

Binární relace v množině M a jejich vlastnosti

Poznámka Všude v této části se budeme zabývat binárními relacemi definovanými v množině M , resp. na množině M . První a druhé složky všech uspořádaných dvojic všech uvažovaných relací budou tedy prvky jedné a téže množiny M .

Definice Necht' R je binární relace v množině M . Pak řekneme, že tato relace je **reflexivní** (ve zkratce R), jestliže platí
 $(\forall x \in M) [x, x] \in R$.

Poznámka V reflexivní relaci musí být každý prvek množiny M v relaci sám se sebou, v uzlovém grafu relace tedy musí být kolem každého uzlu smyčka. Kartézský graf reflexivní relace musí obsahovat všechny prvky tzv. hlavní diagonály. Aby relace nebyla reflexivní (ve zkratce \bar{R}), musí platit negace definice, tedy $(\exists x \in M) [x, x] \notin R$.

Definice Necht' R je binární relace v množině M . Pak řekneme, že tato relace je **antireflexivní** (ve zkratce AR), jestliže platí
 $(\forall x \in M) [x, x] \notin R$.

Poznámka V antireflexivní relaci nesmí být žádný prvek množiny M v relaci sám se sebou, v uzlovém grafu relace tedy nesmí být ani jedna smyčka. Kartézský graf antireflexivní relace nesmí obsahovat ani jeden prvek hlavní diagonály. Aby relace nebyla antireflexivní (ve zkratce \overline{AR}), musí platit negace definice, tedy $(\exists x \in M) [x, x] \in R$.

Poznámka Je zřejmé, že žádná relace nemůže být reflexivní a antireflexivní současně. Nemusí však být ani reflexivní ani antireflexivní (obsahuje-li uzlová graf alespoň jednu smyčku, ale ne všechny). Tyto dvě vlastnosti tedy nejsou doplňkové.

Definice Necht' R je binární relace v množině M . Pak řekneme, že tato relace je symetrická (ve zkratce S), jestliže platí

$$(\forall x, y \in M) [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R.$$

Poznámka V uzlovém grafu symetrické relace musí být každé dva různé prvky množiny M spojeny buďto oboustrannou šipkou (orientovanou na obou koncích) nebo nejsou spojeny vůbec. Na počtu smyček v grafu nezáleží. Kartézský graf symetrické relace musí být souměrný podle hlavní diagonály. Aby relace nebyla symetrická (ve zkratce \bar{S}), musí platit negace definice, tedy

$$(\exists x, y \in M) [x, y] \in R \wedge [y, x] \notin R.$$

V uzlovém grafu tedy stačí k vyloučení symetrie dané relace existence jediné jednoduché šipky. Poznamenejme ještě užitečné tvrzení, že relace R je symetrická, právě když platí $R = R^{-1}$.

Definice Necht' R je binární relace v množině M . Pak řekneme, že tato relace je antisymetrická (ve zkratce AS), jestliže platí

$$(\forall x, y \in M) (x \neq y \wedge [x, y] \in R) \Rightarrow [y, x] \notin R.$$

Poznámka V uzlovém grafu antisymetrické relace musí být každé dva různé prvky množiny M spojeny buďto jednoduchou šipkou (orientovanou na jednom konci) nebo nejsou spojeny vůbec. Na počtu smyček v grafu nezáleží. V kartézském grafu antisymetrické relace nesmí být žádná dvojice bodů souměrná podle hlavní diagonály. Aby

relace nebyla antisymetrická (ve zkratce **AS**), musí platit negace definice, tedy musí platit

$$(\exists x, y \in M) x \neq y \wedge [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R).$$

V uzlovém grafu tedy stačí k vyloučení antisymetrie dané relace existence jediné oboustranné šipky).

Poznámka Z definic je opět zřejmé, že vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou doplňkové. Existují tedy relace, které nejsou symetrické ani antisymetrické (obsahuje-li jejich uzlový graf jednoduché i oboustranné šipky). Existují však i relace, které mohou být symetrické a antisymetrické současně. To nastane pouze v případě, kdy ani jedna dvojice různých prvků množiny M není spojena žádnou šipkou a uzlový graf obsahuje pouze smyčky. Např. na množině $M = \{1, 2, 3\}$ je relace $R = \{[1, 1], [2, 2]\}$ současně symetrická i antisymetrická.

Poznámka V literatuře bývá často vlastnost antisymetrie relace R definována takto:

$$(\forall x, y \in M) ([x, y] \in R) \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y.$$

Snadno se lze přesvědčit pomocí výrokové logiky, že tato definice a předchozí definice jsou ekvivalentní.

Definice Necht' R je binární relace v množině M . Pak řekneme, že tato relace je tranzitivní (ve zkratce **T**), jestliže platí

$$(\forall x, y, z \in M) ([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R.$$

Poznámka Tranzitivita binární relace je jedinou vlastností, pro kterou nelze v uzlovém ani kartézském grafu vyslovit nějaký univerzální předpis, Obecně platí, že tranzitivitu relace lze jednodušeji vyloučit

než ji prokázat. K tomu může sloužit negace vlastnosti T. Aby relace nebyla tranzitivní (ve zkratce \mathcal{F}), musí platit negace definice, tedy musí platit

$$(\exists x, y, z \in M) ([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \wedge [x, z] \notin R.$$

Nalezení trojice bodů s touto vlastností (tedy vyloučení tranzitivnosti relace) se v uzlovém grafu často podaří. Jednou z variant např. je, že v uzlovém grafu tranzitivní relace pro každou oboustrannou šipku musí platit, že musí mít na obou koncích smyčky. Je-li relace R zadána výčtem prvků, je velmi užitečné následující tvrzení: Relace R je tranzitivní, právě když platí $R \circ R \subset R$.

Definice Necht' R je binární relace v množině M. Pak řekneme, že tato relace je souvislá (ve zkratce SO), jestliže platí

$$(\forall x, y \in M) x \neq y \Rightarrow ([x, y] \in R \vee [y, x] \in R).$$

Poznámka V uzlovém grafu souvislé relace musí být každé dva různé prvky množiny M spojeny buďto jednoduchou šipkou nebo obostrannou šipkou. Na počtu smyček v grafu nezáleží. Aby relace nebyla souvislá (ve zkratce $\mathcal{S}\Theta$), musí platit negace definice, tedy musí platit $(\exists x, y \in M) x \neq y \wedge [x, y] \notin R \wedge [y, x] \notin R$. V uzlovém grafu tedy stačí k vyloučení souvislosti dané relace existence jediné dvojice prvků nespojených šipkou.

Příklady: Velmi názorný ilustrační příklad pochází z publikace L. Skuly:

Nechť a) až i) jsou následující relace:

a) $M = \{a, b, c, d\}$, $R = \{[a, b], [a, c], [c, a], [b, c], [c, c]\}$.

b) $M \neq \emptyset$, $R = \emptyset$. Prázdná relace na M (žádný prvek není v relaci s žádným).

c) $M \neq \emptyset$, $R = M \times M$. Univerzální relace (každý prvek je v relaci s každým).

d) $M \neq \emptyset$, $R = \{[x, x], x \in M\}$. Relace rovnosti (každý prvek je v relaci jen sám se sebou).

e) M je množina všech obyvatel města Brna, $R = \{[x, y], x \in M, y \in M; \text{osoby } x, y \text{ jsou narozeny ve stejném měsíci}\}$.

f) M je množina \mathbf{N} všech přirozených čísel, R je relace dělitelnosti na \mathbf{N} (uspořádaná dvojice přirozených čísel $[x, y] \in R$, právě když $x \mid y$).

g) M je množina všech trojúhelníků v rovině, R je relace podobnosti \sim (dva trojúhelníky jsou v relaci, právě když jsou podobné).

h) M je množina všech trojúhelníků v rovině, R je relace shodnosti \cong (dva trojúhelníky jsou v relaci, právě když jsou shodné).

i) Nechť X je neprázdná množina, nechť $M = \mathcal{P}(X)$. Pak $M \neq \emptyset$, R je relace inkluze \subset na množině M (uspořádaná dvojice množin $[A, B] \in R$, právě když $A \subset B$).

Vlastnosti relací a) až i) jsou uvedeny v následující tabulce. Symbol + značí, že daná relace uvedenou vlastnost má a symbol – značí, že tuto vlastnost nemá.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Reflexivita	-	-	+	+	+	+	+	+	+
Antireflexivita	-	+	-	-	-	-	-	-	-
Symetrie	-	+	+	+	+	-	+	+	-
Antisymetrie	-	+	$\pm *1$	+	-	+	-	-	+
Tranzitivita	-	+	+	+	+	+	+	+	+
Souvislost	-	-	+	$\pm *2$	-	-	-	-	$\pm *3$

$\pm *1$ Je-li M jednoprvková množina, pak univerzální relace na M je antisymetrická; pro víceprvkové množiny M nikoliv.

$\pm *2$ Je-li M jednoprvková množina, pak relace rovnosti na M je souvislá; pro víceprvkové množiny M nikoliv.

$\pm *3$ Relace inkluze je na množině $M = 2^X$ souvislá, právě když množina X je jednoprvková.

Ekvivalence a uspořádání

Relace ekvivalence a rozklad množiny

Poznámka Nyní se budeme zabývat speciálními relacemi definovanými na množině M , a to relacemi ekvivalence a uspořádání.

Definice Necht' M je neprázdná množina, necht' R je relace na množině M , která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Pak tato relace se nazývá relace ekvivalence. Necht' platí $[x, y] \in R$. Pak řekneme, že prvky x, y jsou ekvivalentní a píšeme $x \sim y$.

Příklad Necht' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak následující relace jsou relace ekvivalence na M :

a) $E_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, c], [c, a], [b, d], [d, b]\}$

b) $E_2 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [b, a]\}$

c) $E_3 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, b], [b, d], [d, b], [c, d], [d, c]\}$

d) $E_4 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$

e) $E_5 = M \times M$

Poznámka Z uzlových grafů všech pěti ekvivalencí z předchozího příkladu (náčrt si proveďte sami) je patrné, že tyto uzlové grafy nejsou souvislé (kromě relace E_5), ale že jistým způsobem “rozdělují” prvky množiny M do skupin. To nás vede k následující definici.

Definice Necht' M je neprázdná množina. Pak systém

$T = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ podmnožin množiny M nazveme rozklad množiny M , právě když platí:

(i) $A_i \neq \emptyset$ pro každý index $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$,

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = M$,

(iii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každou dvojici indexů $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Poznámka Všechny tři podmínky předchozí definice lze slovně formulovat takto:

Rozklad množiny M je systém **neprázdných** podmnožin množiny M s vlastností, že **každý** prvek množiny M patří **právě do jedné** z těchto podmnožin.

Zvýrazněná slova vyjadřují tři podmínky předchozí definice.

Příklad Necht' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak následující systémy jsou rozklady množiny M :

a) $T_1 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$

b) $T_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

c) $T_3 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$

d) $T_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

e) $T_5 = \{\{a, b, c, d\}\}$

Poznámka Prohlédnete-li si znovu uzlové grafy ekvivalencí z předchozího příkladu, uvidíte, že bloky (třídy rozkladu), na které jsou tyto uzlové grafy rozloženy, odpovídají rozkladům množiny M uvedeným v předchozím příkladu. To vede k následující větě.

Věta Necht' M je neprázdná množina, necht' E je relace ekvivalence na množině M . Pro každé $x \in M$ označme A_x množinu všech prvků množiny M , které jsou ekvivalentní s prvkem x , tedy

$$A_x = \{y \in M; [x, y] \in E\} = \{y \in M; x \sim y\}.$$
 Potom system

$T = \{A_x; x \in M\}$ je rozklad množiny M . Prvky systému T se nazývají třídy rozkladu množiny M .

Definice Rozklad T množiny M z předchozí věty se nazývá rozklad množiny M příslušný ekvivalenci E . Někdy užíváme též názvu rozklad indukovaný ekvivalencí E nebo rozklad generovaný ekvivalencí E .

Poznámka Tvrzení věty říká, že každá ekvivalence E na množině M jednoznačně generuje rozklad této množiny. Toto tvrzení platí i naopak, tzn. každý rozklad množiny M jednoznačně generuje ekvivalenci E na množině M . To je obsahem následující věty.

Věta Necht' T je rozklad neprázdné množiny M . Potom binární relace definovaná následujícím způsobem

$E = \{[x, y] \in M \times M; \exists X \in T: x \in X \wedge y \in X\}$ je relace ekvivalence na množině M .

Definice Ekvivalence E na množině M z předchozí věty se nazývá ekvivalence na množině M generovaná (nebo též indukovaná) rozkladem T této množiny.

Relace uspořádání a uspořádané množiny

Definice Necht' M je neprázdna množina. Necht' R je relace v množině M , která je antisymetrická a tranzitivní. Pak se tato relace nazývá uspořádání (v množině M). Je-li navíc relace R souvislá, nazývá se lineární uspořádání. Je-li relace R reflexivní, nazývá se toto uspořádání neostré, v případě antireflexivnosti relace R je toto uspořádání ostré.

Poznámka 2. 65 Z předchozí definice plyne, že kombinací „přívlastků“ lineární, ostré a neostré lze definovat celkem šest typů relací uspořádání v množině M . Přehledně je nyní uvedeme s využitím zavedených zkratk pro jednotlivé vlastnosti relací:

Nelineární ostré uspořádání v M má vlastnosti AS, T, ~~SO~~, AR;

Nelineární neostré uspořádání v M má vlastnosti AS, T, ~~SO~~, R;

Nelineární uspořádání v M , které není ostré ani neostré, má vlastnosti AS, T, ~~SO~~, R, ~~AR~~;

Ostré lineární uspořádání v M má vlastnosti AS, T, SO, AR;

Neostré lineární uspořádání v M má vlastnosti AS, T, SO, R;

Lineární uspořádání v M , které není ostré ani neostré, má vlastnosti AS, T, SO, R, ~~AR~~.

Místo nelineární uspořádání se někdy říká též částečné uspořádání.

Poznámka Relace uspořádání se někdy označuje některým z běžně užívaných symbolů $<$, \leq , $>$, \geq . V tom případě se např. místo zápisu $[x, y] \in <$ užívá zápis $x < y$. Tento zápis pak chápeme ve smyslu, že prvek x předchází v relaci uspořádání před prvkem y .

Příklad a) Necht' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak následující relace jsou relace uspořádání na M :

a) $U_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, c], [b, d]\}$ je neostré nelineární uspořádání;

b) $U_2 = \{[a, b]\}$ je ostré nelineární uspořádání;

c) $U_3 = \{[a, a], [b, c], [b, d], [c, d]\}$ je nelineární uspořádání, které není ostré ani neostré;

d) $U_4 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$ je neostré nelineární uspořádání.

Toto uspořádání na množině M je jediné, které je současně ekvivalencí na množině M ;

e) $U_5 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, d], [b, d], [b, a], [c, a], [d, a]\}$ je neostré lineární uspořádání;

f) $U_6 = \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\}$ je ostré lineární uspořádání;

g) $U_7 = \{[d, d], [a, d], [c, c], [a, b], [d, c], [d, b], [c, b]\}$ je lineární uspořádání, které není ostré ani neostré.

Příklad Necht' \mathbf{N} je množina všech přirozených čísel, necht' relace $<$ na množině \mathbf{N} označuje přirozené uspořádání všech přirozených čísel podle velikosti. Pak $<$ je ostré lineární uspořádání.

Poznámka Obsahem předmětu matematika na 1. stupni základní školy je zejména množina přirozených čísel, jejich vlastnosti a operace s nimi. Proto podle předchozí poznámky je nejdůležitějším typem uspořádání, kterým se nadále budeme zabývat, ostré lineární uspořádání.

Definice Necht' M je neprázdná množina, necht' U je relace uspořádání v množině M . Pak uspořádaná dvojice (M, U) se nazývá uspořádaná množina. Množina M je pole uspořádané množiny. Uspořádaná množina se též označuje $[M]$. Názvy uspořádaných množin lze upřesnit podle typů uspořádání, např. nelineárně uspořádaná množina, ostře lineárně uspořádaná množina apod.

Poznámka Charakterizaci konečných, ostře lineárně uspořádaných množin, lze vyslovit takto: V konečné, ostře lineárně uspořádané množině, má každý její prvek jednoznačně stanovené pořadí.

Poznámka Nyní zavedeme jednodušší, zkrácený zápis pro konečné, ostře lineárně uspořádané množiny. Necht' např. (K, U) je ostře lineárně uspořádaná množina definovaná takto:

$$(K, U) = (\{a, b, c, d\}, \{[c, d], [c, a], [c, b], [d, a], [d, b], [a, b]\}).$$

Tento zápis však je nepřehledný a neposkytuje přehlednou informaci o pořadí jejích prvků. Využijeme toho, že místo zápisu

$$[x, y] \in < \text{užíváme zápis } x < y. \text{ Proto lze psát } [K] = \lfloor \{c, d, a, b\} \rfloor ;$$

v tomto zápise vypíšeme do složených závorek prvky pole uspořádané množiny v tom pořadí, které je definováno relací ostrého lineárního uspořádání na dané množině. V dalších úvahách se ukáže výhodnost tohoto zkráceného zápisu.

Definice Necht' $[K]$ je ostře lineárně uspořádaná konečná množina.

Prvek $a \in [K]$ se nazývá první prvek množiny $[K]$, jestliže platí:

$(\forall x \in [K]) x \neq a \Rightarrow a < x$. Ve slovním vyjádření má první prvek ostře lineárně uspořádané množiny tu vlastnost, že předchází před všemi ostatními prvky této množiny.

Definice Necht' $[K]$ je ostře lineárně uspořádaná konečná množina.

Prvek $b \in [K]$ se nazývá poslední prvek množiny $[K]$, jestliže platí:

$(\forall x \in [K]) x \neq b \Rightarrow x < b$. Ve slovním vyjádření má poslední prvek ostře lineárně uspořádané množiny tu vlastnost, že jej předchází všechny ostatní prvky této množiny.

Poznámka Vidíme, že označení první a poslední prvek má stejný význam, jaký známe z běžného života. Představíme-li si konečnou ostře lineárně uspořádanou množinu jako frontu osob např. v supermarketu u pokladny, pak první je ten, který stojí před všemi ostatními, zatímco poslední je ten, před kterým stojí všichni ostatní. S pojmem první prvek souvisí poslední definice této části.

Definice Necht' $[M]$ je ostře lineárně uspořádaná množina (konečná nebo nekonečná). Pak řekneme, že tato množina je dobře uspořádaná a uspořádání na této množině nazveme dobré uspořádání, jestliže každá neprázdná podmnožina množiny $[M]$ má první prvek.

Věta Necht' $[M]$ je konečná, ostře uspořádaná množina. Pak platí:

Množina $[M]$ je lineárně uspořádaná \Leftrightarrow množina $[M]$ je dobře uspořádaná. Každá konečná ostře lineárně uspořádaná množina je tedy dobře uspořádaná a naopak, každá konečná dobře uspořádaná množina je ostře lineárně uspořádaná. Tuto větu oceníme později.

ZOBRAZENÍ

Pojem zobrazení je jedním z nejdůležitějších pojmů současné matematiky s aplikacemi už v učivu matematiky 1. stupně ZŠ. Definuje se na střední škole jako speciální typ binární relace.

Definice Necht' A, B jsou množiny. Binární relace $f \subset A \times B$ z množiny A do množiny B se nazývá zobrazení z množiny A do množiny B , jestliže ke každému prvku $x \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $y \in B$ takový, že $[x, y] \in R$.

Poznámka Zobrazení z množiny A do množiny B lze chápat jako jistý předpis, který každému prvku z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B (tzn. jeden nebo žádný).

Je-li f zobrazení z množiny A do množiny B , budeme často používat zápis $f : A \rightarrow B$ a místo zápisu $[x, y] \in f$ budeme psát $f(x) = y$.

V tomto případě prvek x se nazývá vzor prvku y a prvek y se nazývá obraz prvku x . Množina A se nazývá definiční obor zobrazení

$f : A \rightarrow B$ a označuje se $D(f)$. Množina všech obrazů všech prvků množiny A , tj. množina $\{y \in B; \exists x \in A: f(x) = y\}$ se nazývá obor hodnot zobrazení $f : A \rightarrow B$ a označuje se $H(f)$. Je-li v definici zobrazení $A = B$, pak hovoříme o zobrazení v množině A .

Příklad Necht' $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{u, v\}$. Necht' f, g jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto: $f = \{[a, v], [b, v], [c, u]\}$, $g = \{[a, u], [b, v], [b, u], [c, v]\}$.

Vidíme, že ke každému prvku $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ s vlastností $[x, y] \in f$. To znamená, že binární relace f je zobrazení z množiny A do množiny B . U relace g si povšimněte, že prvek $b \in A$ se zobrazí na prvek $u \in B$ a současně na prvek $v \in B$. Proto binární relace g není zobrazením z množiny A do množiny B .

Poznámka Protože zobrazení je speciální případ binární relace, je možno využít všechny způsoby zadání i znázornění binárních relací. Zobrazení lze tedy zadat výčtem uspořádaných dvojic nebo pomocí výrokové formy o dvou proměnných (tedy předpisem, podle kterého přiřadíme každému vzoru jeho obraz). Např. necht' f je zobrazení z množiny \mathbf{Z} všech celých čísel do množiny \mathbf{N}_0 všech přirozených čísel předpisem $f(x) = |x|$, které každému celému číslu přiřadí jeho absolutní hodnotu.

U grafického znázornění zobrazení lze využít kartézské i uzlové grafy, analogicky jako u binárních relací.

Poznámka Definiční obor zobrazení f z množiny A do množiny B může být roven množině A nebo může být její vlastní podmnožinou, stejně tak obor hodnot tohoto zobrazení může být roven množině B nebo může být vlastní podmnožinou této množiny (připomeňme analogické možnosti u prvního a druhého oboru binární relace). Podle toho, který případ nastane, rozlišujeme čtyři možné typy zobrazení.

Definice Necht' f je zobrazení z množiny A do množiny B .

1. Necht' $D(f) \subset A$, $D(f) \neq A$, $H(f) \subset B$, $H(f) \neq B$. Pak f se nazývá zobrazení z množiny A do množiny B .

2. Necht' $D(f) = A$, $H(f) \subset B$, $H(f) \neq B$. Pak f se nazývá zobrazení množiny A do množiny B .

3. Necht' $D(f) \subset A$, $D(f) \neq A$, $H(f) = B$. Pak f se nazývá zobrazení z množiny A na množinu B .

4. Necht' $D(f) = A$, $H(f) = B$. Pak f se nazývá zobrazení množiny A na množinu B .

Poznámka V případě 1. předchozí definice je název zobrazení totožný s obecným názvem zobrazení podle definice 3. 1. Zde však předložky „z“ a „do“ mají význam, který určuje typ tohoto zobrazení. V případě 2. a 4. se někdy užívá názvu zobrazení celé množiny A do množiny B (na množinu B). Doporučujeme používat tento delší název, neboť vypuštění předložky „z“ z definice podstatně mění informaci o typu zobrazení. Poznamenejme ještě, že v řadě publikací se zobrazení z množiny A (případ 1. a 3.) vůbec nedefinuje a každé zobrazení se rozumí jako zobrazení celé množiny A . My však budeme v dalším studiu důsledně oba typy rozlišovat (zobrazení množiny A i zobrazení z množiny A).

Příklad Necht' $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{u, v\}$. Necht' f, g, h, k jsou binární relace z množiny A do množiny B definované takto:

$$f = \{[a, v], [b, v], [c, u]\},$$

$$g = \{[a, u], [b, v]\},$$

$$h = \{[a, v], [b, v], [c, v]\},$$

$$k = \{[a, u], [b, u]\}.$$

Pak f je zobrazení celé množiny A na množinu B , g je zobrazení z množiny A na množinu B , h je zobrazení celé množiny A do množiny B a k je zobrazení z množiny A do množiny B .

Definice Necht' f je zobrazení z množiny A do množiny B . Necht' každým dvěma různým prvky množiny A jsou přiřazeny dva různé

prvky množiny B. Pak zobrazení f je prosté zobrazení z množiny A do množiny B. Někdy se též užívá zkrácené formulace, podle níž v prostém zobrazení každé dva různé vzory mají různé obrazy.

Poznámka Formálně lze definice prostého zobrazení vyjádřit takto:

$(\forall x, y \in A) \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, nebo též v obměněném tvaru

$(\forall x, y \in A) \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Definice Necht' f je zobrazení z množiny A do množiny B. Necht' f^{-1} je inverzní relace k relaci f z množiny B do množiny A (ve smyslu inverzní relace definované v předchozím textu). Je-li tato relace f^{-1} zobrazením, pak se nazývá inverzní zobrazení k zobrazení f .

Definice Necht' f je zobrazení z množiny A do množiny B. Pak zobrazení f je prosté zobrazení, právě když inverzní relace f^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A.

Příklad Necht' f, g, h, k jsou zobrazení definovaná dříve. Pak inverzní relace k těmto zobrazením jsou následující:

$$f^{-1} = \{[v, a], [v, b], [u, c]\},$$

$$g^{-1} = \{[u, a], [v, b]\},$$

$$h^{-1} = \{[v, a], [v, b], [v, c]\},$$

$$k^{-1} = \{[u, a], [u, b]\}.$$

Je ihned vidět, že relace f^{-1}, h^{-1}, k^{-1} nejsou zobrazení, zatímco g^{-1} je zobrazení množiny B do množiny A. Zobrazení g tedy je prosté zobrazení, zatímco zobrazení f, h, k prostá nejsou.

Poznámka Místo názvu prosté zobrazení se často užívá názvu injektivní zobrazení. Jsou-li množiny A , B konečné, pak existence injektivního zobrazení z množiny A do množiny B vynucuje, že počet prvků množiny B musí být větší nebo roven počtu prvků množiny A .

Poznámka Pro zobrazení na množinu B (typy 3. a 4. definice) se často užívá názvu surjektivní zobrazení (čti „surjektivní“). Jsou-li množiny A , B konečné, pak existence surjektivního zobrazení z množiny A na množinu B vynucuje, že počet prvků množiny B musí být menší nebo roven počtu prvků množiny A .

Definice Necht' f je zobrazení celé množiny A na množinu B , které je prosté. Pak f se nazývá vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B . Množiny A , B jsou v tomto případě ekvivalentní, píšeme $A \sim B$. Je-li navíc $A = B$, pak se prosté zobrazení celé množiny A na množinu A nazývá permutace množiny A .

Poznámka Místo českého názvu vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B se užívá též názvu bijektivní zobrazení množiny A na množinu B . Jsou-li množiny A , B konečné, pak existence bijektivního zobrazení množiny A na množinu B vynucuje, že počet prvků množiny B musí roven počtu prvků množiny A . Dvě ekvivalentní konečné množiny tedy mají stejný počet prvků.

Poznámka Pro nekonečné množiny je situace složitější (pojem počet prvků nekonečné množiny nemá smysl). Uvedeme příklad: Necht' \mathbf{N} je množina všech přirozených čísel, necht' S je množina všech nenulových sudých čísel. Platí tedy $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $S = \{2, 4, 6, \dots\}$. Necht' f je zobrazení množiny \mathbf{N} na množinu S definované takto:

$(\forall x \in \mathbf{N}) f(x) = 2x$. Pak zřejmě zobrazení f je vzájemně jednoznačné zobrazení celé množiny \mathbf{N} na množinu S . Platí tedy $\mathbf{N} \sim S$, přestože S je vlastní podmnožina množiny \mathbf{N} ($S \subset \mathbf{N}$, $S \neq \mathbf{N}$).

Poznámka Tuto vlastnost nekonečných množin (nekonečná množina může být ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou), uvedenou v předchozí poznámce, lze užít k definici konečné a nekonečné množiny. Povšimněme si důležitý fakt, že následující definice definují konečnou a nekonečnou množinu bez použití obratu „počet prvků“. Tento aspekt oceníme později při konstrukci oboru všech přirozených čísel.

Definice Množina je nekonečná, je-li ekvivalentní s nějakou svou vlastní podmnožinou. Množina je konečná, není-li ekvivalentní s žádnou svojí vlastní podmnožinou.

Poznámka Definovali jsme permutaci množiny A jako prosté zobrazení množiny A na množinu A . Nyní se budeme podrobněji věnovat permutacím konečných množin. Nejprve zavedeme vhodné označení:

Poznámka Necht' A je konečná množina, necht' p je permutace množiny A , tzn. prosté zobrazení množiny A na množinu A . Necht' $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, necht' permutace p je dána výčtem prvků takto: $p = \{[a_1, p(a_1)], [a_2, p(a_2)], \dots, [a_n, p(a_n)]\}$. Pak tuto permutaci budeme zapisovat ve formě dvouřádkové tabulky (tzv. matice) takto:

$$p = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ p(a_1) & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix}.$$

Do horního řádku tabulky zapíšeme všechny prvky množiny A (vzory), do spodního řádku zapíšeme jejich obrazy v permutaci p .

Věta Necht' množina A je konečná a má n prvků. Pak existuje $n!$ různých permutací množiny A .

Příklad Necht' $A = \{1, 2, 3\}$. Pak na množině A existuje 6 permutací:

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & f &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definice Necht' f je zobrazení z množiny A do množiny B a g necht' je zobrazení z množiny B do množiny C . Potom binární relace $f \circ g$ z množiny A do množiny C definovaná vztahem

$$f \circ g = \{[x, y] \in A \times C; \exists z \in B : [x, z] \in f \wedge [z, y] \in g\}$$

je také zobrazení. Toto zobrazení nazýváme složené zobrazení ze zobrazení f a g (v tomto pořadí).

Poznámka Protože zobrazení je speciální typ binární relace, je skládání zobrazení definováno stejně jako skládání relací. Při skládání zobrazení $f \circ g$ nejprve aplikujeme zobrazení f a potom zobrazení g . Z definice složeného zobrazení vyplývá, že složené zobrazení ze zobrazení f a g je možné definovat pouze tehdy, když obor hodnot zobrazení f je podmnožinou definičního oboru zobrazení g .

Příklad Necht' $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{u, v\}$. Necht' zobrazení $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ jsou zadána takto:

$f = \{[a, z], [b, z], [c, y], [d, x]\}$, $g = \{[x, u], [y, u], [z, v]\}$. Pak složené zobrazení $f \circ g$ je následující: $f \circ g = \{[a, v], [b, v], [c, u], [d, u]\}$, zatímco složené zobrazení $g \circ f$ není definováno.

Poznámka Skládání zobrazení není obecně komutativní, a to ani tehdy, jsou-li obě zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$ definována. Např. pro permutace a, b na množině $A = \{1, 2, 3\}$ z příkladu platí

$a \circ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f$, $b \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = d$. Platí ale užitečné tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Věta Necht' f, g, h jsou tři zobrazení taková, že všechna zapsaná složená zobrazení jsou definována. Pak platí:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tzn. skládání zobrazení je asociativní.
2. Jsou-li f, g prostá zobrazení, pak $f \circ g$ je prosté zobrazení.
3. Jsou-li f, g zobrazení bijektivní, pak $f \circ g$ je rovněž bijektivní.
4. Jsou-li f, g permutace množiny M , pak $f \circ g$ je rovněž permutace množiny M .

Poznámka Již jsme definovali 6 permutací množiny $A = \{1, 2, 3\}$.

Podle předchozí věty má smysl určit složené permutace pro každou dvojici permutací a, b, c, d, e, f . Tyto složené permutace zapíšeme do tabulky (v předchozím příkladu byla již jedna dvojice permutací složena). S touto tabulkou budeme pracovat později.

o	a	b	c	d	e	f
a	e	f	d	c	a	b
b	d	e	f	a	b	c
c	f	d	e	b	c	a
d	b	c	a	f	d	e
e	a	b	c	d	e	f
f	c	a	b	e	f	d

Příklad Necht' \mathbf{Z} je množina všech celých čísel. Necht' jsou dána dvě zobrazení f, g v množině \mathbf{Z} : $f(x) = -x$, $g(x) = x + 1$ pro každé $x \in \mathbf{Z}$.

Pak složená zobrazení jsou následující:

$f \circ g(x) = -x + 1$, $g \circ f(x) = -(x + 1)$ pro každé $x \in \mathbf{Z}$.