**Zobrazení z množiny do množiny, typy zobrazení**

*Nechť* ***R*** *je relace z množiny A do množiny B splňující vlastnosti: Ke každému prvku a A existuje nejvýše jeden prvek b B takový, že [a,b] * ***R.*** *Tato relace se nazývá* ***zobrazení z množiny A do množiny B.*** *Značíme R: A → B.*

Nechť **R** je zobrazení z množiny A do množiny B.

* Jestliže [a,b]****R**, pak prvek a**A nazýváme **vzorem** prvku b** B v zobrazení **R**; prvek b ** B nazýváme **obrazem** prvku a ** A v zobrazení **R**.
* Množina O1(**R**) = {a ** A: existuje b ** B takové, že [a,b] ** **R**} se nazývá **definiční obor** zobrazení **R**. Platí O1(**R**)  A.
* Množina O2(**R**) = {b** B: existuje a** A takové, že [a,b]** **R**} se nazývá **obor hodnot** zobrazení **R**. Platí O2(**R**)  B.

Rozlišujeme následující **typy zobrazení R**:

* I) Je–li O1(**R**) = A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení množiny A do množiny B**.
* II) Je–li O1(**R**)  A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení z množiny A na množinu B**.
* III) Je–li O1(**R**) = A  O2(**R**) = B, nazývá se **R zobrazení množiny A na množinu B**.
* IV) Je–li O1(**R**) A  O1(**R**) ≠ A  O2(**R**)  B  O2(**R**) ≠ B, nazývá se **R zobrazení z množiny A do množiny B**.



*Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá* ***prosté*** *zobrazení*

*právě tehdy, když relace Z−1 je zobrazení z množiny B do množiny A.*

Uzlový graf prostého zobrazení Z z množiny A do množiny B je charakteristický tím, že do každého bodu, který znázorňuje prvek y ∈ B, směřuje nejvýše jedna šipka. Můžeme tedy říci, že platí následující věta:

Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když pro každé

y ∈ B platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku x ∈ A v zobrazení Z.

*V praxi používáme pro rozlišení prostého zobrazení následující tvrzení:*

*Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté právě tehdy, když* ***každé dva různé vzory mají různé obrazy.***

**Př. 1**: Jsou dány množiny A = {a, b, c} a B = {u, v}. Nechť R1, R2, R3, R4 jsou

binární relace z množiny A do množiny B definované takto:

a) R1 = {[a, v], [b, v], [c, u]}, b) R2 = {[a, u], [b, v]},

c) R3 = {[a, v], [b, v], [c, v]}, d) R4 = {[a, u], [b, u]}.

Rozhodněte, zda tyto relace jsou zobrazení z množiny A do množiny B. Pokud ano, určete typ zobrazení.

a) R1 je zobrazení množiny A na množinu B, není prosté.

b) R2 je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

c) R3 je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

d) R4 je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

**Př. 2**:Jsou dány množiny A = {x, y, z}, B = {a, b}. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení z A do B.

 a) **R1** = {[x,a], [y,b], [z,a], [z,b]},

b) **R2** = {[x,a], [z,b]},

 c) **R3** = {[x,a], [y,a], [z,a]}.

**R1**není zobrazení.

**R2**je prosté zobrazení z množiny A na množinu B.

**R3**je zobrazení celé množiny A na množinu B, není prosté (nemůže být).

**Př. 3**:Jsou dány množiny A = {x, y, a, c}, B = {c, x, b, z}.

a) Rozhodněte, o jaký typ zadaných zobrazení se jedná.

R = {[x, z], [c, c], [y, c]}, S = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, x]}.

b) Zapište výčtem prvků jednu binární relaci z množiny A do množiny B, která není zobrazením.

c) Zapište výčtem prvků

 1) jedno zobrazení **R1** z množiny A do množiny B,

2) jedno zobrazení **R2** množiny A do množiny B,

3) jedno zobrazení **R3** množiny A na množinu B,

4) jedno zobrazení **R4** z množiny A na množinu B.

Řešení: a) R je zobrazení z množiny A do množiny B, není prosté.

 S je zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

b) T = {[x, z], [x, b], [a, z], [c, x]}.

c) **R1** = {[x, z]}, je prosté.

 **R2** = {[x, z], [y, z], [a, z], [c, z]}, není prosté.

 **R3** = {[x, c], [y, b], [a, z], [c, x]}, je prosté.

 **R4** neexistuje.

*Prosté zobrazení množiny A na množinu B nazýváme* ***bijektivní zobrazení*** *nebo také* ***vzájemně jednoznačné zobrazení****.*

**Př. 4**:Jsou dány množiny A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) **R1** = {[1,a], [2,c], [3,d]},

b) **R2** = {[1,a], [2,c], [3,d], [4,a]},

c) **R3** = {[2,a], [1,c], [3,b], [4,d]}. Vzájemně jednoznačné zobrazení.

a) Prosté zobrazení z množiny A do množiny B.

b) Zobrazení množiny A do množiny B, není prosté.

c) Prosté zobrazení množiny A na množinu B.

***Permutací*** *konečné množiny A nazýváme každé prosté zobrazení množiny A na množinu A (vzájemně jednoznačné zobrazení).*

**Př. 5**:Zapište všechny permutace tříprvkové množiny A = {1, 2, 3}.

a = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\end{matrix}\right)$ , b = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\end{matrix}\right)$ , c = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\2&1&3\end{matrix}\right)$ ,

d = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}\right)$ , e = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix}\right)$ , f = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\end{matrix}\right)$ .

***Definice:*** *Nechť* ***R*** *je zobrazení z množiny M do množiny N a* ***S****je zobrazení z množiny N do množiny K. Pak relace* ***R ○ S****je zobrazení a nazývá se* ***složené zobrazení*** *ze zobrazení* ***R*** *a* ***S****.*

**Př. 6:** Jsou dána zobrazení R, S v množině A = {1, 2, 3, 4} takto:

 R = {[1, 3], [4, 2], [2, 3], [3, 1]},

 S = {[1, 1], [4, 2], [2, 1], [3, 4]}.

Určete složené relace R ○ S, S ○ R.

*Řešení:* R ○ S = {[1, 4], [4, 1], [2, 4], [3, 1]},

 S ○ R = {[1, 3], [4, 3], [2, 3], [3, 2]}. Vidíme, že R ○ S  S ○ R.

*Složení dvou zobrazení je vždy zobrazení, složení dvou permutací je permutace.*

**Př. 7**:Složte permutace b ○ c,  f ○ d, e ○ b z předchozího příkladu.

b ○ c = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}\right)$ = d , f ○ d = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\end{matrix}\right)$ = b, e ○ b = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\2&1&3\end{matrix}\right)$ = c.

Povšimněte si, že platí e ○ d = d ○ e = $\left(\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\end{matrix}\right)$, což je identická permutace. Obě permutace d, e jsou navzájem inverzní.

*Řekneme, že množiny A, B jsou* ***ekvivalentní*** *právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Značíme A ~ B.*

**Př. 8***:* Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y}, C = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které množiny jsou ekvivalentní.

Ř: Množiny A, B nejsou ekvivalentní (neexistuje prosté zobrazení množiny A na množinu B). Množiny A, C jsou ekvivalentní (existuje prosté zobrazení množiny A na množinu C, například R = {[a,3],[b,1],[c,2]}), tj. **A ~ C**.

*Množina M je* ***vlastní podmnožinou*** *množiny N právě tehdy, když M je podmnožinou N a současně M ≠ N.*

*Řekneme, že množina A je* ***konečná*** *právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.*

*Řekneme, že množina B je* ***nekonečná*** *právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.*

**Př. 9**: Uvažujme množinu **ℕ** všech přirozených čísel a množinu S všech kladných sudých čísel. Zjistěte, zda jsou ekvivalentní.

*Řešení*: Připomeneme, že ℕ = {1, 2, 3, 4, 5,…}, S = {2, 4, 6, 8 , 10,…}.

Uvažujme relaci R = {[x,y] ϵ ℕ  S; y = 2x}.

Relace R je prosté zobrazení množiny ℕ na množinu S, neboť

ke každému x ϵ ℕ existuje právě jedno y ϵ S takové, že [x,y] ϵ R,

ke každému y ϵ S existuje právě jedno x ϵ ℕ takové, že [x,y] ϵ R.

 Tedy ℕ ~ S.

Množina ℕ všech přirozených čísel je nekonečná, neboť je ekvivalentní s množinou S všech kladných sudých čísel, přičemž S je vlastní podmnožinou množiny ℕ.

*Nechť A, B jsou* ***konečné*** *množiny. Pak platí: A ~ B  , tedy dvě konečné množiny jsou ekvivalentní, právě když mají stejný počet prvků.*

**Př. 10**: Jsou dány množiny M =  a N = .

 a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.

 b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete jeho typ.

 c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením.

 Pokud ano, určete, zda je prosté.

 d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.

 e) Na množině N definujte dvě různé permutace P1, P2 a určete permutace P1•P2

 a P2•P1.

Řešení: a) R = {[2, b], [2, c], [3, a]}.

b) Z1 = {[c, 4]}. Prosté zobrazení z N do M.

 Z2 = {[a, 4], [b, 4], [c, 1], [d, 1]}. Zobrazení celé N do M, není prosté.

c) R•Z1 = {[2, 4]}. Prosté zobrazení z M do M.

 R•Z2 = {[2, 4], [2, 1], [3, 4]}. Není zobrazení.

d) B1 ={[a, 4], [b, 3], [c, 2], [d, 1]}, B2 ={[a, 2], [b, 4], [c, 3], [d, 1]}. Platí A ~ B.

e) P1 = {[a, b], [b, c], [c, d], [d, a]}, P2 = {[a, c], [b, d], [c, b], [d, a]}.

Jinak zapsáno P1 = $\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a&b\\b&c\end{matrix}&\begin{matrix}c&d\\d&a\end{matrix}\end{matrix}\right)$ , P2 = $\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}&\begin{matrix}c&d\\b&a\end{matrix}\end{matrix}\right)$.

P1 • P2 = $\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a&b\\d&b\end{matrix}&\begin{matrix}c&d\\a&c\end{matrix}\end{matrix}\right)$ , P2 • P1 = $\left(\begin{matrix}\begin{matrix}a&b\\d&a\end{matrix}&\begin{matrix}c&d\\c&b\end{matrix}\end{matrix}\right)$.

**Př. 11**: Je dána množina M = . V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:

 R = ,

 T = ,

 U = ,

 V = .

a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení

 v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací

 permutací na množině M?

 b) Zapište relace R-1, V-1, V•V, U•V, R•U, R•(V•U). Je některá z těchto

 relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

Řešení: a) R = {[2, 3], [3, 2], [1, 1], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.

 T = {[1, 1], [1, 2], [1, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [2, 3]}. Není zobrazení.

 U = {[1, 2], [2, 3]}. Prosté zobrazení z M do M.

 V = {[1, 3], [2, 1], [3, 2]}. Permutace množiny M.

b) R-1 = {[3, 2], [2, 3], [1, 1], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.

 V-1 = {[3, 1], [1, 2], [2, 3]}. Permutace množiny M.

 V•V = {[1, 2], [2, 3], [3, 1]}. Permutace množiny M.

 U•V = {[1, 1], [2, 2]}. Prosté zobrazení z M do M.

 R•U = {[3, 3], [1, 2], [2, 3]}. Zobrazení celé M do M, není prosté.

 V•U = {[2, 2], [3, 3]}. Prosté zobrazení z M do M.

R•(V•U) = {[2, 3], [3, 2], [2, 2], [3, 3]}. Není zobrazení.