**Kartézský součin množin, binární relace z množiny do množiny**

**Kartézským součinem** dvou množin A, B rozumíme množinu **A x B** = {[x,y]; xA  yB}, tj. množinu všech uspořádaných dvojic [x,y], kde xA a yB.

Znázornění kartézského součinu **A x B** se provede tzv. **kartézským grafem** – sestrojíme dvě na sebe kolmé přímky x, y (vodorovnou a svislou). Na vodorovnou přímku x (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny A, z níž vybíráme první složky dvojic, na svislou přímku y (osu) znázorníme pomocí bodů všechny prvky množiny B, z níž vybíráme druhé složky dvojic.Uspořádanou dvojici [*x,y*]A x B znázorníme bodem, který je průsečíkem dvou přímek procházejících body *x, y* a rovnoběžných po řadě se svislou a vodorovnou osou.

**Binární relací R** v neprázdné množině M rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M x M.

Znázornění binárních relací se provede:

* **Kartézským grafem** relace R – analogicky jako u kartézského součinu výše.
* **Uzlovým grafem** relace R v množině M - v rovině znázorníme pomocí bodů (tzv. uzlů) všechny prvky množiny M . Uspořádanou dvojici [*x,y*]R znázorníme pomocí šipky (tzv. orientované hrany), která vychází z uzlu *x* a směřuje do uzlu *y*. V případě, že *x = y*, nazýváme šipku smyčkou. Pokud jsou v relaci R dvojice [*x,y*] a [y*,x*], znázorníme je “dvojšipkou” (tzv. neorientovanou hranou).

*Definice 1:* **Binární relací R**  z množiny M do množiny N rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M x N.

*Příklad 1.* Jsou dány množiny M = {x, y, z}, N = {a, b}.

* Kartézský součin množin M, N: **M x N** = {[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]}
* Binární relace **R** z množiny M do množiny N je libovolná podmnožina množiny **M x N**, tedy např.:

R1 = {[x,a]},

R2 = {[x,a], [y,a], [y,b]},

R3 = {[z,a], [y,a], [z,b], [x,b]},

R4 = {[x,a], [x,b], [y,a], [y,b], [z,a], [z,b]} = **M x N** (tj. **úplná relace** z M do N)

R5 = φ (tj. **nulová relace** z M do N)

Znázornění binární relace **R** z množiny M do množiny N se provede:

* **Kartézským grafem** – analogicky jako u kartézského součinu množin výše.
* **Uzlovým grafem** – vysvětleno níže na Příkladu 2.

*Příklad 2.* Jsou dány množiny M = {1, 2, 3, 4, 5}, N = {a, b, c, d} a relace R= {[2,a], [3,a], [4,b], [5,d]} z množiny M do množiny N. Sestrojte kartézský a uzlový graf relace R.

*Definice 2:* Nechť R je relace z množiny A do množiny B a nechť S je relace z množiny B do množiny C. Pak relace daná vztahem

|  |
| --- |
| **R ○ S** = {[x,y]  A x C; existuje b  B tak, že [x,b]  **R**  [b,y]  **S**} |

se nazývá **složená relace** **R ○ S**z relací **R** a **S**.

*Poznámka.* Relaci **R ○ S**čteme: **„S** po **R“**.

*Příklad 3.* Jsou dány množiny A = {a, b, c, d}, B = {x, y, z}, C = {k, l, m, n}. Dále je dána relace **R** = {[a,x], [c,y], [c,z]} z množiny A do množiny B a relace **S** = {[x,k], [x,l], [x,m], [x,n], [y,k], [y,n]} z množiny B do množiny C. Určete relaci **R ○ S.**

*Definice 3:* Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B. Relace **R-1** z množiny B do množiny A daná vztahem

|  |
| --- |
| **R-1** = {[y,x]  B x A: [x,y]  **R**} |

se nazývá **relace inverzní** k relaci **R**.

*Poznámka.* Vzhledem k *Definici 3* platí:

* **R**  A x B
* **R-1**  B x A.

*Příklad 4.* Jsou dány množiny A = {a, b, c, d}, B = {x, y, z} a relace **R** = {[a,x], [a,y], [b,z], [c,y], [d,x]} z množiny A do množiny B. Určete relaci **R-1**(tj. relaci inverzní k relaci **R**).

*Poznámka.* Pro libovolnou relaci **R** z množiny A do množiny B platí: **(R-1)-1** = **R.**

**Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení**

*Definice 4:* Nechť **R** je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku a A existuje nejvýše jeden prvek b B takový, že [a,b]  **R.** Tato relace se nazývá **zobrazení z množiny A do množiny B.** Značíme R: A → B.

*Definice 5:* Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

* Jestliže [a,b]  **R**, pak prvek a A nazýváme **vzorem** prvku b B v zobrazení **R**; prvek b B nazýváme **obrazem** prvku a A v zobrazení **R**.
* Množina O1(**R**) = {a A: existuje b B takové, že [a,b]  **R**} se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí O1(**R**)  A.
* Množina O2(**R**) = {b B: existuje a A takové, že [a,b]  **R**} se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. O2(**R**)  B.

*Příklad 5.* Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) **R1** = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) **R2** = {[x,a], [z,b]},

c) **R3** = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

I) Je – li O1(**R**) = A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení množiny A do množiny B**.

II) Je – li O1(**R**)  A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení z množiny A na množinu B**.

III) Je – li O1(**R**) = A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení množiny A na množinu B**.

IV) Je – li O1(**R**)  A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení z množiny A do množiny B**.

*Příklad 6.* Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná?

1) **R** = {[x,z], [c,c], [y,c]}.

2) **S** = {[x,z], [y,z], [a,z], [c,x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

1) jedno zobrazení **R1** typu z množiny A do množiny B,

2) jedno zobrazení **R2** množiny A do množiny B,

3) jedno zobrazení množiny A na množinu B,

4) jedno zobrazení z množiny A na množinu B.

*Definice 5:* Zobrazení **R** z množiny A do množiny B se nazývá **prosté** právě tehdy, když relace **R-1** je zobrazení z množiny B do množiny A.

*Důsledek:* Zobrazení **R** z množiny A do množiny B je **prosté** právě tehdy, když

a) ke každému y B existuje nejvýše jedno x A takové, že [x,y]  **R,**

b) ke každým dvěma různým vzorům x1, x2  A přiřadíme dva různé obrazy y1, y2  B

v zobrazení **R.**

Hovoříme pak o:

* Prostém zobrazení množiny A do množiny B,
* Prostém zobrazení z množiny A na množinu B,
* Prostém zobrazení množiny A na množiny B,
* Prostém zobrazení z množiny A do množiny B.

*Definice 6:* Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme **bijektivní zobrazení** nebo také **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

*Příklad 7.* Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) **R1** = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) **R2** = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

c) **R3** = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}.

*Definice 7:* **Permutací** konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).

*Příklad 8.* Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {x, y, z}.

*Definice 8:* Nechť **R** je zobrazení z množiny M do množiny N a **S** je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace **R ○ S**je zobrazení a nazývá se **složené zobrazení** ze zobrazení **R** a **S**.

*Příklad 9.* Složte permutace **P2 ○ P3**, **P3 ○ P2**, **P4 ○ P6** z *Příkladu 8.*

**Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny**

*Definice 9:* Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.

*Příklad 10.* Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

*Poznámka.* Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin M má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin M vytváří rozklad systému M na třídy ekvivalentních množin.

*Příklad 11.* Je dán systém množin M = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2}, C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {∆, ∆, ∆}, F = { \*, \*}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému M jsou ekvivalentní.

*Definice 10:* Řekneme, že množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

*Definice 11:* Řekneme, že množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

*Poznámka.* Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když

M  N  M ≠ N.