

Úloha č. 7: Stanovení modulu pružnosti v tahu z průhybu statickou metodou

Úkol:

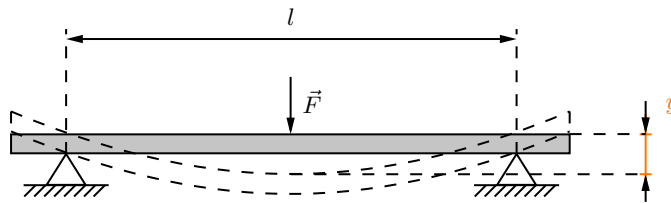
1. Určete Younguv model pružnosti v tahu
  - (a) statickou metodou z průhybu tyče
  - (b) z příčných kmitů tyče

Jestliže na vodorovnou tyč zhotovenou z homogenního materiálu stáلهho průřezu  $S$  a podepřenou na dvou rovnoběžných hranách (viz obr. 1) vzdálených od sebe o délku  $l$ , působí uprostřed osamělá síla  $F$ , prohne se tyč uprostřed o délku  $y$  (ve směru působící síly), pro jejíž velikost platí

$$y = \frac{l^3 \cdot F}{48 \cdot EJ} \quad (1)$$

v tomto vztahu  $J$  značí kvadratický moment průřezu (moment setrvačnosti průřezu) měřené tyče a  $E$  značí modul pružnosti v tahu použitého materiálu.

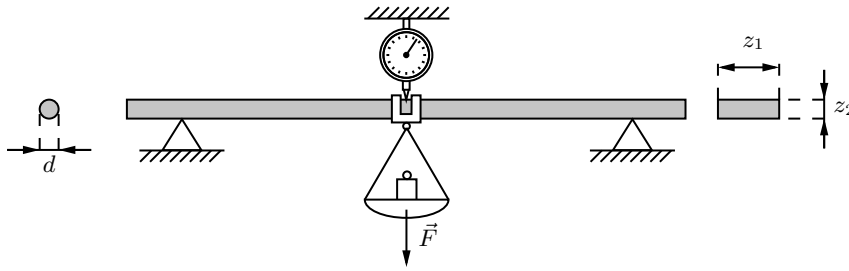
Ze vztahu (1) lze hodnotu modulu pružnosti v tahu vypočítat a dostaneme



Obrázek 1: Průhyb tyče zatížené silou

$$E = \frac{l^3 \cdot F}{48 \cdot yJ} \quad (2)$$

Měřený vzorek (obdélníkového, kruhového nebo jiného plošného průřezu) spočívá ve vodorovné poloze na dvou podporách jejichž vzájemná vzdálenost je  $l$ . Přibližně uprostřed vzorku je zavěšena miska, na kterou ukládáme závaží, kterými vzorek zatěžujeme. Příslušný průhyb měříme indikátorovými hodinkami, jejichž pohyblivá část se dotýká měřeného vzorku.



Obrázek 2: Schéma měřícího zařízení

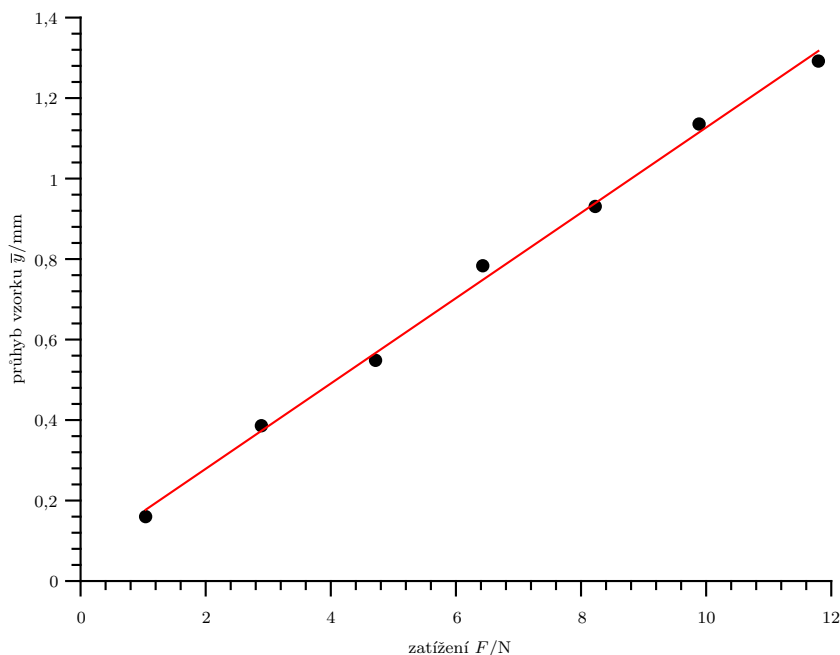
Na začátku měření si zjistíme několikrát opakovaným měřením vzdálenost  $l$  obou podpor a hlavní rozměry příčného průřezu vzorku (jde-li o obdélník, jsou to délky jeho stran  $z_1$  a  $z_2$ , u kruhového průřezu jeho průměr  $d$  apod). Tyto rozměry je nutno měřit velmi přesně - např. několikrát opakovaným měřením mikrometrickým šroubem, nebo alespoň kontaktním měřítkem. Těžiště měření spočívá ve zjištění souvislosti mezi velikostí působící síly  $F$  a vzniklým průhybem  $y$ , tj. v nalezení funkce

$$y = f(F) \quad (3)$$

Tuto souvislost zjistíme při postupném zatěžování vzorku silami  $F_1, F_2, \dots, F_k$  (zvětšováním závaží na misce) a změřením příslušných průhybů  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Potom opět postupně zmenšujeme sílu  $F$ , takže při působení stejně velkých zatížení  $F_k, \dots, F_2, F_1$  zjistíme průhyby  $y_k, \dots, y_2, y_1$ . Pro každou hodnotu  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) určíme příslušný průměrný průhyb  $\bar{y}_i$  podle rovnice

$$\bar{y}_i = \frac{1}{2}(y'_i + y''_i) \quad (4)$$

Závislost  $\bar{y}_i = f(F_i)$  vyneseme do grafu a zjistíme, zdali je lineární v celém rozsahu prováděných měření. Pro další zpracování bereme však v úvahu pouze ty výsledky, které přísluší lineární části (oblasti platnosti Hookeova zákona). Výsledky zpracujeme způsobem popsáním v předešlém odstavci. Předpokládáme-li, že závislost má lineární průběh.



$$y = a + bF \quad (5)$$

pak hodnotu konstanty  $a$  a  $b$  zjistíme z lineární interpolace naměřených hodnot. Porovnáním s rovnicí 1 plyne, že

$$b = \frac{l^3}{48 \cdot EJ} \quad (6)$$

takže pro hledanou hodnotu modulu pružnosti v tahu  $E$  dostáváme

$$E = \frac{l^3}{48 \cdot Jb} \quad (7)$$

Jde-li o vzorek s obdélníkovým průřezem o stranách  $z_1$  a  $z_2$ , pak

$$J = \frac{z_1 \cdot z_2^3}{12} \quad (8)$$

jde-li o vzorek s kruhovým průřezem  $d$ , pak

$$J = \frac{\pi d^4}{64} \quad (9)$$

## Modul pružnosti

---

Modul pružnosti v tahu (tlaku)  $E$  je měrná veličina tuhosti pevné látky v tahu nebo tlaku, určená jako konstanta úměrnosti normálového napětí  $\sigma_n$  a poměrného prodloužení  $\varepsilon$  v Hookově zákoně pro tah a tlak

$$E = \frac{\sigma_n}{\varepsilon} \quad (10)$$

Podle této definice udává modul pružnosti v tahu  $E$  myšlené normálové napětí, které by při neomezené platnosti Hookeova zákona způsobilo poměrné prodloužení  $\varepsilon = 1$ , tj. na dvojnásobek počáteční délky.

Modul pružnosti ve smyku  $\sigma$  je měrná veličina tuhosti pevné látky při smykovém namáhání, definovaná jako konstanta úměrnosti tečného napětí  $\tau$  a poměrného zkosení  $\gamma$  v Hookeově zákoně pro smyk

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (11)$$

Podle této definice udává modul pružnosti ve smyku  $\sigma$  myšlené tečné napětí, jímž by při neomezené platnosti Hookeova zákona vzniklo poměrné zkosení  $\gamma = \tan \alpha = 1$ , tedy pod úhlem  $\alpha = 45^\circ$ . Hlavní jednotkou modulu pružnosti v tahu i modulu pružnosti ve smyku  $N \cdot m^{-2}$ .

---

## Metody stanovení modulu pružnosti v tahu

Modul pružnosti v tahu (tlaku) je v principu možno měřit mnoha různými metodami. Ovšem každá z níže uvedených metod je vhodná pro jiné typy vzorků. Přímá metoda, vycházející z definičního vztahu (10) je především vhodná k měření modulu pružnosti dlouhých tenkých vzorků (např. drátů, vláken, dlouhých tenkých tyčí apod.) u kterých lze dosáhnout poměrně velkého prodloužení. Stanovení modulu pružnosti z průhybu nebo z příčných kmitů se užívá hlavně u silnějších tyčí, především kovových,

u kterých není možné užít přímé metody. U velmi silných tyčí, u kterých nelze užít předešlých metod, dále u křehkých materiálů apod. se zpravidla určuje modul pružnosti z rychlosti šíření podélného mechanického vlnění.

• **Stanovení modulu pružnosti v tahu přímou metodou**

Namáháme-li zkoumané těleso tahem, deformuje se. V jistých mezích (po mez úměrnosti) je deformace tělesa  $\epsilon$  přímo úměrná deformačnímu napětí  $\sigma$

$$\epsilon = \frac{1}{E}\sigma \tag{12}$$

Deformací  $\epsilon$  se v tomto případě rozumí relativné délkové prodloužení

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{13}$$

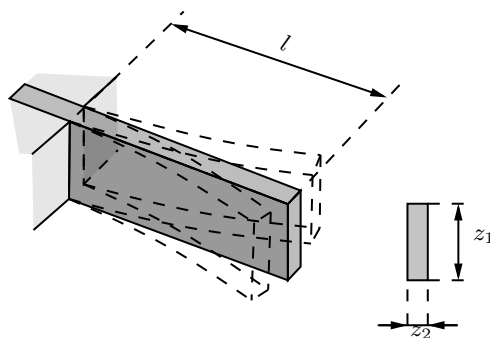
V tomto vztahu  $E$  značí modul pružnosti v tahu materiálu, ze kterého je vetknutá tyč zhotovena,

Redukovanou hmotnost  $m_r$  nelze přímo měřit a proto ji ze vztahu (17) vyloučíme následujícím způsobem: Na volný konec tyče připevníme pomocné těleso známe hmotnosti  $m_p$  tak, aby jeho těžiště připadalo na volný konec tyče. Doba kmitu se v důsledku změřené hmotnosti prodlouží na  $T_1$ , pro níž platí

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l^3(m_r + m_p)}{3 \cdot EJ}} \tag{14}$$

Obě rovnice (17) a (14) umocníme a výsledky vzájemně odečteme. Jednoduchou úpravou pak obdržíme pro hledanou hodnotu modulu pružnosti v tahu  $E$  výraz

$$E = \frac{4\pi^2 m_o l^3}{3J(T_1^2 - T^2)} \tag{15}$$



Obrázek 3: Příčné kmyty jednostranně vetknuté tyče

Stanovením jednotlivých parametrů na pravé straně rovnice (15) lze modul pružnosti v tahu vypočítat.

- **Stanovení modulu pružnosti v tahu z příčných kmitů tyče**

Úpravou vztahu pro kruhovou frekvenci  $\omega$  mechanického lineárního oscilátoru

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mc}} \quad (16)$$

ve kterém  $m$  značí hmotnost kmitajícího tělesa a  $c$  značí poddajnost použité pružiny (tvořící pružnou vazbu), plyne pro dobu kmitu  $T$  volného konce jednostranně vetknuté tyče vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^3 m_r}{3 \cdot EJ}} \quad (17)$$

- $m_r$  značí redukovanou hmotnost volné části vetknuté tyče (hmotnost tyče redukována na její volný konec),
- $l$  značí celkovou délku tyče od místa vetknutí až k jejímu volnému konci  $a$
- $J$  značí kvadratický moment průřezu (moment setrvačnosti průřezu). Jde-li o tyč obdélníkového průřezu (jako na obr. 3) pak  $J$  vypočítáme podle vztahu (8), jde-li o tyč kruhového průřezu, vypočítáme  $J$  podle vztahu (9).

### **Orientační postup**

- Změříme delku, šířku tloušťku tyče metrem a mikrometrem. Měření opakujeme 10-krát.
- Tyč položíme na lavici a postupně se zatěžuje, měříme průhyb úchylkoměrem. Měříme při zatěžování i odlehčování.
- Spočítáme průměr pro hodnoty se stejným zatížením a odlehčením.
- Vyneseme do grafu (zavislost na zatížení ...) a použijeme metódu lineární regrese na zjištění směrnice grafu.