt, většina plastů, sklo atp.

Zvláštní skupinou amorfních látek jsou **polymery**, látky organického původu tvořící dlouhé makromolekuly často navzájem propleteny, vytvářejí sítě, jsou stočeny do klubek atd. Polymery jsou například celulóza, bílkoviny, termoplasty jako PVC, polyepoxidové pryskyřice.

Mezi částicemi pevné látky působí **vazebné síly**, které jak napovídá název, vážou k sobě částice ze kterých se skládá krystalová mřížka. Vazebné síly dávají vzniknout různým způsobům **vazeb**, ze kterých vyplývají typické vlastnosti daných krystalů.

1.6.9.2. Deformace pevného tělesa

Začnou-li působit na pevné těleso vnější síly, začne se pohybovat nebo dojde k jeho deformaci. Pod pojmem deformace tělesa rozumíme změny jeho rozměrů, tvaru a objemu.

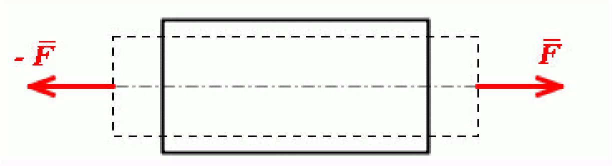
Deformace může být **pružná (elastická)** jestliže pevné těleso po ukončení působení vnější deformační síly získá původní tvar. Tak gumový míček po stlačení rukou a následujícím uvolnění působení ruky obnoví svoji velikost i tvar.

Při deformaci jsou částice tělesa působením vnějších sil vychylovány ze svých rovnovážných poloh. Vychylování brání síly vzájemného působení mezi částicemi pevného tělesa, vznikají **síly pružnosti** F_p. Schopnost tělesa obnovit své rozměry, tvar i objem po přerušení působení deformačních sil se nazývá **pružnost**.

Deformace tělesa, která trvá po ukončení působnosti deformačních vnějších sil, se označuje jako **trvalá deformace (tvárná, plastická).** Stlačíme-li rukou nyní kuličku z plastelíny, pak uvolníme-li stisk plastelína zůstane v deformovaném stavu.

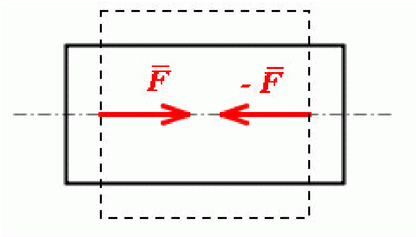
Pružná deformace tělesa může být výsledkem tahu, tlaku, ohybu, smyku nebo kroucení.

Při **tahu** působí na těleso dvě stejně veliké síly směrem ven jak je vidět z Obr.1.6.-39. Těleso zvětší svou délku a svůj objem.



Obr.1.6.-39

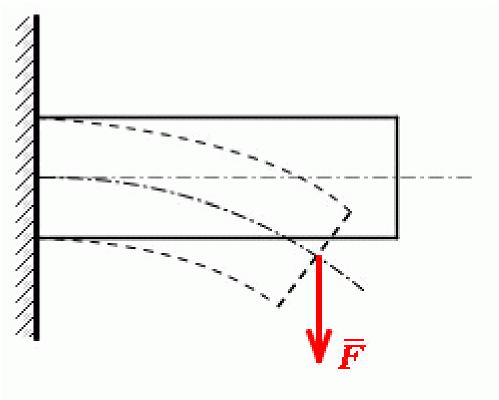
Při **tlaku** působí na těleso dvě stejně veliké síly směrem dovnitř tělesa – Obr.1.6.-40. Těleso se zkrátí a zmenší svůj objem.



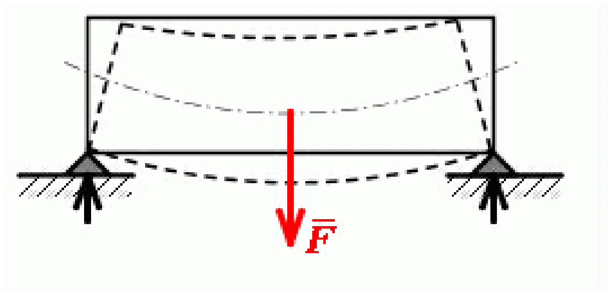
Obr.1.6.-40

Při namáhání **ohybem** působí na upevněné (podepřené) těleso síla kolmá k jeho podélné ose viz Obr.1.6.-41 a Obr.1.6.-42. Spodní vrstvy tělesa se při tomto ději zkracují (jsou namáhány tlakem), horní vrstvy se prodlužují (namáhány tahem) a konečně střední vrstva svou délku nemění – označujeme ji jako neutrální vrstvu.

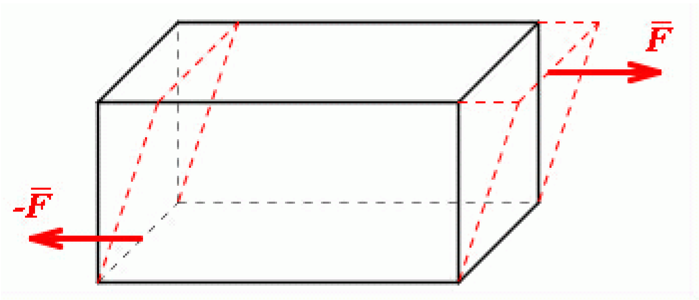
Obr.1.6.-41



Obr.1.6.-42

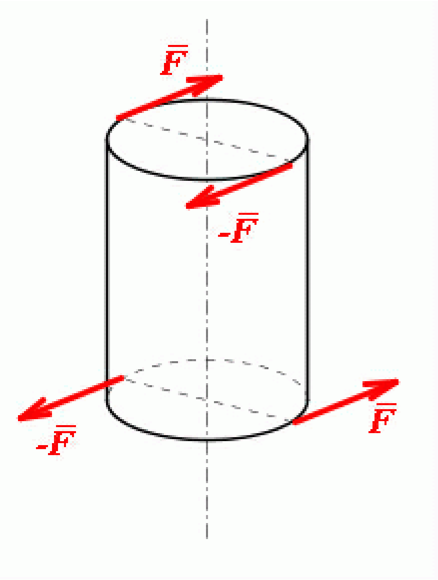


Při **smyku** působí na protilehlé podstavy tělesa tečné síly a těleso se zkosí (změní tvar), ale nezmění svůj objem jak je znázorněno na Obr.1.6.-43.



Obr.1.6.-43

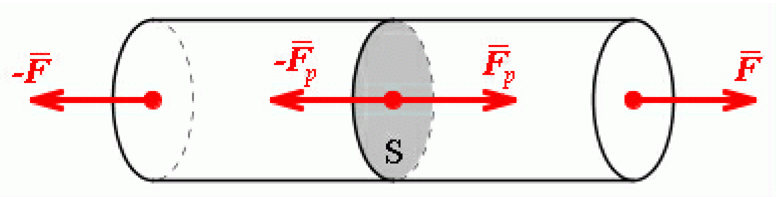
A konečně při namáhání **kroucením** působí na těleso dvě dvojice sil, jejich momenty jsou stejně velké a opačného směru – Obr.1.6.-44. Těleso mění svůj tvar.



Obr.1.6.-44

1.6.9.3. Normálové napětí, Hookův zákon

V předchozí kapitole se mluvilo o silách pružnosti vyvolaných vnějšími silami. Podívejme se na obrázek struny namáhané na tah silami F (Obr.1.6.-45). Vnější tahové síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}'$ vyvolají uvnitř struny síly pružnosti $\boldsymbol{F}_p$ a $\boldsymbol{F}_p'$ působící kolmo na plochu S příčného řezu strunou. Podíl velikosti síly pružnosti F_p a kolmé plochy S nazýváme **normálové napětí**

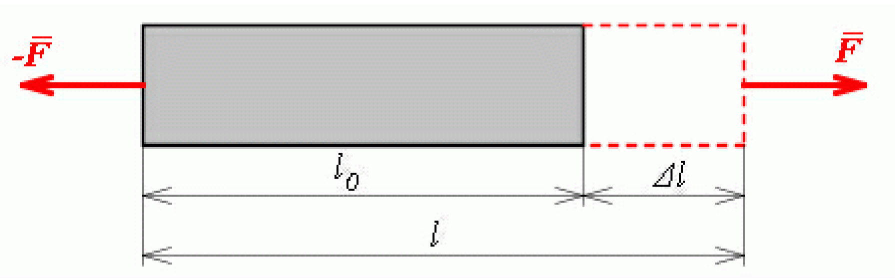


Obr.1.6.-45

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}, \qquad 1.6.\text{-}23$$

s jednotkou N.m^{-2} = Pa (pascal).

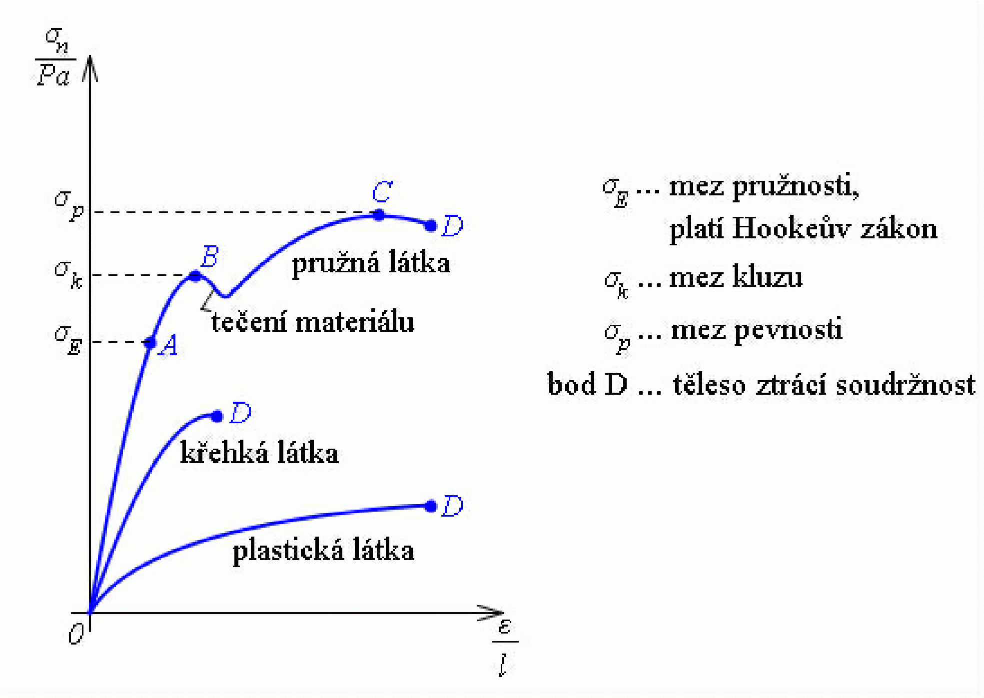
Zůstaňme ještě u naší struny. Působením tahových sil se její původní délka l_o změní na délku l jak je vidět na Obr.1.6.-46. Struna se prodlouží o $\Delta l = l - l_o$. Názornější je porovnávat prodloužení tělesa s jeho původní délkou. Zavedeme tedy veličinu **poměrné prodloužení** ε definované vztahem



Obr.1.6.-46

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}. \qquad 1.6.\text{-}24$$

Poměrné prodloužení je při tahovém namáhání závislé na mechanickém napětí. Křivka této závislosti se zkoumá v technické praxi a je měřítkem vlastností zkoumaného materiálů. Často se záznam této křivky označuje jako deformační diagram. Na obrázku Obr.1.6.-47 jsou vyneseny tři křivky závislosti normálového napětí σ_n na poměrném prodloužení ε, každá pro zcela odlišný materiál.



Obr.1.6.-47

Na křivkách jsou vidět a písmeny označeny význačné, charakteristické body.

Podívejme se nejdříve na křivku pro **pružnou látku** jako je např. ocel, železo apod. Až do bodu *A* je závislost přímková, lineární odpovídající přímé úměrnosti mezi normálovým napětím a poměrným prodloužením

$$\sigma_n = E\varepsilon . \qquad 1.6.\text{-}25$$

Toto je tzv. **Hookeův zákon** pro pružnou deformaci tahem. Veličina *E* je látková konstanta, nazývá se **modul pružnosti v tahu** a charakterizuje materiál z pohledu jeho deformace tahem. Hookův zákon platí po tzv. **mez pružnosti** σ_E, tedy v oblasti kde dochází k pružné deformaci - lineární část diagramu. Překročí-li normálové napětí mez pružnosti, pak dochází k trvalé deformaci tělesa i po odstranění vnějších deformujících sil.

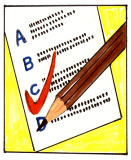
Pokračujeme-li ve sledování křivky pak vidíme, že mezi body *A* a *B* již křivka není přímková. Po zmenšení vnější síly zůstane těleso trvale deformováno, dochází k **plastické deformaci**.

V následující části křivky mezi body *B* a *C* se projevují výrazné trvalé deformace. Důležitý je bod *C*. Napětí v tomto bodě se označuje jako **mez pevnosti** σ_p. Při překročení tohoto napětí poruší se soudržnost materiálů, při tahovém namáhání dochází k přetržení tělesa.

Druhá křivka je charakteristická pro **křehkou látku**. Takovou křehkou látkou je například litina, sklo, porcelán atp. Na křivce je podstatné to, že lineární oblast je velmi rychle následována mezí pevnosti, kdy dochází k porušení materiálu. Prakticky zde není oblast plastické deformace.

Třetí křivka pak je typická pro plastickou látku jakou je plastelína, vosk atp. Při namáhání tohoto materiálu dochází pouze k plastické deformaci.

Hookův zákon platí i pro pružnou deformaci tlakem. Také moduly pružnosti v tahu a tlaku jsou pro většinu látek stejné. Výjimku tvoří látky jako beton, žula, litina.



TO 1.6.-23 Mezi krystalické látky nepatří:

a) jantar b) grafit c) modrá skalice d) rubín e) diamant f) kaučuk

TO 1.6.-24 U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu E bylo při normálovém napětí σ_n naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je relativní prodloužení tyče při dvojnásobném normálovém napětí?

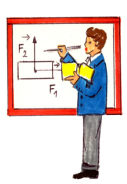
a) 0,1% b) 0,2% c) 0,4% d) 0,8%

TO 1.6.-25 U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu E bylo při normálovém napětí σ_n naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je relativní prodloužení této tyče při stejném normálovém napětí, je-li délka tyče dvojnásobná?

a) 0,1% b) 0,2% c) 0,4% d) 0,8%

TO 1.6.-26 U tyče z materiálu o modulu pružnosti v tahu E bylo při normálovém napětí σ_n naměřeno relativní prodloužení 0,2 %. Jaké je relativní prodloužení této tyče při stejném normálovém napětí, je-li tyč o dvojnásobném modulu pružnosti v tahu?

a) 0,1% b) 0,2% c) 0,4% d) 0,8%



Kovová válcová trubka délky 1m s vnějším průměrem 20cm a s tloušťkou stěny 1cm byla stlačena normálovou silou o velikosti 16kN. Trubka je zhotovena z materiálu modulu pružnosti 120GPa. *Určete normálové napětí, poměrné zkrácení trubky a zkrácení trubky.*

Vyjdeme z definičního vztahu pro normálové napětí $\sigma_n = \frac{F_p}{S}$ a nejdříve vypočteme obsah příčného řezu trubky, na který síla působí. Ten je dán plochou mezikruží $S = \frac{\pi\left(d_1^2 - d_2^2\right)}{4}$, kde d_1 je vnější průměr a d_2 vnitřní průměr trubky.

Normálové napětí tak bude vyjádřeno vztahem $\sigma_n = \frac{4F_p}{\pi\left(d_1^2 - d_2^2\right)}$. Po dosazení získáme normálové napětí velikosti $\sigma_n = \frac{4.16.10^3}{3{,}14\left(0{,}2^2 - 0{,}18^2\right)} = 2{,}68\text{MPa}$.

Z Hookova zákona vyplývá pro poměrné zkrácení výraz $\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}$ a po dosazení $\varepsilon = \frac{2{,}68.10^6}{1{,}2.10^{11}} = 2{,}2.10^{-5}$. Poměrné zkrácení trubky je 0,002%.

A konečně zkrácení trubky plyne z definičního vztahu relativní změny jako $\Delta l = \varepsilon l = 2{,}2.10^{-5}.1 = 22.10^{-6}$ m.

U 1.6.-15 Železná tyč průřezu 2.10^{-4}m^2, délky 1m je namáhána v tahu silou $1{,}962.10^4$N. Vypočtěte napětí materiálu, absolutní a relativní prodloužení, je-li modul pružnosti v tahu $E = 1{,}962.10^{11}$Pa.

U 1.6.-16 Tyč kruhového průřezu o průměru 2.10^{-2}m a délky 2 m se vlivem síly $3{,}082.10^4$N prodloužila o 10^{-3}m. Určete modul pružnosti v tahu.

U 1.6.-17 Určete modul pružnosti v tahu zkušební tyče průměru 2.10^{-2}m, délky 0,2m, jestliže při zatížení silou $3{,}92.10^3$N je absolutní prodloužení = $1{,}25.10^{-5}$m.

U 1.6.-18 Dřevěný trámek délky 3m se zkrátil působením tlakové síly kolmé k průřezu o 4mm. Vypočtěte délku trámu po zatížení a jeho poměrné zkrácení .

U 1.6.-19 Jakou silou musí být napínáno gumové vlákno o průřezu 8 mm^2, aby se prodloužilo na dvojnásobek původní délky? Modul pružnosti v tahu je 1 MPa.

U 1.6.-20 Zkušební vzorek z jehličnatého dřeva má tvar krychle s délkou hrany 40 mm. Rozdrtí se silou 54,5 kN. Vypočítejte mez pevnosti zkoušeného dřeva.

1. Tuhé těleso může vykonávat:

- **Posuvný (translační) pohyb**, při kterém všechny body tělesa mají v určitém čase rychlosti stejné velikosti, stejného směru i stejné orientace.
- **Otáčivý (rotační) pohyb** kolem osy otáčení. Při tomto pohybu mají všechny body tělesa stejnou úhlovou rychlost.
- **Složený (kombinovaný) pohyb** složený z posuvného a otáčivého pohybu.

2. Pohyb celého tělesa si můžeme nahradit pohybem těžiště. **Těžiště tělesa** je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna všechna hmotnost tělesa.

Těžiště tělesa je působiště výslednice všech tíhových sil působících na jednotlivé hmotné body tvořící dané těleso. Polohu těžiště vypočítáme pomocí vztahu $\boldsymbol{r}_t = \frac{1}{m}\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m$

3. Otáčivý účinek síly je dán **momentem síly** vzhledem k ose otáčení: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
4. **Moment hybnosti** je definován vztahem $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = J\,\boldsymbol{\omega}$.
5. **Síly** působící na těleso **můžeme skládat**. Při skládání sil využíváme pravidel vektorového počtu. Je třeba přihlížet také k jejich působišti.
6. Dvojice sil působí na těleso **momentem dvojice** sil $D = F\,d$.
7. Těleso je v **rovnovážné poloze**, když výslednice sil i výsledný moment sil na něj působících je nulový a těleso je v klidu, platí $\sum \boldsymbol{F} = 0$, $\sum \boldsymbol{M} = 0$..
8. **Rovnovážná poloha** může být:

- **Stabilní,** tuto polohu má těleso, které se po vychýlení z této polohy opět do ní vrací.
- **Labilní**, kterou má těleso, které se po vychýlení z této polohy do ní nevrací. Těleso po vychýlení přechází do nové stabilní polohy.
- **Volnou polohu** má těleso, které po vychýlení zůstává v jakékoliv nové poloze.

9. **Kinetická energie posuvného pohybu** tělesa je dána vztahem $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

10. **Kinetická energie otáčivého pohybu** tělesa se vyjádří jako $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$. Fyzikální veličina J je **moment setrvačnosti** vůči ose otáčení. Moment setrvačnosti vyjadřuje setrvačné vlastnosti tělesa při rotačním pohybu a je dán vztahem $J = \int_m r^2 \mathrm{d}m$.

11. **Kinetická energie složeného pohybu** je dána **součtem** kinetické energie rotačního a translačního pohybu $E_k = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$**.**

12. **Pohybová rovnice** rotačního pohybu má tvar $\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}$. Výsledný moment sil působících na těleso je roven časové změně točivosti.

13. **Rotační impuls** vede ke změně momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = \int_{t_o}^{t} \boldsymbol{M} \mathrm{d}t = m\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{b}_o$.

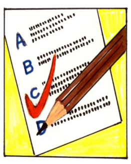
14. **Práce sil** při rotaci tělesa se vyjádří jako $W_{1,2} = \int_1^2 M \, \mathrm{d}\varphi$.

15. **Výkon** při rotaci je dán výrazem $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$.

16. Látky můžeme dělit na **krystalické, polykrystalické** a **amorfní**.

17. **Hookův zákon** pro pružnou deformaci je vyjádřen vztahem $\sigma_n = E\varepsilon$, kde σ_n je normálové napětí, E modul pružnosti v tahu a ε.

Klíč



TO 1.6.-1 Pokud se těleso pohybuje pohybem zrychleným, je zrychlení všech bodů stejné.

TO 1.6.-2 Body, kterými prochází osa otáčení.

TO 1.6.-3 a, e

TO 1.6.-4 b, c

TO 1.6.-5 d, f

TO 1.6.-6 kg.m^2.s^{-2}

TO 1.6.-7 F_2

TO 1.6.-8 a)

TO 1.6.-9 a)

TO 1.6.-10 a), e)

TO 1.6.-11 a)

TO 1.6.-12 c

TO 1.6.-13 d

TO 1.6.-14 0,5 m. Chceme, aby houpačka byla ve stabilní poloze. Momenty síly otce a dítěte vzhledem k ose otáčení musí být stejné.

TO 1.6.-15 0,5 m . Počítáme stejně jako v předešlé otázce.

TO 1.6.-16 b)

TO 1.6.-17 12 kg.m^2

TO 1.6.-18 $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

TO 1.6.-19 7/5 ($m R^2$)

TO 1.6.-20 b)

TO 1.6.-21 c)

TO 1.6.-22 a)

TO 1.6.-23 a, f

TO 1.6.-24 c)

TO 1.6.-25 a)

TO 1.6.-26 a)

U 1.6.-1 10 N.m, 14,1 N.m, 14,1 N.m, 7,07 N.m.

U 1.6.-2 28,3 N.m

U 1.6.-3 1700 N. Vektorově obě síly sečteme.

U 1.6.-4 170 N. Vycházíme z momentové věty. Moment síly dělníka *F d* musí být roven momentu tíhy trámu *m g* cosα *d*/2 působící v těžišti (polovina délky trámu *d*).

U 1.6.-5 15,8 kJ. . $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J(2\pi f)^2 = \frac{1}{2}.2.(2.3{,}14.20)^2$

U 1.6.-6 24 J. Kinetická energie bude složena z kinetické energie posuvného pohybu těžiště pohybujícího se rychlostí v = 4 m.s^{-1} a z kinetické energie otáčivého pohybu se stejnou obvodovou

rychlostí. $E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right).\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}2.4^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}2.r^2.\frac{4^2}{r^2}$. Všimněte si, že energie válce nezávisí na jeho poloměru.

U 1.6.-7 0,1 J.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m(2\pi f r)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right).(2\pi f)^2 = \frac{1}{2}0{,}25.(2.3{,}14.4.0{,}03)^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}0{,}25.0{,}03^2.(2\pi.4)^2$$

Rychlost pohybu těžiště (je stejná jako obvodová rychlost povrchového bodu) se vypočítá z otáčivého pohybu ze vztahu $v = \omega r = 2\pi f.r$.

U 1.6.-8 - 0,63 N.m

U 1.6.-9 6 s

U 1.6.-10 3 s

U 1.6.-11 0 J

U 1.6.-12 8 J

U 1.6.-13 5 W

U 1.6.-14 159,15 N.m

U 1.6.-15 $\sigma = 9{,}81.10^{7}$ Pa, $\varepsilon = 5.10^{-4}$, $\Delta l = 5.10^{-4}$m

U 1.6.-16 $E = 1{,}96.10^{11}$Pa

U 1.6.-17 $E = \dfrac{3{,}92.10^{3}.\ 2.10^{-1}}{3{,}14.\ 4.10^{2}.\ 1{,}25.10^{5}} = 2.10^{11}\,\mathrm{Pa}$

U 1.6.-18 2,996m, 0,13%

U 1.6.-19 8 N

U 1.6.-20 $\sigma_p = 34$ MPa