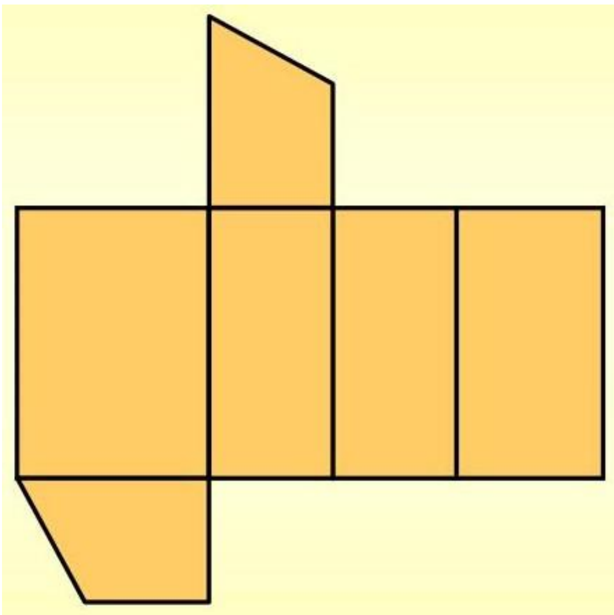
Měření geometrických útvarů

Jitka Panáčová

(pracovní verze textu)

duben 2020



1. Předškolní věk: Porovnávání délek a jednoduchá měření

V této kapitole si přiblížíme zkušenosti dětí v předškolním věku, na které navazují v matematice 1. stupně ZŠ

V předškolním věku děti provádějí jednoduché činnosti, kterými jsou připravovány na měření délky úsečky. Jednou z jejich základních činností je **porovnávání** nejdříve dvou předmětů. Vyhledávají předměty stejné délky, v různých stavebnicích se setkávají se shodnými předměty. Při manipulativních činnostech například při stříhání proužků papíru téže délky dle daného vzoru si připravují modely úseček, i když se často dopouští nepřesností, kdy vystřižený proužek je kratší nebo delší než zadaný vzor.

Předškoláci rozlišují velikosti předmětů, jsou schopni vybrat předměty **největší** nebo **nejmenší**. Představu o velikosti objektů získávají vzájemným porovnáváním rozměrů, odhadem a představa jednotky je ještě velmi nepřesná.

Významné pro praxi jsou odhady výsledků porovnávání, kdy porovnávané předměty jsou umístěny paralelně vele sebe (např. dvě děti, dvě jablka apod.). Součástí měření je tzv. vyplňování prostoru nebo roviny, kdy zjišťujeme, kolik korálek se vejde například do skleničky apod. Jedná se vlastně o elementární formu měření objemu či obsahu.

Veškerá měření provádí předškoláci jen pomocí porovnávaní, přičemž se rozvíjí schopnost porovnávat zrakem.

2. Měření geometrických útvarů – základní pojmy

Na ZŠ s SŠ se žáci učí poznávat, pojmenovávat a používat geometrické útvary a jejich vlastnosti, studují jejich tvar, polohové vztahy atd. Významnou vlastností útvarů charakterizuje jejich **velikost**, kterou získáme měřením.

Měření je určování velikosti fyzikální veličiny příslušným měřidlem ve zvolených jednotkách, tj. ve zjištění počtu těchto jednotek obsažených v měřené veličině. Připomeňme, že **veličinou** rozumíme pojem, kterého používáme ke kvalitativnímu a kvantitativnímu popisu jevů, stavů a těles.

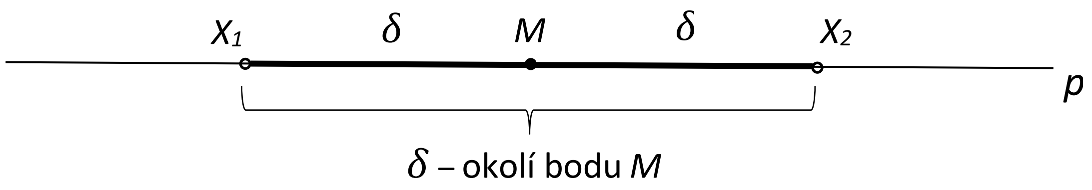
Ke stanovení velikosti útvaru dospějeme jeho měřením, kdy základem je tzv. **Jordanova teorie míry**. Je však nejprve třeba rozhodnout, které útvary lze měřit, tj. zavést pojem **měřitelného útvaru**, k čemuž bude třeba zavést základní topologické pojmy.

2.1 Topologické pojmy

- **Okolím bodu *M*** v prostoru $\boldsymbol{E_n}$ je množina bodů $\{X \in \boldsymbol{E_n}; |MX| < \delta\}$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$. Okolí bodu M tedy obsahuje všechny body prostoru $\boldsymbol{E_n}$, jejichž vzdálenost od bodu M je menší než zvolené číslo δ. Budeme-li mít na mysli okolí bodu M pro konkrétní číslo δ, budeme toto okolí nazývat **δ-okolí bodu M** a zapisovat symbolem ***$\delta(M)$*.**

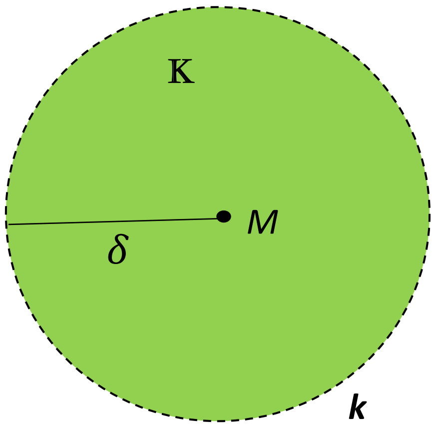
Pojem δ-okolí bodu M lze použít pro libovolný prostor E_n. Ukážeme si tuto skutečnost na příkladech pro prostory E_1 (přímka), E_2 (rovina) a E_3 (prostor):

- **δ-okolí bodu M** v prostoru E_1 (na přímce) je množina $\{X \in E_1; |MX| < \delta\}$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$.



Všimněte si, že pro δ - okolí bodu M platí, že $|MX| < \delta$.
δ - okolí bodu M v prostoru E_1 (na přímce p) je úsečka X_1X_2 bez hraničních bodů X_1, X_2.

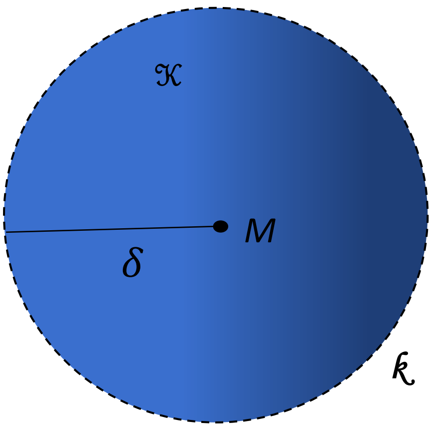
- **δ-okolí bodu M** v prostoru E_2 (v rovině) je množina $\{X \in E_2; |MX| < \delta\}$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$.



Analogicky jako v případě δ - okolí bodu M v prostoru E_1 i zde platí, že $|MX| < \delta$. Nyní se však pohybujeme v rovině.

δ - okolí bodu M se tak stává vnitřek K kruhu (kruh bez hraniční kružnice k) s poloměrem δ.

- **δ-okolí bodu M** v prostoru E_3 (v prostoru) je množina $\{X \in E_3; |MX| < \delta\}$, kde $\delta \in \mathbb{R}^+$.



Analogicky jako v případě δ - okolí bodu M v prostoru E_1 i E_2 zde platí, že $|MX| < \delta$. Nyní se však pohybujeme v prostoru.

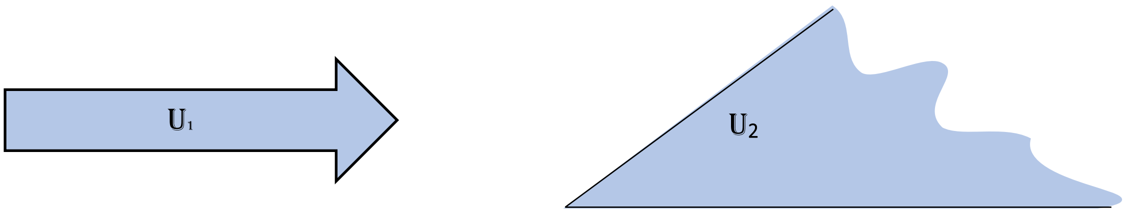
δ - okolí bodu M se tak stává vnitřek $\mathcal{K}$ koule (koule bez hraniční kulové plochy $\mathfrak{k}$) s poloměrem δ.

V dalším textu budeme přesně definovat pojmy, se kterými běžně intuitivně pracujeme. Tyto pojmy je možné zavést až ve chvíli, kdy jsme se seznámili s pojmem δ - okolí bodu M. Pro nejsnadnější názornost budeme tyto pojmy zavádět v $\boldsymbol{E_2}$, tj. v rovině.

- Množina $\mathcal{M}$ se nazývá **ohraničená** právě tehdy, když je podmnožinou okolí nějakého bodu $X \in \boldsymbol{E_2}$.

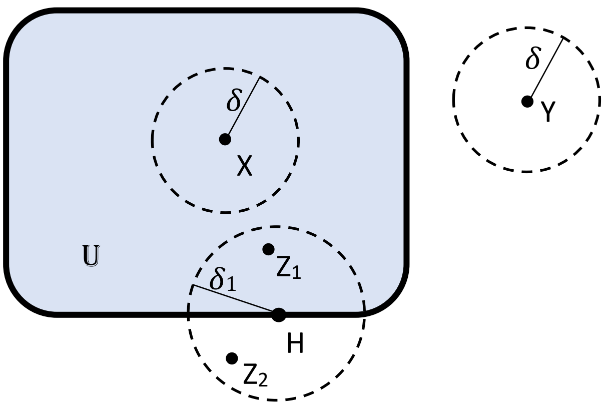
S pojmem ohraničená množina souvisí rovněž pojem ohraničený útvar.

- Geometrický útvar U se nazývá **ohraničený** právě tehdy, když existuje alespoň jeden bod $A \in \boldsymbol{E_2}$ a jeho okolí δ, pro které platí, že $\mathrm{U} \subset \delta(A)$.



Množina $\mathrm{U_1}$ je ohraničená, množina $\mathrm{U_2}$ není ohraničená ($\mathrm{U_2}$ je konvexní úhel).

- **Vnitřní bod geometrického útvaru** U je takový bod $X \in \boldsymbol{E_2}$, pro který existuje alespoň jedno δ – okolí takové, že toto okolí je podmnožinou útvaru U. Platí tedy $\delta(X) \subset \mathrm{U}$.
- **Vnější bod geometrického útvaru** U je takový bod $Y \in \boldsymbol{E_2}$, pro který existuje alespoň jedno δ – okolí takové, že $\delta(Y) \cap \mathrm{U} = \emptyset$.



Bod X je vnitřním bodem útvaru U.

Bod Y je vnějším bodem útvaru U.

Bod H je hraničním bodem útvaru U.

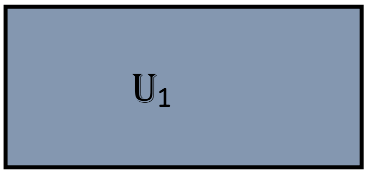
Bod Z_1 je vnitřním bodem útvaru U.

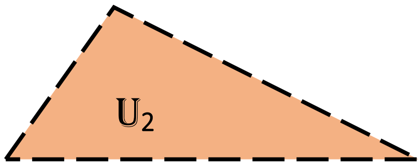
Bod Z_2 je vnějším bodem útvaru U.

- **Hraniční bod geometrického útvaru** U je takový bod $H \in \boldsymbol{E_2}$, kdy pro každé δ – okolí tohoto bodu platí, že obsahuje alespoň jeden bod (Z_1), který je prvkem útvaru U a zároveň obsahuje alespoň jeden bod (Z_2), který není prvkem útvaru U.

S pojmem hraniční bod geometrického útvaru souvisí pojem hranice útvaru, otevřený a uzavřený útvar.

- **Hranice geometrického útvaru** je množina všech jeho hraničních bodů $\mathbb{U}$.
- Geometrický útvar $\mathbb{U}$ je **uzavřený** právě tehdy, když mu náleží všechny jeho hraniční body.
- Geometrický útvar $\mathbb{U}$ je **otevřený** právě tehdy, když mu nenáleží žádný z jeho hraničních bodů.





Geometrický útvar $\mathbb{U}_2$ je otevřený, geometrický útvar $\mathbb{U}_1$ je uzavřený.

2.2 Topologické zobrazení

V této kapitole nebudeme zavádět exaktní definici topologického zobrazení, ale spokojíme se pouze s jeho intuitivní představou. Pro tuto představu budeme opět pracovat v rovině $\boldsymbol{E_2}$.

- Topologické zobrazení $\mathbb{Z}$ je takové zobrazení, které každým dvěma různým velmi blízkým bodům přiřadí dva různé velmi blízké body. Platí tedy

$$\forall A, B \in \boldsymbol{E_2} : A \neq B \Rightarrow \mathbb{Z}(A) \neq \mathbb{Z}(B).$$

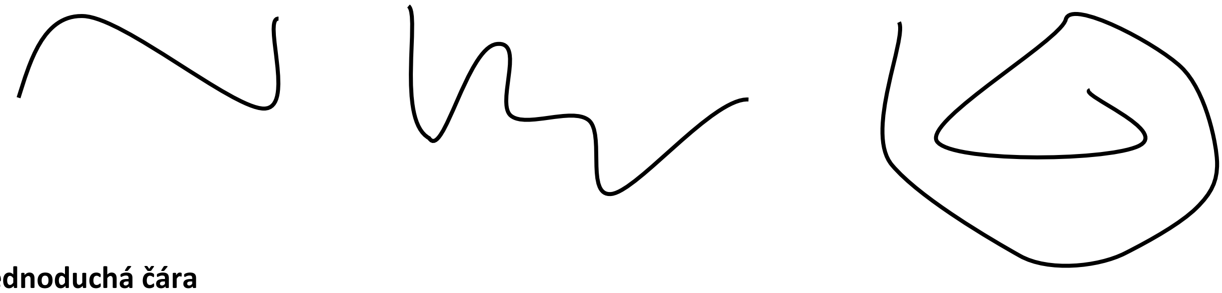
V tomto zobrazení se nemusí zachovávat délka, rovnoběžnost, tvar, velikost ani dělící poměr. Topologické zobrazení si lze dobře představit pomocí provázku. Dva útvary jsou si navzájem topologickými obrazy za předpokladu, že jeden z nich vytvoříme z provázku a jsme schopni z něj získat druhý, aniž bychom provázek stříhali, spojovali nebo vytvářeli uzly.

- Topologickým obrazem úsečky může být jednoduchá křivka, jednoduchá čára či jednoduchá lomená čára.
- Topologickým obrazem kružnice pak může být jednoduchá uzavřená křivka a jednoduchá uzavřená lomená čára.
- Pokud bychom z výše uvedených pojmů vynechali slovo „jednoduchá“, znamenalo by to, že čáry či křivky by samy sebe mohly protnout. Níže na obrázku si jednotlivé pojmy vysvětlíme.

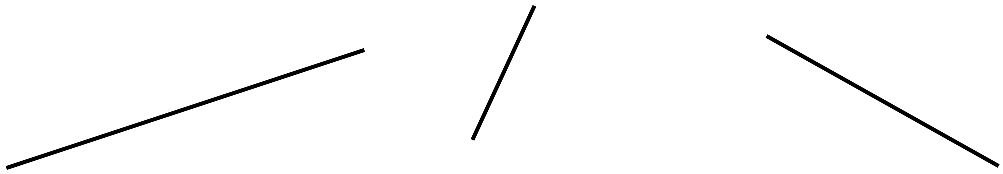
Příklad 1: Která z těchto písmen si jsou topologickými obrazy?

M N O D R T W X K L I U P

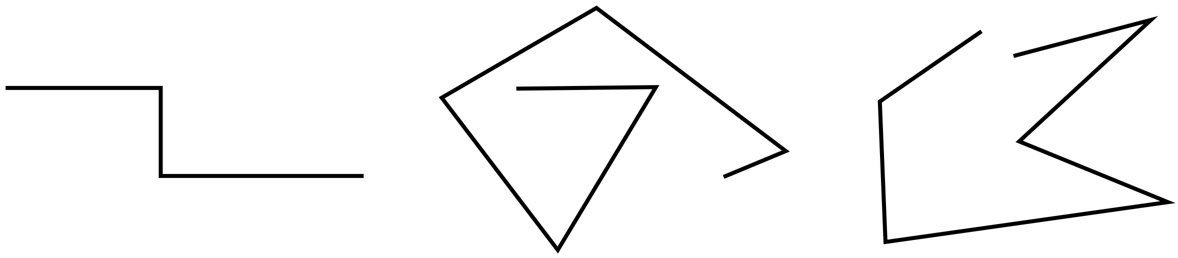
Jednoduchá křivka



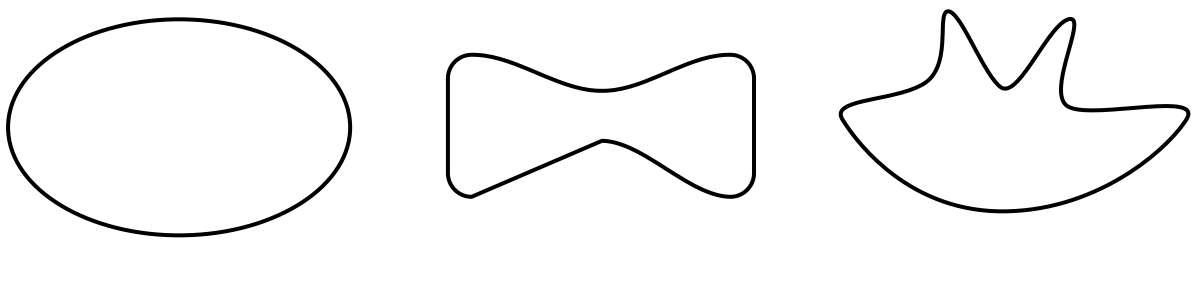
Jednoduchá čára



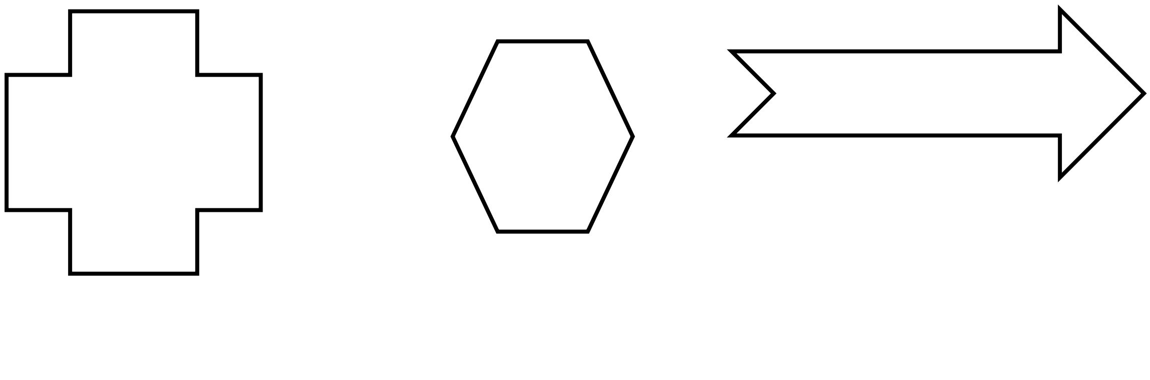
Jednoduchá lomená čára



Jednoduchá uzavřená křivka



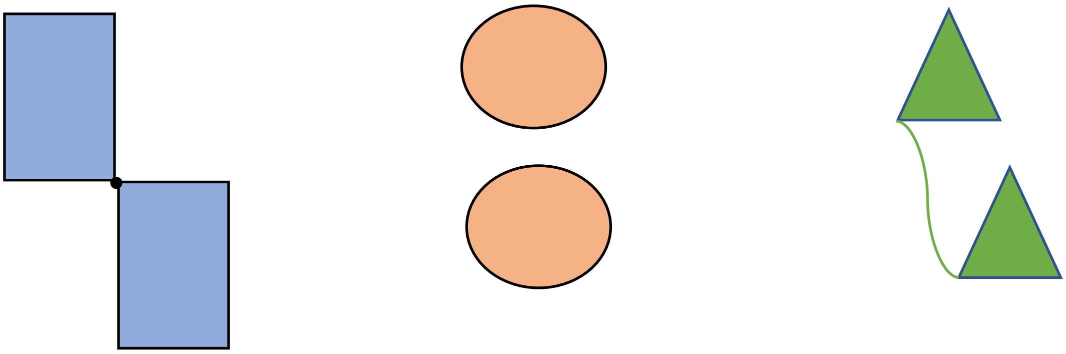
Jednoduchá uzavřená lomená čára



- Geometrický útvar $\mathbb{U}$ je **konvexní** právě tehdy, když pro jeho libovolné dva body $X \in \mathbb{U}$, $Y \in \mathbb{U}$ platí, že úsečka $XY \subset \mathbb{U}$.
- Geometrický útvar $\mathbb{U}$ je **souvislý** právě tehdy, když jeho libovolné dva body $X \in \mathbb{U}$, $Y \in \mathbb{U}$ lze spojit křivkou k, přičemž platí $k \subset \mathbb{U}$.

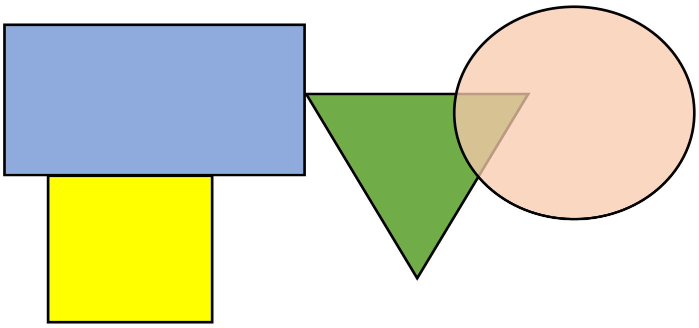
Souvislý geometrický útvar si lze představit tak, že jsme schopni se dostat jedním tahem z jednoho jeho libovolného bodu do jiného jeho libovolného bodu, aniž bychom tento útvar „opustili“.

a) b) c)



Geometrické útvary a), c) jsou souvislé; geometrický útvar b) není souvislý.

- Dva geometrické útvary **se překrývají** právě tehdy, když jejich průnik obsahuje alespoň jeden bod, který je vnitřním bodem obou těchto útvarů.



Na obrázku výše se překrývají pouze útvary trojúhelník a kruh.

3. Míra geometrických útvarů

Mezi matematické pojmy, které se vyvinuly z potřeb praxe lidí, jsou úsečka a její délka, rovinný geometrický útvar a jeho obsah, těleso a jeho objem. Lidé tyto útvary začali více studovat v souvislosti s vyměřováním pozemků, při plánování staveb, cest apod. První míry se odvozovaly od rozměrů částí lidského těla, jakými jsou například loket nebo palec.

Upustíme-li od jednotek měření, přijdeme k závěru, že měřením úsečky či jiného geometrického útvaru získáme určité číslo. Zjišťujeme tak, že **měření útvarů je přiřazování čísel útvarům, a jedná se tedy zobrazení**.

3.1 Míra úsečky, délka úsečky

Definice 1: Zobrazení **F** množiny všech úseček na množinu všech nezáporných reálných čísel nazýváme **mírou úseček** a číslo, které je v tomto zobrazení přiřazeno dané úsečce se **nazývá délka úsečky** (délku úsečky AB zapisujeme $|AB|$) právě tehdy, když

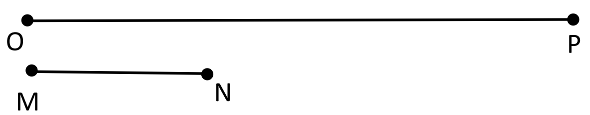
1. Existuje úsečka, jejíž délka je rovna číslu 1 (tzv. jednotková úsečka): $(\exists\ AB)|AB| = 1$,
2. Pro každé dvě shodné úsečky platí, že jejich délky jsou si rovny: $(\forall AB,CD)\ AB \cong CD \Rightarrow |AB| = |CD|$,
3. Pro každé dvě úsečky platí, že délka jejich grafického součtu je rovna součtu jejich délek: $(\forall AB,CD)\ |AB + CD| = |AB| + |CD|$.

S mírou úsečky jste se seznámili v rámci kurikula předmětu Geometrie 1 v minulém semestru. Doporučujeme tedy toto téma zopakovat např. z materiálu (Lvovská & Francová, 2014).

Připomeňte si, jak se provádí:

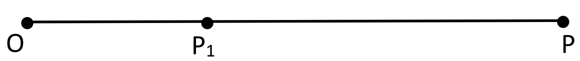
- Grafický součet úseček
- Přenášení úseček

***Příklad 2**: Jsou dány úsečky MN a OP. Určete velikost úsečky OP, jestliže $|MN| = 1$ (úsečka MN je jednotková).*



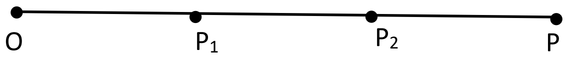
Při hledání řešení se držíme tří pravidel v Definici 1.

První předpoklad existence jednotkové úsečky je již splněn, jednotková úsečka MN je zadána. Můžeme tedy pokračovat přenášením úsečky MN na polopřímku $\rightarrow OP$. Tímto přenesením získáme bod P_1.



Využitím **druhého** předpokladu získáme $MN \cong OP_1 \Rightarrow |MN| = |OP_1| \Rightarrow |OP_1| = 1$.

Tento postup opakujeme, opět naneseme úsečku MN na polopřímku $\rightarrow OP$, ovšem nyní do bodu P_1. Získáme $MN \cong P_1P_2 \Rightarrow |MN| = |P_1P_2| \Rightarrow |P_1P_2| = 1$.



V tuto chvíli jsme schopni zjistit velikost úsečky OP_2. To zjistíme využitím **třetího** předpokladu z Definice 1 následovně:

$|OP_2| = |OP_1 + P_1P_2| = |OP_1| + |P_1P_2| = 1 + 1 = 2.$

Další kroky jsou intuitivní. Opět naneseme úsečku MN na polopřímku $\rightarrow OP$, nyní do bodu P_2. Nalezneme bod P_3, který je v tomto případě totožný s bodem P.

Pro vyřešení úlohy, tj. určení délky úsečky OP stačí použít druhý a třetí předpoklad Definice 1:

$MN \cong P_2P_3 \Rightarrow |MN| = |P_2P_3| \Rightarrow |P_2P_3| = 1.$

$|OP| = |OP_2 + P_2P_3| = |OP_2| + |P_2P_3| = 2 + 1 = 3.$

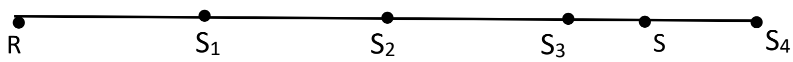
Těmito kroky jsme zjistili, že délka úsečky OP je trojnásobkem délky úsečky MN. Platí tedy, že $|OP| = 3$.

Poznámka: Pro žáka základní školy není náročné zjistit délku úsečky vzhledem k dané jednotkové úsečce, tj. kolikrát je daná úsečka delší než jednotková, za předpokladu, že se jedná o celočíselný násobek.

Příklad 3*: Jsou dány úsečky KL a RS. Určete velikost úsečky RS, jestliže $|KL| = 1$ dm (úsečka KL je jednotková).*

První tři kroky přenášení úsečky KL na polopřímku $\rightarrow RS$ jsou analogické jako v Příkladu 2. Rozdíl nastává ve chvíli, kdy se při přenášení úsečky přiblížíme k hraničnímu bodu S.

Z obrázku výše je zřejmé, že velikost úsečky RS není celočíselným násobkem úsečky KL. Přeneseme-li úsečku ve čtvrtém kroku na polopřímku $\rightarrow RS$, získáme bod S_4, přičemž bod S leží mezi body S_3, S_4.



Nyní lze zapsat $|RS_3| < |RS| < |RS_4|$ a tedy platí 3 dm < $|RS|$ < 4 dm.

- Délka 3 dm úsečky RS_3 se nazývá **dolní mez** úsečky RS.
- Délka 4 dm úsečky RS_4 se nazývá **horní mez** úsečky RS.

Takto ovšem není velikost úsečky RS dána přesně. Abychom zpřesnili své měření úsečky RS, zvolíme novou jednotkovou úsečku KT, která je přesně jednou desetinou původní jednotkové úsečky KL, tj.

$KT = \frac{1}{10} \cdot KL$ a tedy

$|KT| = \frac{1}{10} \cdot |KL| = \frac{1}{10} \cdot 1$ dm = 0,1 dm = 1 cm.

Naneseme nyní úsečku KT na polopřímku →RS do bodu S_3 a postupujeme analogicky jako v předchozích krocích.

Pokud je úsečka S_3S celočíselným násobkem úsečky KT, jsme s měřením hotovi. Pokud není úsečka S_3S celočíselným násobkem úsečky KT, zvolíme opět novou jednotkovou úsečku KX, která je přesně jednou desetinou jednotkové úsečky KT, tj.

$KX = \frac{1}{10} \cdot KT$ a tedy

$|KX| = \frac{1}{10} \cdot |KT| = \frac{1}{10} \cdot 1$ cm = 0,1 cm = 1 mm.

Následně postupujeme analogicky jako v přechozích krocích.

Poznámka: Podobných úvah využívají žáci již na prvním stupni ZŠ. Sami si uvědomují, že měřit v milimetrech je přesnější než v centimetrech apod.

Budeme-li měřit délku úsečky RS výše uvedeným způsobem, mohou nastat **tři možnosti**:

1. Krajní bod S úsečky RS, kterou měříme a na kterou nanášíme postupně jednotkovou úsečku, splyne s některým z bodů $S_1, S_2, \ldots, S_n$ dříve, než je potřeba zavést zpřesnění. Délka úsečky RS je pak kladným celočíselným násobkem jednotkové úsečky.

2. Krajní bod S úsečky RS, kterou měříme a na kterou nanášíme postupně jednotkovou úsečku, splyne s některým z bodů $S_1, S_2, \ldots, S_n$ v některém kroku zpřesňování. Pak lze jednoduše zapsat, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $S_n = S$. Délka úsečky RS již není kladným celočíselným násobkem jednotkové úsečky, délka úsečky RS je kladné racionální číslo.

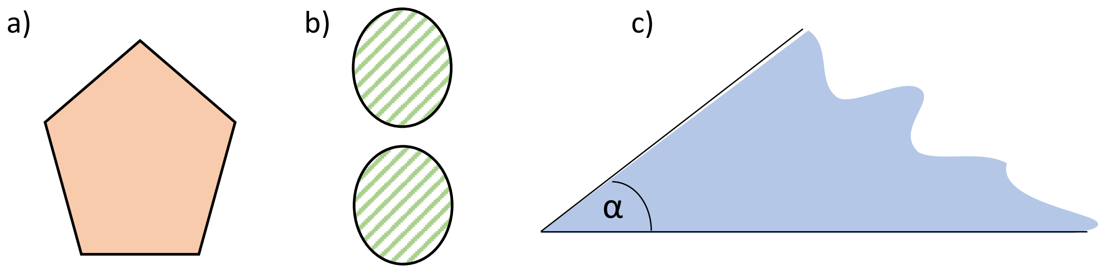
3. Krajní bod S úsečky RS, kterou měříme a na kterou nanášíme postupně jednotkovou úsečku, nikdy nesplyne s žádným bodem $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bez ohledu na skutečnost, kolik zpřesnění provedeme. Pak lze zapsat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_n \neq S$. Délka úsečky RS již není kladným celočíselným násobkem jednotkové úsečky, ani kladné racionální číslo. Délka úsečky RS je kladné iracionální číslo.

3.2 Míra obrazce, obsah obrazce

V rovině lze měřit pouze tzv. měřitelné útvary:

- **Základní měřitelný útvar** v rovině je rovinný útvar, který je:
  a) Ohraničený,
  b) Hranicí je jednoduchá uzavřená křivka,
  c) Je souvislý.
- **Měřitelný útvar** je útvar, který lze získat z konečného počtu tzv. základních měřitelných útvarů pomocí množinových operací. Měřitelnému útvaru v rovině říkáme **obrazec**.

Z uvedeného je zřejmé, že například polorovina, konvexní úhel nebo vnějšek kruhu nejsou měřitelné útvary.



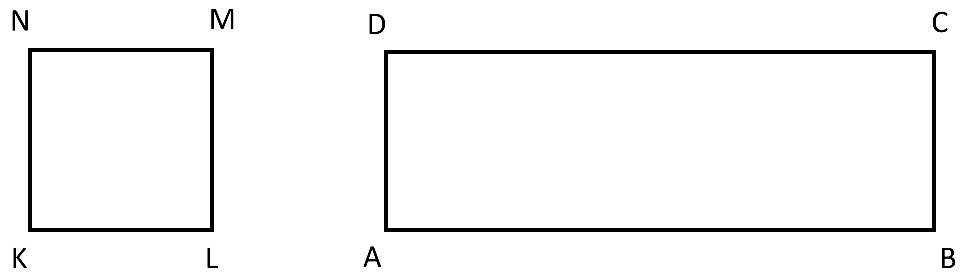
Pětiúhelník v případě a) je měřitelný útvar. Dvojice kruhů, které nejsou spojité v případě b) a konvexní úhel nejsou měřitelné útvary.

Definice 2: Míra obrazce je zobrazení **f** množiny všech rovinných obrazců na množinu všech nezáporných reálných čísel. Číslo, které je v tomto zobrazení **f** přiřazeno danému obrazci **U**, se nazývá **obsah obrazce** a značíme jej **f (U).** Dále platí:

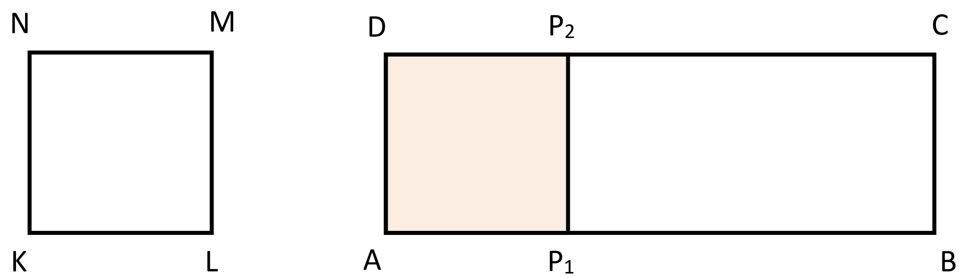
1. Existuje obrazec, jehož obsah je roven číslu 1: $(\exists\ \mathbf{U})\ \mathbf{f}\ (\mathbf{U}) = 1$,
2. Pro každé dva shodné obrazce platí, že jejich obsahy jsou si rovny:
   $(\forall\ \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2})\ \mathbf{U_1} \cong \mathbf{U_2} \Rightarrow \mathbf{f}\ (\mathbf{U_1}) = \mathbf{f}\ (\mathbf{U_2})$
3. Jestliže se obrazce nepřekrývají, pak obsah jejich sjednocení se rovná součtu jejich obsahů:
   $(\forall\ \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2})\ \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}$ se nepřekrývají $\Rightarrow \mathbf{f(U_1 \cup U_2)} = \mathbf{f}\ (\mathbf{U_1}) + \mathbf{f}\ (\mathbf{U_2})$

Měření obrazce budeme demonstrovat na následujícím příkladu.

Příklad 4: Je dán jednotkový čtverec (čtverec o obsahu 1) KLMN a obdélník ABCD. Jaký má obsah obdélník ABCD?



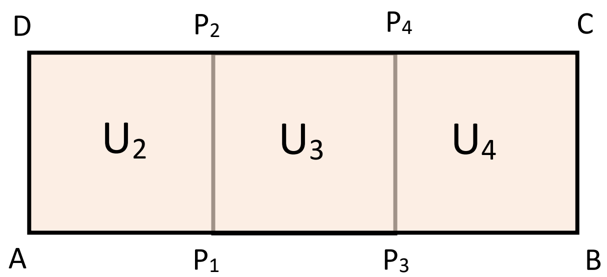
Chceme-li určit obsah obdélníka ABCD, je třeba, abychom se drželi pravidel z Definice 2. **První** předpoklad o existenci jednotkového čtverce je splněn již ze zadání. Můžeme tedy pokračovat přenášením čtverce KLMN na obdélník ABCD. Získáme tak body P_1, P_2.



Jistě platí: Čtverec KLMN je shodný se čtvercem AP_1P_2D, a podle **druhého** předpokladu v Definici 2 se jejich obsahy rovnají. Obsah čtverce AP_1P_2D je tedy rovněž roven jedné.

Celý postup opakujeme, přičemž aplikujeme předpoklady Definice 2. Čtverec KLMN je shodný se čtvercem $P_1P_2P_3P_4$ a tedy mají podle druhého předpokladu Definice 2 stejné obsahy. Obsah čtverce $P_1P_2P_3P_4$ je tedy roven jedné. Dle **třetího** předpokladu Definice 2 je obdélník AP_3P_4D sjednocením čtverců AP_1P_2D a $P_1P_2P_3P_4$, které se nepřekrývají. Platí tedy, že obsah obdélníku AP_3P_4D je roven součtu obsahu čtverců AP_1P_2D a $P_1P_2P_3P_4$.

V dalším kroku opět přeneseme čtverec KLMN a získáme čtverec P_3BDP_4, oba tyto čtverce mají stejné obsahy. V posledním kroku obsahy čtverců podle třetího předpokladu sečteme. Součet obsahů tří čtverců AP_1P_2D, $P_1P_2P_3P_4$ a P_3BDP_4 je roven obsahu obdélníka ABCD:



Pro zjednodušení zvolíme jiné označení obrazců, viz obrázek výše:

- Čtverec AP_1P_2D označme symbolem $\mathbf{U_2}$,
- Čtverec P_1P_3 P_4P_2 označme symbolem $\mathbf{U_3}$,
- Čtverec P_3BCP_4 označme symbolem $\mathbf{U_4}$,
- Útvar $\mathbf{U_2} \cup \mathbf{U_3}$ označme symbolem $\mathbf{U_{23}}$,
- Útvar $\mathbf{U_{23}} \cup \mathbf{U_4}$ označme symbolem $\mathbf{U_{234}}$ – jedná se o obdélník ABCD.

Celý postup přenášení čtverce na obdélník můžeme zapsat následujícím způsobem:

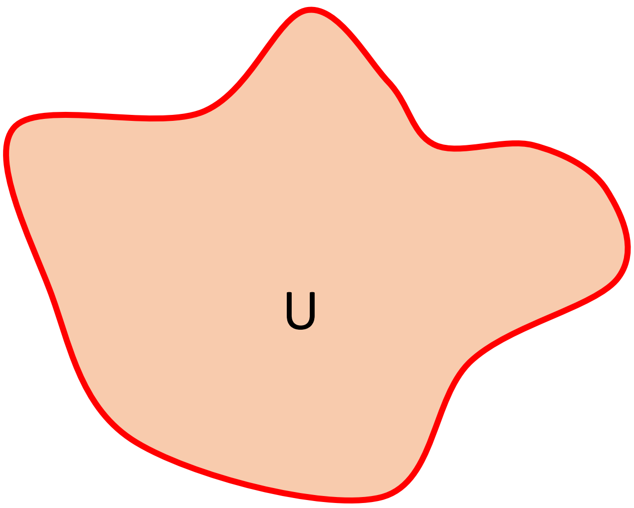
$\mathbf{U_1} \cong \mathbf{U_2} \Rightarrow \mathbf{f(U_1)} = \mathbf{f(U_2)} \Rightarrow \mathbf{f(U_2)} = 1$,
$\mathbf{U_1} \cong \mathbf{U_3} \Rightarrow \mathbf{f(U_1)} = \mathbf{f(U_3)} \Rightarrow \mathbf{f(U_3)} = 1$,
$\mathbf{f(U_{23})} = \mathbf{f(U_2} \cup \mathbf{U_3)} = \mathbf{f(U_2)} + \mathbf{f(U_3)} = 1 + 1 = 2$,
$\mathbf{U_1} \cong \mathbf{U_4} \Rightarrow \mathbf{f(U_1)} = \mathbf{f(U_4)} \Rightarrow \mathbf{f(U_4)} = 1$,
$\mathbf{f(U_{234})} = \mathbf{f(U_{23}} \cup \mathbf{U_4)} = \mathbf{f(U_{23})} + \mathbf{f(U_4)} = 2 + 1 = 3$.

Obsah obdélníka ABCD je 3.

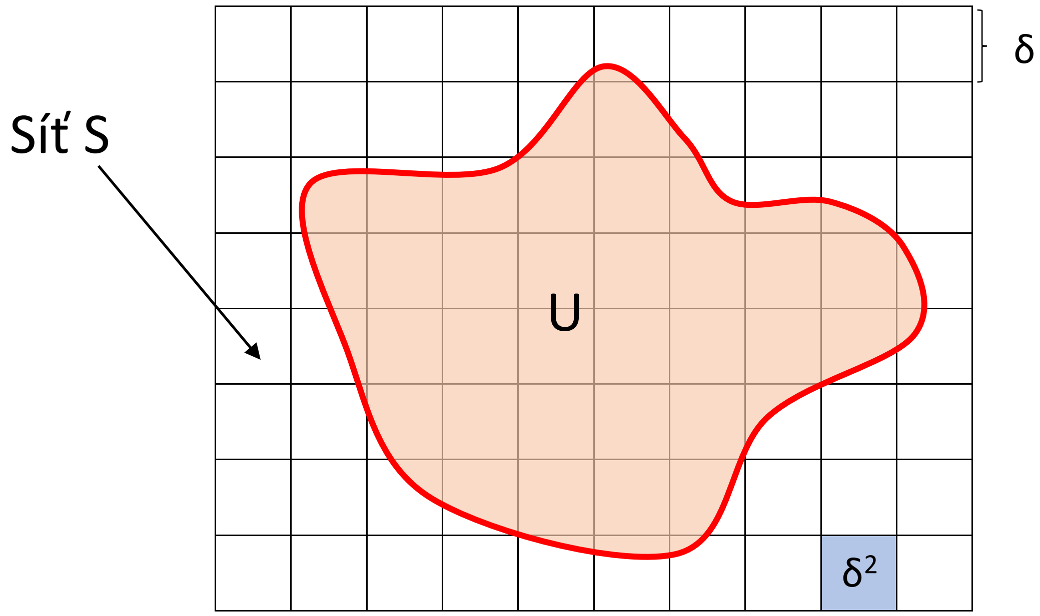
Poznámka: Analogicky, jako v případě míry úseček nemusí být jeden obrazec celočíselným násobkem druhého. Pokud by tomu tak bylo, provedli bychom zpřesnění rozdělením jednotkového čtverce na shodné čtverce a postupovali bychom analogicky jako při měření úsečky.

Problematiku měření obsahu a pokrývání jednotkovým čtvercem je možné řešit také v případě náročnějších měřitelných rovinných obrazců, jejichž hraniční křivky jsou oblé. V tomto případě je vhodné využít čtvercové sítě. V následujícím příkladu si vysvětlíme postup měření obsahu libovolného měřitelného rovinného obrazce.

Příklad 5: Určete obsah rovinného obrazce **U**.



Uvažujme čtvercovou síť **S** v rovině pokrytou jednotkovými čtverci. Za stranu jednotkového čtverce zvolíme jednotkovou úsečku δ. Obsah jednotkového čtverce je tedy δ^2.



Na tomto místě je potřeba formulovat dva důležité pojmy.

- **Jádro J** obrazce **U** v síti **S** je sjednocením všech takových čtverců sítě, že každý jejich bod náleží obrazci **U**.
- **Obal O** obrazce **U** v síti **S** je sjednocením všech takových čtverců sítě **S**, že alespoň jeden jejich bod náleží obrazci **U**.

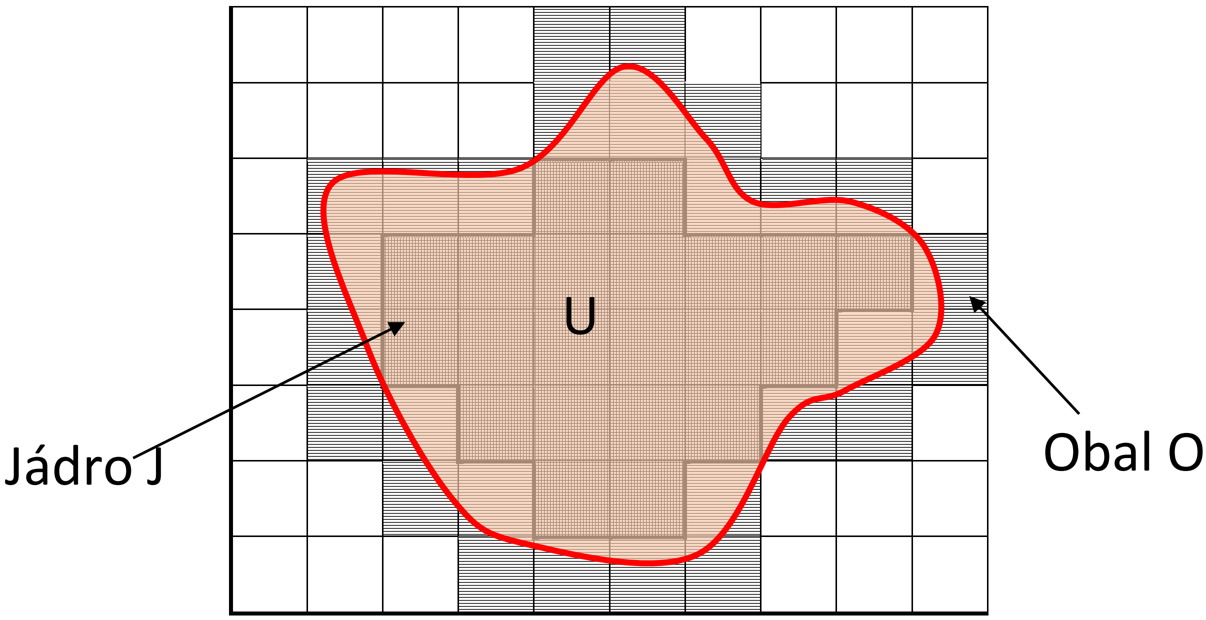
Obal **O** každého rovinného obrazce **U** obsahuje aspoň jeden čtverec sítě **S**, jádro **J** nemusí obsahovat žádný čtverec sítě S.

V libovolné síti **S** je vždy jádro **J** podmnožinou obrazce **U** a obrazec **U** je podmnožinou obalu **O**, platí: $\mathbf{J} \subset \mathbf{U} \subset \mathbf{O}$.

Vzhledem k tomu, že jádro **J** i obal **O** obrazce **U** jsou útvary ohraničené, jejich hranice jsou jednoduché uzavřené křivky, jsou jádro **J** i obal **O** obrazce **U** měřitelné útvary. Můžeme tedy určit jejich velikost.

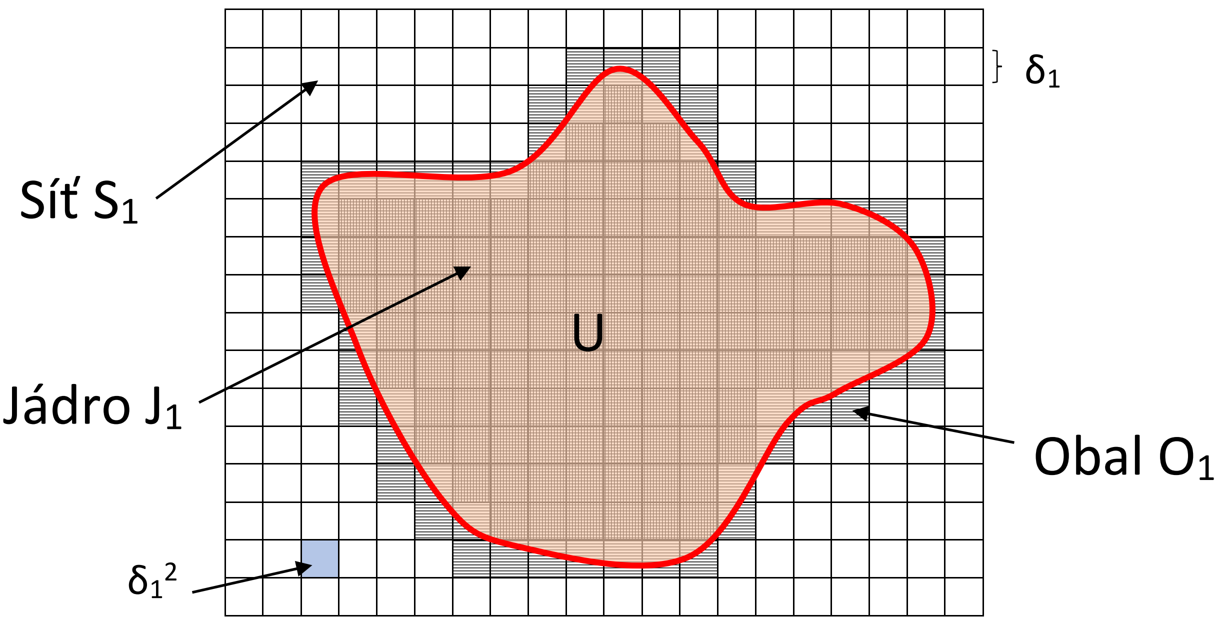
- **velikost jádra f (J)** obrazce **U** je počet čtverců jádra **J** (tedy dolní mez obrazce **U**),
- **velikost obalu f (O)** obrazce **U** je počet čtverců obalu **O** (tedy horní mez obrazce **U**),

Platí tedy: $\mathbf{f\,(J)} \leq \mathbf{f\,(U)} \leq \mathbf{f\,(O)}$, kde **f (U)** je obsah obrazce **U.**



V případě našeho obrazce **U** vidíme, že velikost jeho jádra je **f (J)** = 21 (počet čtverců jádra obrazce **U**) a velikost jeho obalu je **f (O)** = 48 (počet čtverců obrazce **U**). Platí tedy, že obsah **f (U)** obrazce **U** je $21 \leq$ **f (U)** ≤ 48. Což je velmi „hrubé“ měření.

Chceme-li měření zpřesnit, vytvoříme tzv. **zjemněnou síť S_1** o délce jednotkové úsečky δ_1, kde $\delta_1 < \delta$. Rozdělme tedy jednotkovou úsečku na dvě shodné úsečky, přičemž nová jednotková úsečka $\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot \delta$. Zvolíme-li za stranu jednotkového čtverce pro zjemněnou síť **S_1** jednotkovou úsečku δ_1, pak obsah jednotkového čtverce bude δ_1^2.



Označme pro síť $\mathbf{S_1}$ velikost jádra $\mathbf{J_1}$ symbolem **f** ($\mathbf{J_1}$) a velikost obalu $\mathbf{O_1}$ symbolem **f** ($\mathbf{O_1}$). Uvažujeme-li síť $\mathbf{S_1}$, je velikost jádra **f** ($\mathbf{J_1}$) $= \frac{107}{4} = 26\frac{3}{4}$ a velikost obalu **f** ($\mathbf{O_1}$) $= \frac{158}{4} = 39\frac{2}{4}$.
Porovnejme nyní získané velikosti jader **J** a $\mathbf{J_1}$ i obalů **O** a $\mathbf{O_1}$ obrazce **U** před zjemněním a po něm:

$$21 \le 26\frac{3}{4} \le \mathbf{f(U)}\ 39\frac{2}{4} \le 48$$

Vidíme, že po prvním zjemnění sítě jsme získali přesnější údaje o obsahu obrazce.
Z uvedeného postupu zřejmě platí množinová inkluze:

$$\mathbf{J \subset J_1 \subset U \subset O_1 \subset O.}$$

Vzhledem k této množinové inkluzi pro velikosti jádra a obalu po zjemnění sítě platí**:**

$$\mathbf{f(J) \le f(J_1) \le f(U) \le f(O_1) \le f(O)}$$

Tímto způsobem lze ve zjemňování sítí pokračovat. Potom v každé síti $\mathbf{S_k}$ (kde $1 \le k \le n$ pro n, $k \in \mathbb{N}$) lze obrazci **U** přiřadit jádro $\mathbf{J_k}$ a obal $\mathbf{O_k}$. Platí množinová inkluze

$$\mathbf{J \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \ldots J_n \subset \ldots \subset U \subset \ldots O_n \subset \ldots O_3 \subset O_2 \subset O_1 \subset O}$$

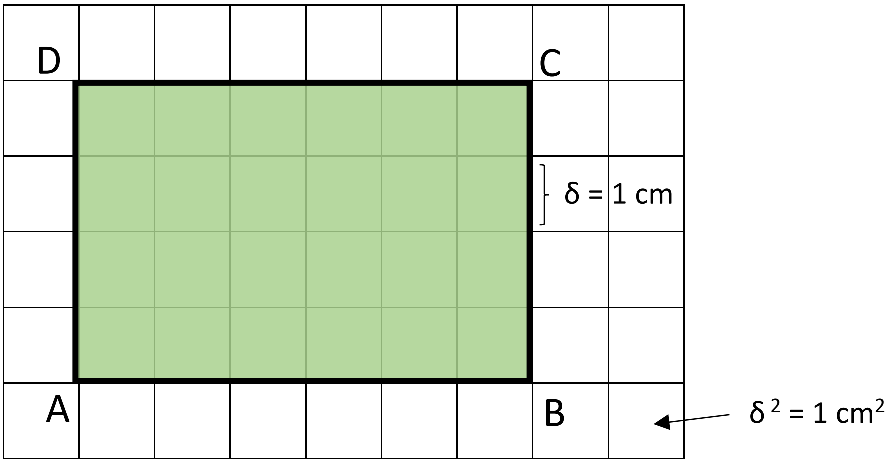
Pro velikosti jader, měřitelného rovinného obrazce a obalů podobně platí

$$\mathbf{f(J) \le f(J_1) \le f(J_2) \le f(J_3) \ldots \le f(J_n) \le f(U) \le f(O_n) \ldots \le f(O3) \le f(O_2) \le f(O_1) \le f(O)}$$

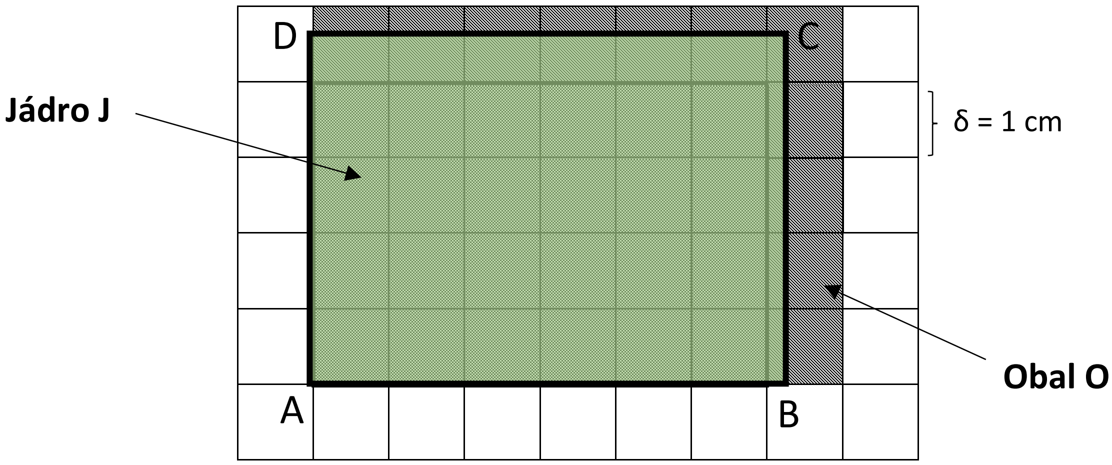
Z praxe víme, že pro přesnější měření volíme vždy pro zjemňování sítě jednu desetinu jednotkové úsečky, tj. $\delta_1 = \dfrac{1}{10}\,\delta.$, $\delta_2 = \dfrac{1}{10}\,\delta_1$ atd.
Postupným zjemňováním sítí se bude velikost jader zvětšovat, velikost obalů se bude zmenšovat, z obou stran - zdola i shora - se budeme přibližovat k **obsahu f(U) rovinného obrazce U**, rozdíl horní meze a dolní meze velikosti obrazce lze učinit libovolně malými.

Příklad 6: Určete obsah obdélníku ABCD, jehož strany mají velikosti:
a) |AB| = 6 cm a |BC| = 4 cm
b) |AB| = 6,3 cm a |BC| = 4,7 cm

a) Vytvoříme si čtvercovou síť **S** o rozměru δ velikosti 1 cm. Do čtvercové sítě **S** umístíme obdélník ABCD tak, aby dvě sousední strany AB, BC obdélníku byly podmnožinami přímek sítě **S**. V tomto případě obdélníku budou i strany CD a DA podmnožinami přímek sítě. Není tedy potřeba již síť **S** zjemňovat a můžeme určit obsah obdélníku ABCD jako hodnotu, která vyjadřuje počet čtverců o délce strany δ, které obdélník ABCD vytváří. Celkový počet jednotkových čtverců je 24, tj. obsah obdélníku ABCD je 24 cm^2.



b) Měřený obdélník umístíme ve čtvercové síti **S** o rozměru δ velikosti 1 cm tak, aby obě jeho strany AB i BC byly podmnožinami přímek sítě **S**.



V síti **S** znázorníme jádro **J** a obal **O** obdélníka ABCD.
Velikost jádra **f(J)** = 24, velikost obalu **f(O)** = 35. Je zřejmé, že **f(J) ≤ f(ABCD) ≤ f(O).**
Vzhledem k tomu, že ostatní strany CD a DA obdélníka ABCD nejsou podmnožinami přímek sítě **S**, provedeme zjemnění sítě **S** tak, že zvolíme novou jednotkovou úsečku δ_1 velikosti jedné desetiny původní jednotkové úsečky, tj. $\delta_1 = \frac{1}{10} \cdot \delta = 1$ mm. V nové čtvercové síti $\mathbf{S_1}$ o velikosti jednotkové úsečky $\delta_1 = 1$ mm určíme velikost jádra $\mathbf{f(J_1)}$ a velikost obalu $\mathbf{f(O_1)}$ obdélníku ABCD:

$\mathbf{f(J_1)} = 47 \cdot 63 = 2961$, $\mathbf{f(O_1)} = 47 \cdot 63 = 2961$.
Zde platí, že $\mathbf{f(J_1)} = \mathbf{f(O_1)} = \mathbf{f(ABCD)} = |AB| \cdot |CD| = 2961$**.** Označíme-li v obdélníku ABCD symbolem ***a*** velikost úsečky AB a ***b*** velikost úsečky BC, pak obsah obdélníka ABCD zapíšeme jako **f(ABCD) = *a* · *b***. Označíme-li písmenem **S** obsah obrazce **f(ABCD)**, tj. **S = f(ABCD)**, získáme vztah:

$$\boxed{S = a \cdot b}$$

Obsah obdélníka ABCD je 2961 mm^2, což je 29,61 cm^2.

Příklad 7: Určete obsah čtverce ABCD o velikosti strany AB 5 cm.

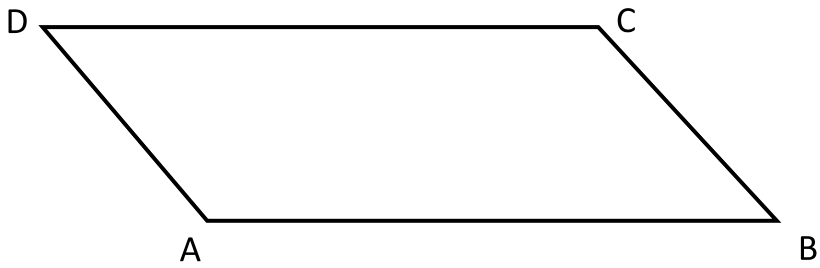
Obsah čtverce vypočítáme jako obsah obdélníku. Protože sousední strany jsou shodné, vypočítáme obsah čtverce ze vzorce

$$\boxed{S = a \cdot a}$$

$$S = 5 \cdot 5 = 25\ 25\ \text{cm}^2$$

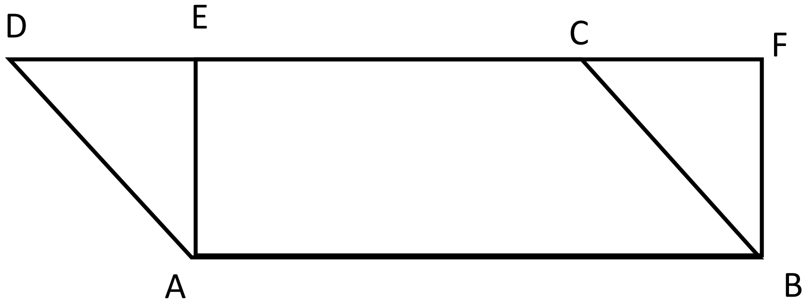
Obsah čtverce ABCD je 25 cm^2.

Příklad 8: Odvoďte obsah kosodélníku ABCD.

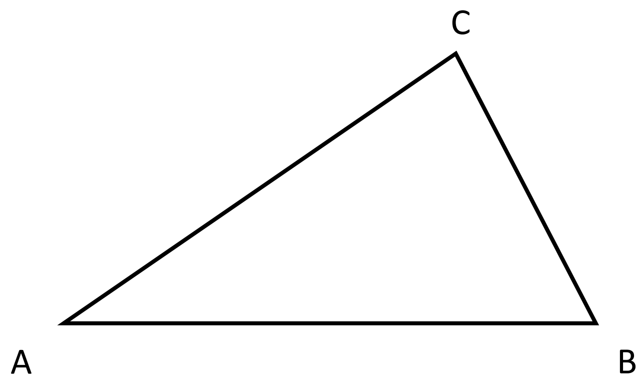


Na přímce ↔ DC nalezneme body E, resp. F tak, že ↔ AE ⊥ ↔ ED, resp. ↔ AF ⊥ ↔ FD. Trojúhelník AED je shodný s trojúhelníkem BFC (podle věty Ssu). Jestliže dva trojúhelníky jsou shodné, pak mají podle definice míry stejný obsah. Jestliže posuneme trojúhelník AED na místo trojúhelníka BFC, vznikne obdélník ABFE, který má stejný obsah jako kosodélník ABCD. Obsah obdélníku získáme jako součin velikostí sousedních stran (|AB| · |BF|). Strana BF v obdélníku ABFE je výškou v kosodélníku ABCD na stranu AB. Jestliže obsah kosodélníku ABCD je stejný jako obsah obdélníku ABFE, tak obsah S kosodélníku vypočítáme jako součin velikosti strany a a příslušné výšky v_a, tj:

$$\boxed{S = a \cdot v_a}$$



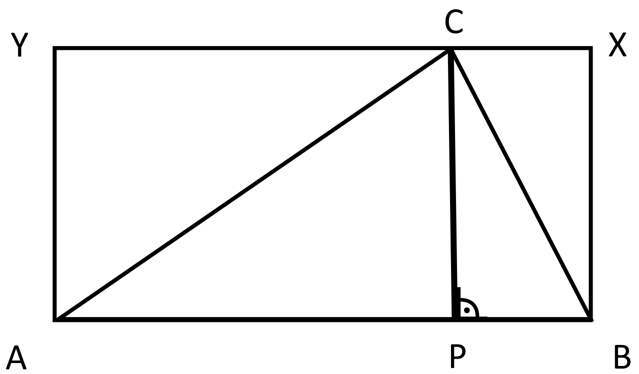
Příklad 9: Odvoďte obsah trojúhelníku ABC.



V rovině nalezneme body X, Y tak, že vrchol C leží na přímce ↔ XY a útvar ABXY je obdélník. Bodem C vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou ↔ BX, která protíná stranu AB trojúhelníka ABC v bodě P, což je pata kolmice z bodu C na stranu AB. Platí, že APC ≅ CYA a BPC ≅ CXB (podle věty sus). Trojúhelníky APC, CYA mají tedy stejný obsah, stejně tak trojúhelníky BPC, CXB mají stejný obsah. Je zřejmé, že velikost obsahu trojúhelníku ABC činí polovinu obsahu obdélníka ABXY. Obsah obdélníka ABXY získáme jako součin velikostí sousedních stran (|AB| · |BX|). Vzhledem k tomu, že úsečky PC a BX jsou rovnoběžné a shodné, obsah trojúhelníka ABC získáme jako polovinu součinu |AB| · |PC|, kde úsečka PC je výška trojúhelníka ABC z bodu C na stranu AB.

Označme |AB| = $\boldsymbol{a}$, |PC| = $\boldsymbol{v_a}$, pak obsah $\boldsymbol{S}$ trojúhelníku ABC vypočítáme jako polovinu součinu velikosti strany $\boldsymbol{a}$ a příslušné výšky $\boldsymbol{v_a}$, tj:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a}$$



3.3 Povrch prostorového útvaru

Měření obsahu rovinných útvarů se používá v praktických úlohách například při určování povrchu tělesa.

- **Tělesa** jsou prostorové útvary, které nejsou podmnožinou téže roviny. Zajímají nás převážně **hranatá tělesa**, tj. krychle, kvádry, hranoly a dále **rotační tělesa** koule, kužel válec.
- **Povrch tělesa** je hranice tělesa v prostoru. Určujeme velikost této hranice, tedy obsah hranice. Povrch tělesa u hranatých těles určíme jako součet obsahů všech jeho stěn. U hranatých těles můžeme vytvořit **síť tělesa**, což je povrch tělesa rozvinutý do roviny. U

rotačních těles si vytvoříme síť kromě koule, která je pro toto komplikovaná (například při znázorňování zemského povrchu v rovině dochází ke zkreslení).

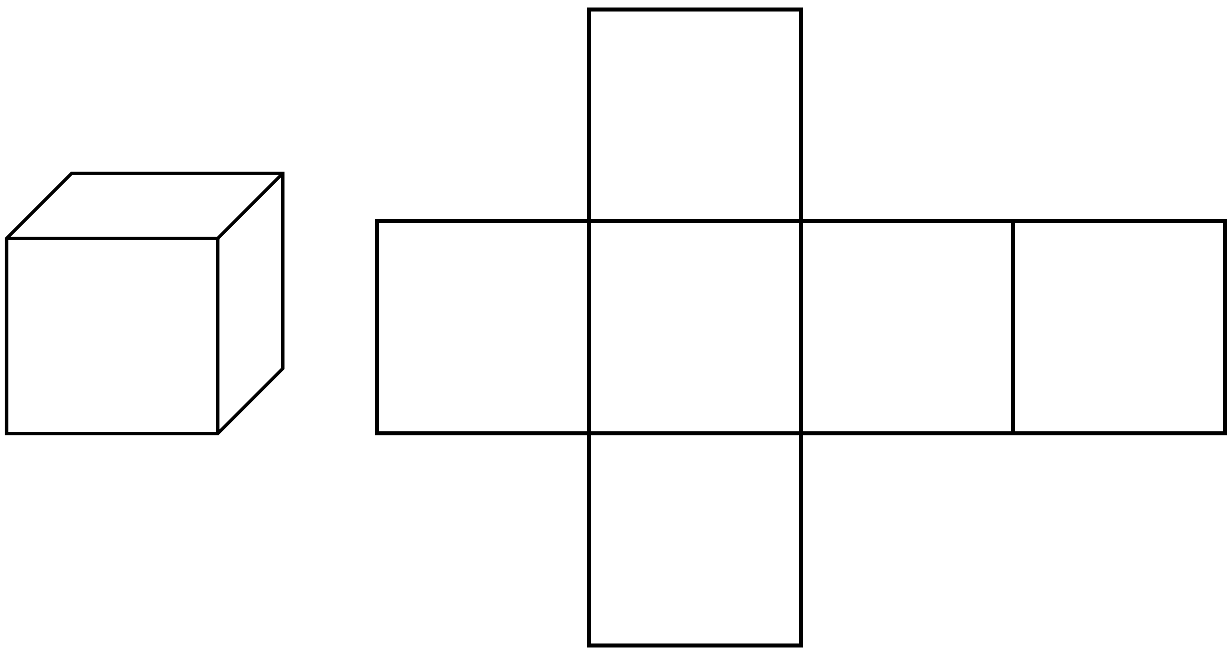
***Příklad 10**:* Určete povrch krychle, jestliže hrana krychle měří 5 cm.

Povrch krychle je hranice krychle v prostoru. Můžeme si jej rozvinout do roviny a vytvořit tak rovinný útvar – n-úhelník, z něhož lze zpětně složit povrch této krychle.

Na obrázku níže je znázorněna krychle ve volném rovnoběžném promítání a jedna z jejích sítí. Povrch krychle je tvořen šesti shodnými čtverci, tedy povrch krychle vypočítáme jako

$$\boxed{S = 6 \cdot a^2}$$

S = 6 · 25 = 150 cm2



Povrch krychle činí 150 cm^2.

***Příklad 11**:* Určete povrch kvádru ABCDEFGH, jestliže délka jeho hrany AB je 4 cm (a = 4 cm), hrany BC je 5 cm (b = 5 cm) a hrany BF je 6 cm (c = 6 cm).

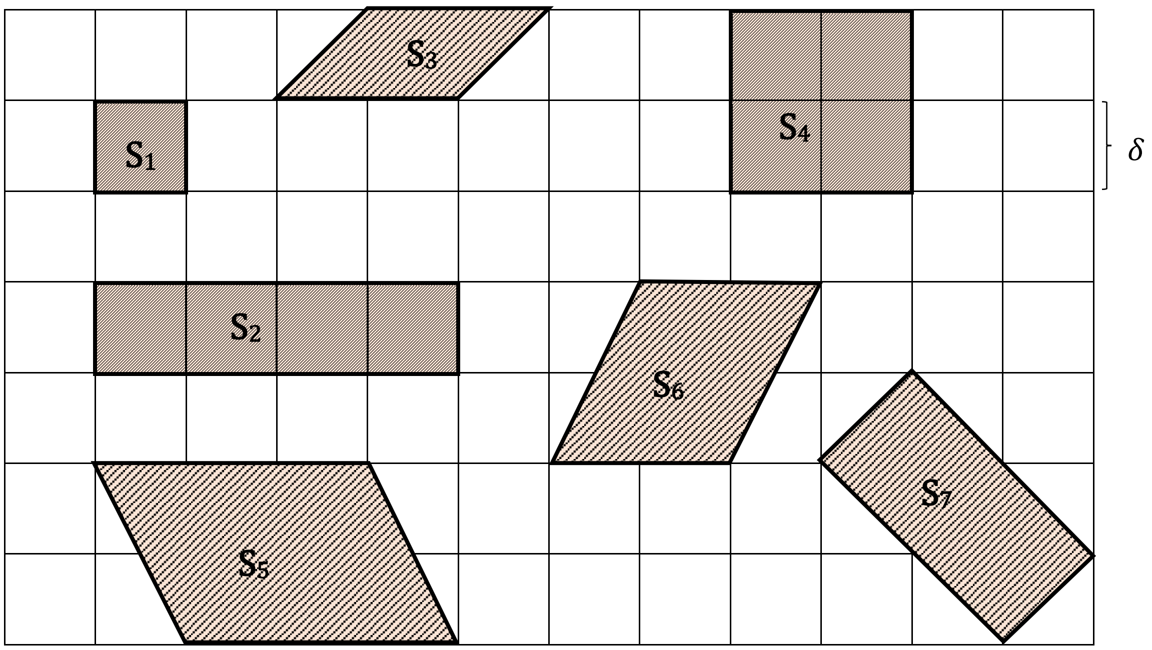
Analogicky jako u krychle si můžeme pro ilustraci znázornit síť kvádru ABCDEFGH, což je rozvinutý povrch kvádru do roviny. Kvádr má 6 stěn, z toho 3 dvojice shodných stěn. Vypočítáme obsah každé stěny a tyto obsahy sečteme. Můžeme také vypočítat obsahy tří různých stěn, pak tyto obsahy sečíst a vynásobit dvěma. Obecně je vzorec pro povrch kvádru:

$$S = 2\,(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

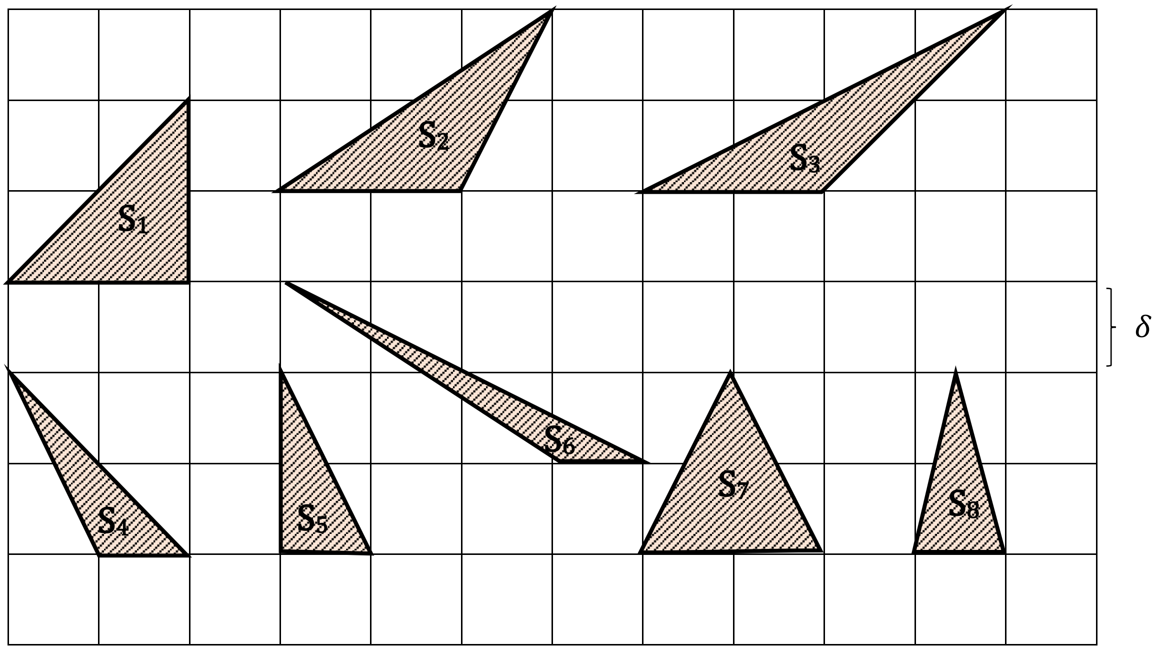
Povrch zadaného kvádru vypočteme S = 2 (4 · 5 + 4 · 6 + 5 · 6) = 148 cm^2.
Povrch daného kvádru měří 148 cm^2.

Úkoly

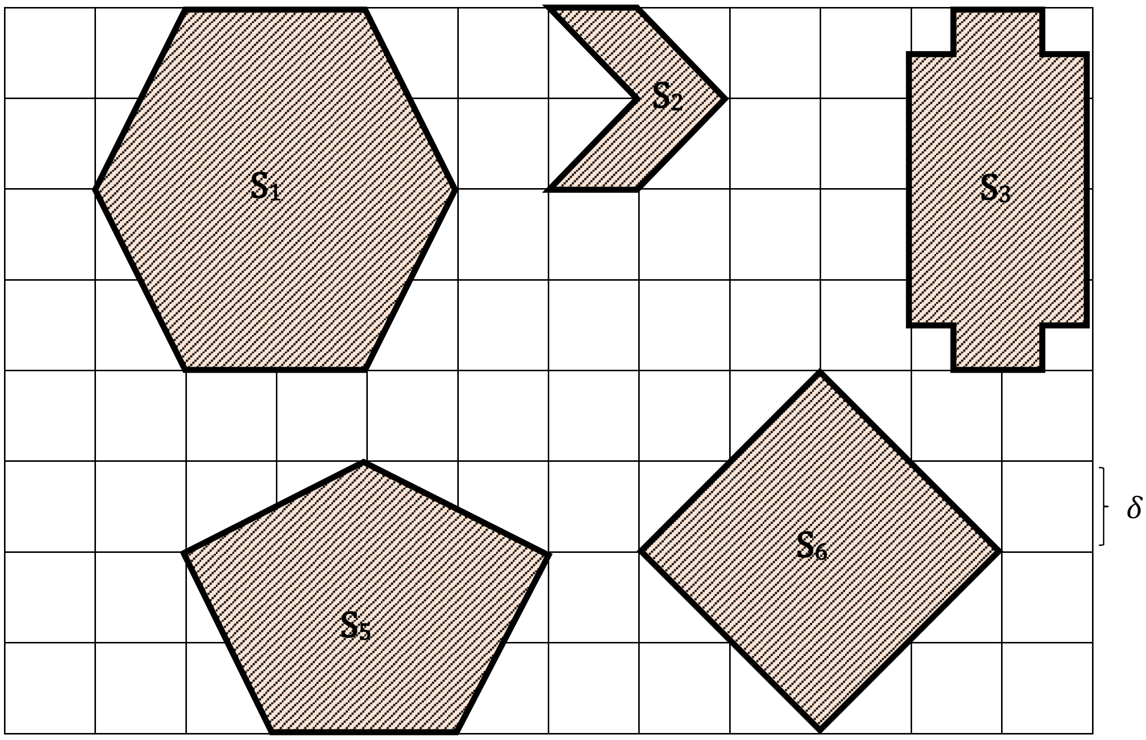
1. Určete obsahy jednotlivých čtyřúhelníků umístěných ve čtvercové síti o rozměru δ.



2. Určete obsahy jednotlivých trojúhelníků umístěných ve čtvercové síti o rozměru δ.

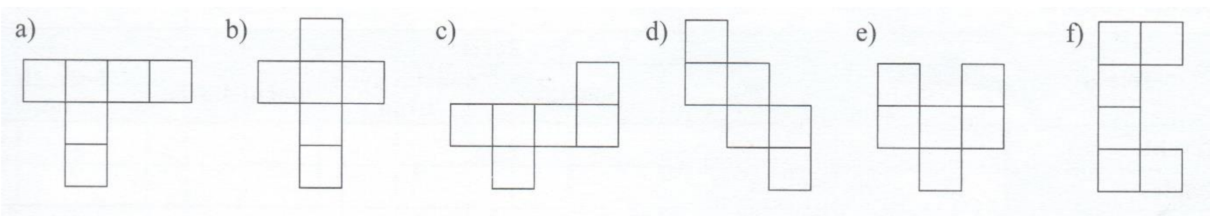


3. Určete obsahy jednotlivých obrazců umístěných ve čtvercové síti o rozměru δ.



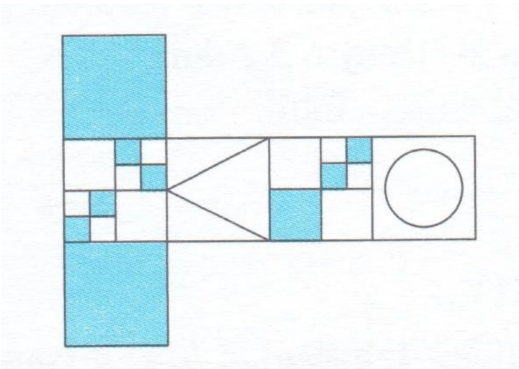
4. Vypočtěte povrch kolmého hranolu, který má za podstavu rovnoramenný trojúhelník o základně a = 10 cm a ramenu b = 13 cm, výška hranolu je v = 12 cm.

5. Zakroužkujte obrázky, na kterých není síť krychle:

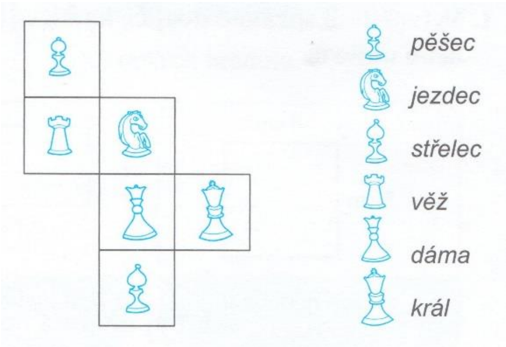


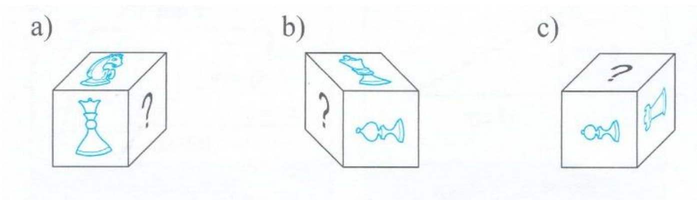
6. Existuje 11 sítí krychle. Dokážete je všechny najít a načrtnout?

7. Na obrázku je síť krychle, kterou vybarvily děti. Kolik procent povrchu krychle je vybarveno?

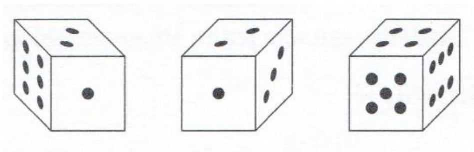


8. Na stěnách krychle jsou nakresleny šachové figurky. Jejich polohu vidíte v zobrazené síti. Určete, které figurky patří na místa otazníků.

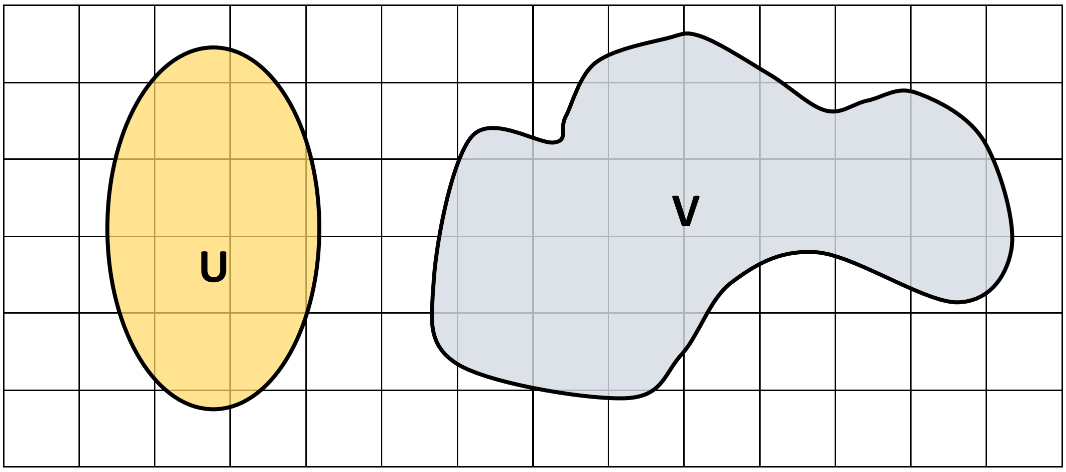




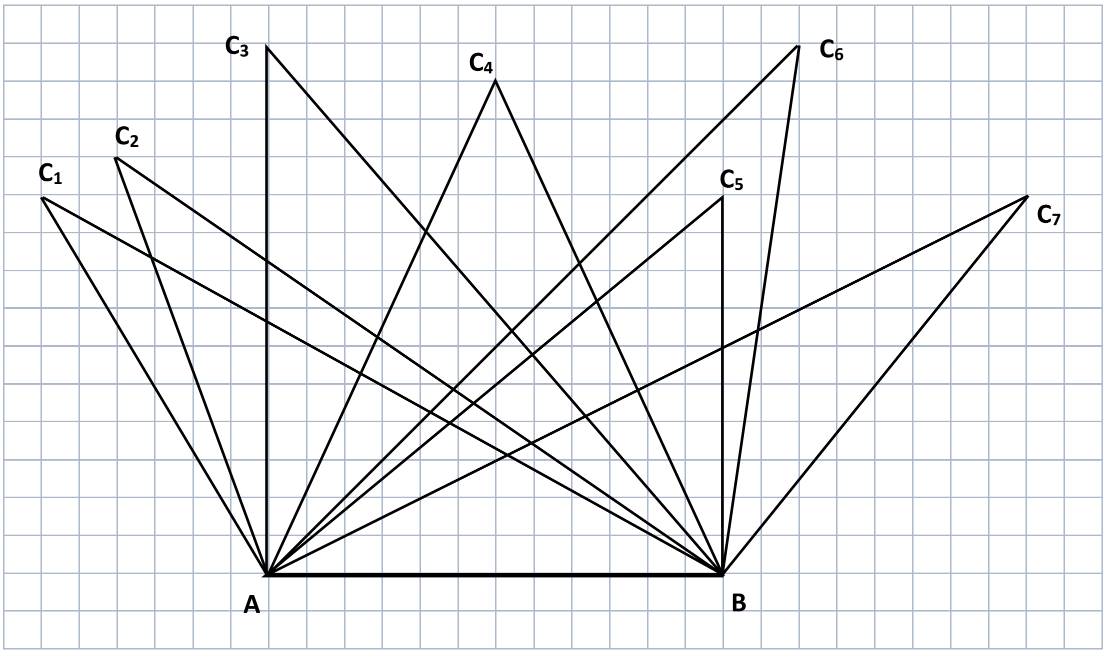
9. Je dána krychle, která má na stěnách tečky. Je zobrazena ve třech různých polohách. Načrtněte její síť.



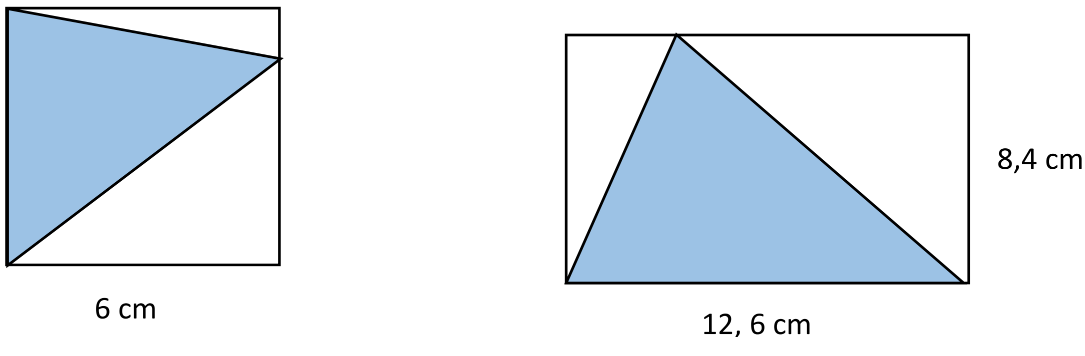
10. Jsou dány obrazce **U** a **V** ve čtvercové síti, kde délka úsečky jednotkového čtverce činí 1 cm. Určete obsah těchto obrazců pomocí jejich jader a obalů analogicky jako v Příkladu 5. Výsledek zapište pomocí nerovností. Proveďte dále alespoň jedno zpřesnění pomocí zjemnění sítě?



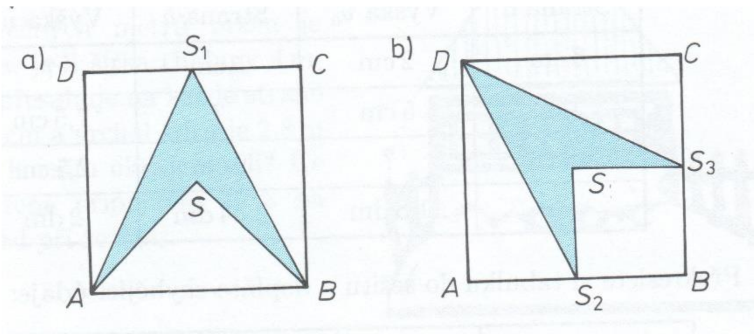
11. Které ze znázorněných trojúhelníků ve čtvercové síti mají stejné obsahy?



12. Zapište, kolik procent plochy zaujímá trojúhelník v dané podložce tvaru:
   a) čtverce, b) obdélníka.

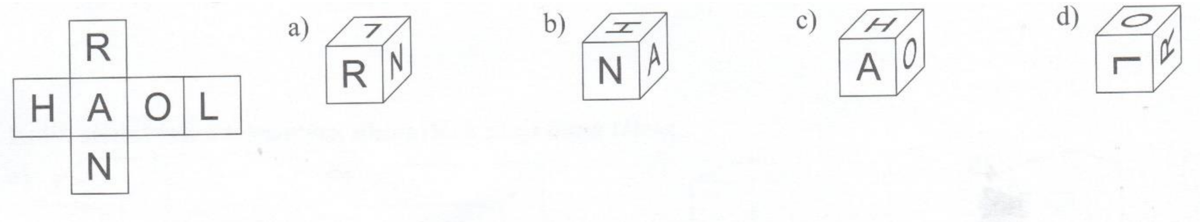


13. Vyjádřete zlomkem, jakou část obsahu čtverce ABCD tvoří obsahy vybarvených obrazců. Bod S je střed čtverce, body S_1, S_2, S_3 jsou středy stran.



14. Určete, kolik čtvercových dlaždiček o straně 5 cm je třeba k vydláždění dna a stěn zahradního bazénu tvaru kvádru. Hloubka bazénu je 1,5 m, šířka 2,5 m a délka 5 m. Spáry mezi dlaždičkami zanedbejte.

15. Která z kostek odpovídá zobrazení v síti?



3.4 Míra těles, objem tělesa

Definice 3: Míra těles je zobrazení **f** množiny všech těles na množinu všech nezáporných čísel. Číslo přiřazené tělesu T v tomto zobrazení se nazývá **objem tělesa** a značíme jej **f(T)**. Dále platí:

1. Existuje těleso, jehož objem je roven číslu 1: $(\exists\ \mathbf{T})\ \mathbf{f}\,(\mathbf{T}) = 1$,
2. Pro každé dvě shodná tělesa platí, že jejich objemy jsou si rovny:
   $(\forall\ \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})\ \mathbf{T_1} \cong \mathbf{T_2} \Rightarrow \mathbf{f}\,(\mathbf{T_1}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{T_2})$
3. Jestliže tělesa nemají společný žádný bod, pak objem jejich sjednocení se rovná součtu jejich objemů:
   $(\forall\ \mathbf{T_1}, \mathbf{T_2})\ \mathbf{T_1} \cap \mathbf{T_2} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{T_1} \cup \mathbf{T_2}) = \mathbf{f}\,(\mathbf{T_1}) + \mathbf{f}\,(\mathbf{T_2})$

Při měření obsahu obrazce jsme vyplňovali měřený obrazec jednotkovými čtverci. Podobně budeme postupovat při měření tělesa **T**. Těleso **T**, které měříme, budeme vyplňovat jednotkovými krychlemi. Měření tělesa **T** budeme provádět následujícím postupem:
Vyjdeme z tzv. **krychlové sítě S** o rozměru δ, kde je jednotková úsečka δ**.** Těleso **T** umístíme do krychlové sítě a určíme jádro a obal obdobně jako při měření rovinného obrazce.

- **Jádro J** tělesa v síti **S** je sjednocení všech jednotkových krychlí sítě **S**, že každý jejich bod náleží tělesu **T**.
- **Obal O** tělesa v síti **S** je sjednocení všech takových jednotkových krychlí sítě **S**, že alespoň jeden jejich bod náleží tělesu **T**.

Obal každého tělesa **T** obsahuje alespoň jednu krychli sítě **S**, jádro nemusí obsahovat žádnou krychli. Pro jádro **J**, těleso **T** a obal **O** platí vztah:

$$\mathbf{J} \subset \mathbf{T} \subset \mathbf{O}.$$

Poněvadž jádro **J** i obal **O** tělesa **T** jsou omezené útvary a hranice jádra i obalu jsou topologickým obrazem kulové plochy, jsou jádro **J** i obal **O** měřitelné prostorové útvary, lze tedy určit jejich velikost.

- Velikost jádra **f(J)** je počet krychlí jádra **J** tělesa **T** v síti **S**.
- Velikost obalu **f(O)** je počet krychlí obalu **O** tělesa **T** v síti **S**.

Získáváme vztah:

$$\mathbf{f(J)} \le \mathbf{f(T)} \le \mathbf{f(O)}$$

Velikost jádra **f(J)** je **dolní mez**, velikost obalu **f(O)** je **horní mez** velikosti tělesa **T**.
Chceme-li měření zpřesnit, vytvoříme tzv. zjemněnou síť $\mathbf{S_1}$, o rozměru δ_1, kde $\delta_1 < \delta$. Analogicky jako při zjemňování čtvercové sítě při měření obsahu obrazců, volíme novou jednotkovou úsečku δ_1 velikosti jedné desetiny úsečky δ, tj. $\delta_1 = \frac{1}{10}\delta$. Proces zjemňování sítí není omezen, můžeme vytvořit množinu sítí $\mathbf{S_1, S_2, \dots, S_k}$, kde každá ze sítí $\mathbf{S_k}$ je zjemněním sítě $\mathbf{S_{k-1}}$. V každé síti $\mathbf{S_k}$ lze tělesu **T** přiřadit jádro $\mathbf{J_k}$ a obal $\mathbf{O_k}$. Z definice jádra a obalu plyne platnost množinových inkluzí:

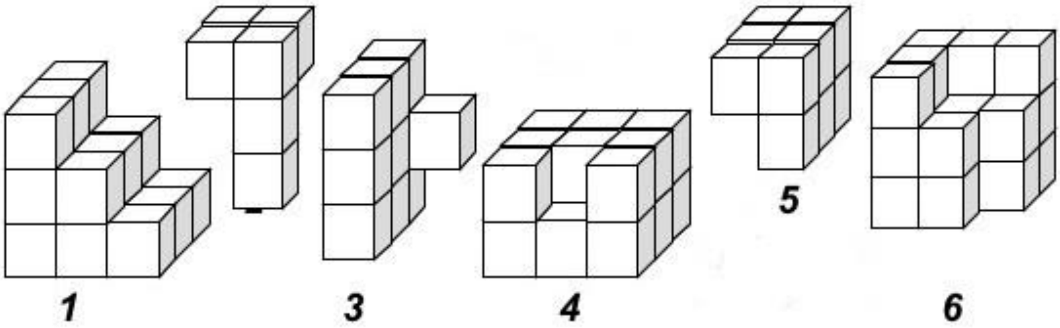
$$\mathbf{J \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots J_n \subset \dots \subset T \subset \dots O_n \subset \dots O_3 \subset O_2 \subset O_1 \subset O}$$

Pro velikosti jader, tělesa a obalů podobně platí

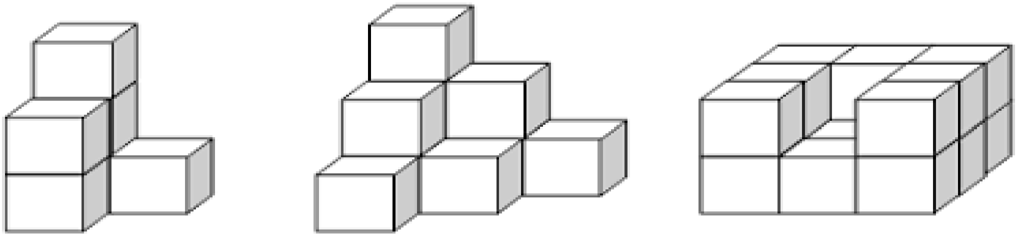
$$\mathbf{f(J) \le f(J_1) \le f(J_2) \le f(J_3) \dots \le f(J_n) \le f(T) \le f(O_n) \dots \le f(O3) \le f(O_2) \le f(O_1) \le f(O)}$$

Úlohy:

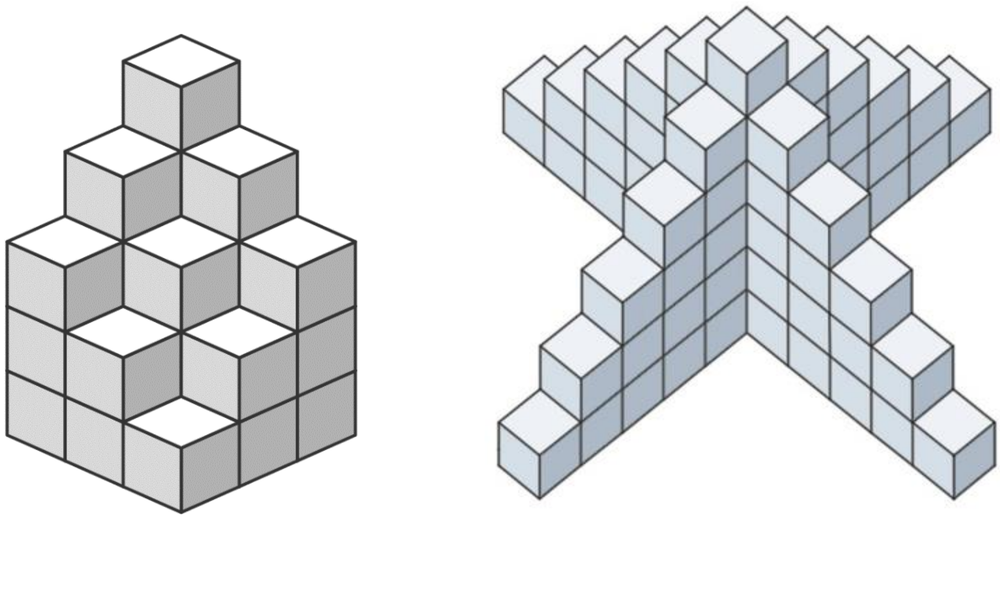
1. Rozhodněte, které dvojice ze šesti daných útvarů vytváří krychli.



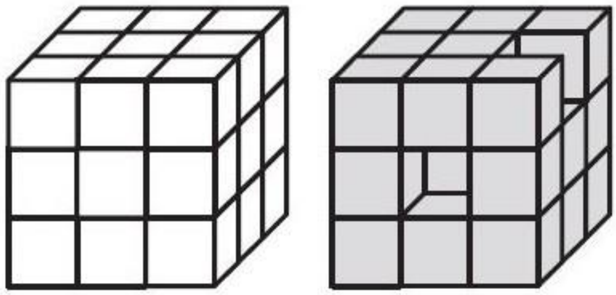
2. Určete, z kolika krychlí jsou postaveny tyto prostorové útvary.



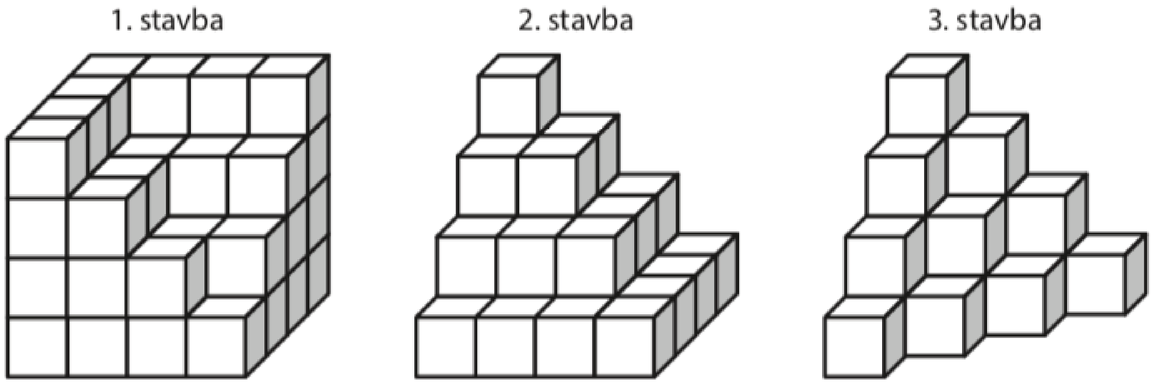
3. Určete, z kolika krychlí jsou postaveny tyto prostorové útvary.



4. Krychle byla slepena z 27 malých bílých krychliček o hraně délky 2 cm. Dvě malé krychličky odstraníme a vznikne tak nové těleso. Všechny dostupné plochy tohoto nového tělesa byly obarvené na šedo (i zespodu). Jaký je celkový obsah všech šedých ploch nového tělesa?

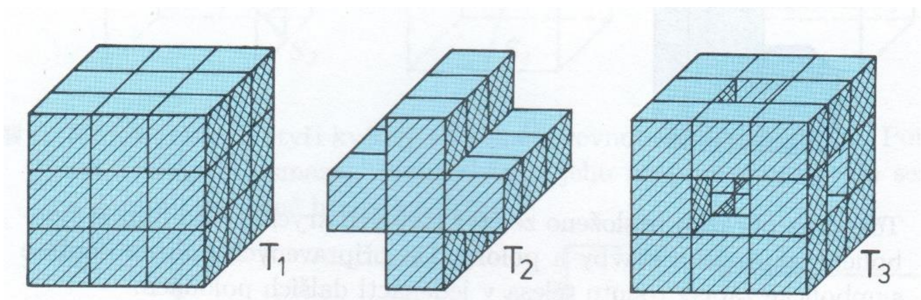


5. Anička postavila na podložce krychli, která měla v každé řadě 4 krychličky. Když z postavené krychle odebrala několik krychliček, vytvořila 1. stavbu. Po odebrání dalších krychliček vytvořila 2. stavbu a z té nakonec vytvořila 3. stavbu. Kolik krychliček musela Anička odebrat z 1. stavby, aby získala 2. stavbu? Kolik krychliček musela Anička odebrat z 2. stavby, aby získala 3. stavbu?



6. Tělesa T_2 a T_3 vznikla z krychle T_1 složené z 27 stejných kostek (délka hrany jedné kostky je 1 cm) tak, že jsme několik kostek odebrali. Na obrázku je vidíte zepředu, při pohledu zezadu vypadají stejně. Určete:
   a) jaký mají tělesa T_2 a T_3 objem,

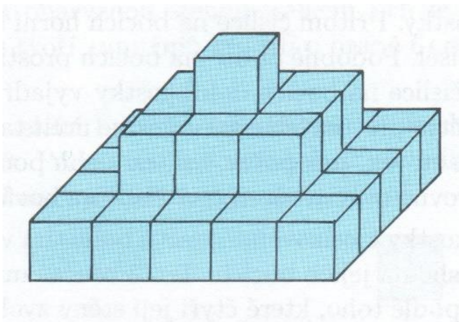
   b) jaký mají tělesa T_2 a T_3 povrch.



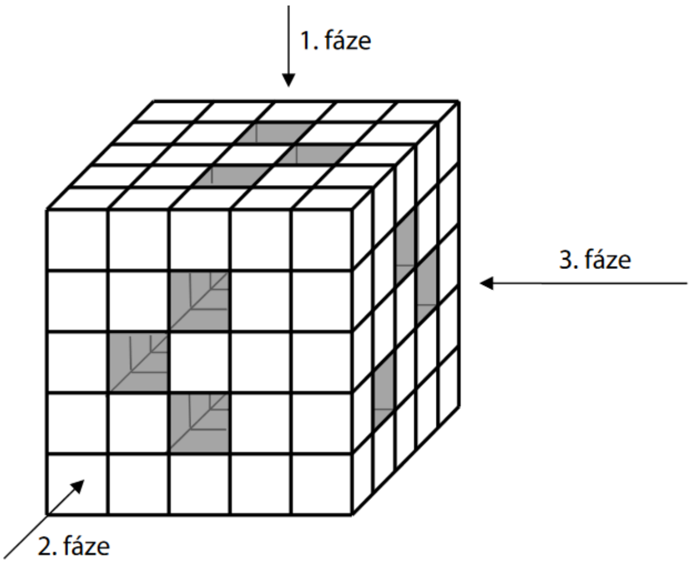
7. Na obrázku je nakreslena tříposchoďová pyramida složená ze stejných kostek o hraně 1 cm.
   a) Jaký má toto těleso objem?

b) Jaký má toto těleso povrch?

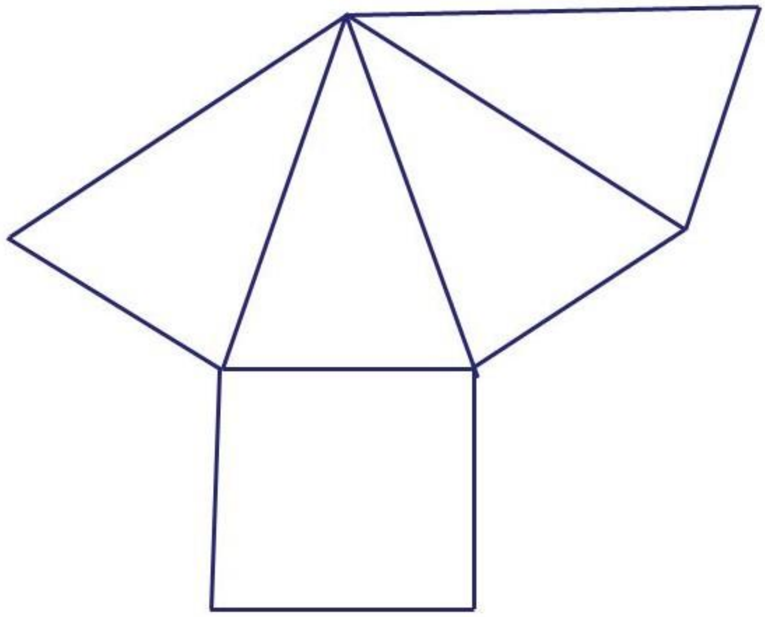
c) Kolik poschodí bude mít podobná pyramida složená ze 455 stejných kostek?



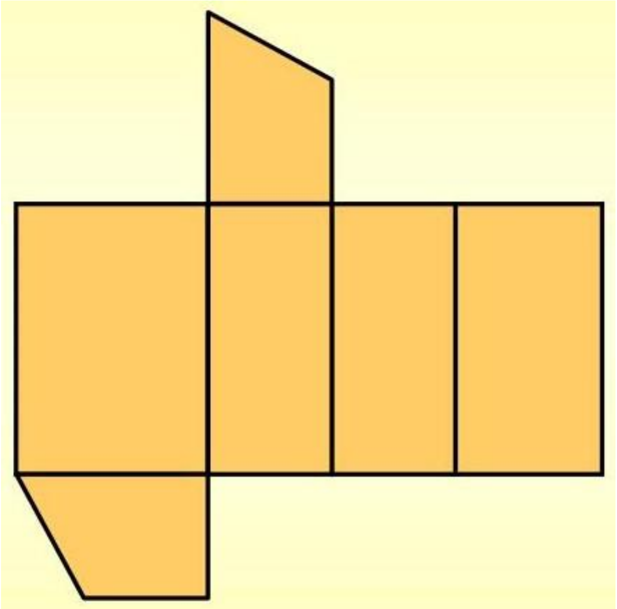
8. V krychli slepené ze 125 krychliček (po 5 v každé řadě) se vytvoří 9 otvorů skrz naskrz (ústí každého otvoru je vyznačeno tmavě).
V první fázi se vytvoří svislé otvory tak, že se vyznačí celkem 15 krychliček ze tří svislých sloupců. Ve druhé fázi se prorazí tři otvory směřující zepředu dozadu. Ve třetí fázi se vytlačí poslední krychličky tak, aby vznikly tři otvory směřující zprava doleva. Z kolika krychliček je složen takto vytvořený prostorový útvar?



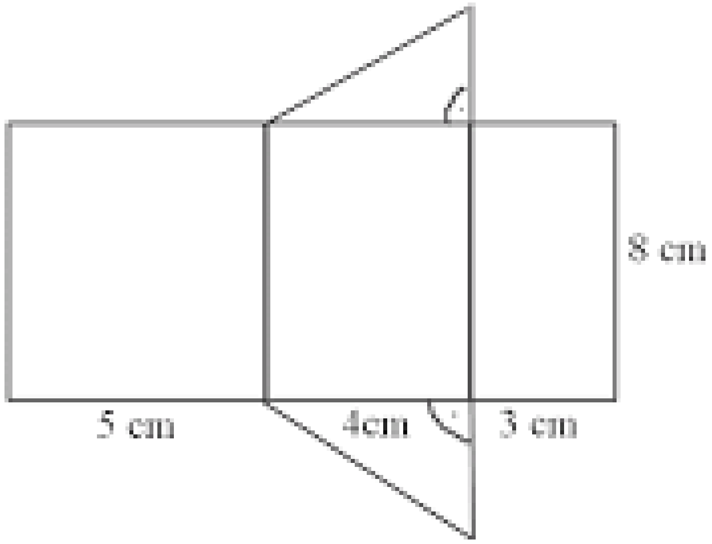
9. Pojmenuj těleso, jehož síť je na obrázku:



10. Pojmenuj těleso, jehož síť je na obrázku:



11. Pojmenuj těleso, jehož síť je na obrázku a urči jeho povrch a objem.



Použitá literatura:

1. STOPENOVÁ, Anna: *Základy matematiky 5*. Vyd. 1. Olomouc: Univerzita Palackého, Pedagogická fakulta, 2006, 67 stran.
2. FRANCOVÁ, Marta, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ: *Texty k základům elementární geometrie*. Vyd. 1. Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1985, 104 stran.
3. BĚLÍK, Miloslav: *Geometrie s didaktikou: učební text pro studium učitelství prvního stupně základní školy*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, 2007, 47 stran.
4. CHYTRÝ, Vlastimil: *Geometrie s didaktikou II.* Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Katedra psychologie, 2013, 84 stran.
5. LVOVSKÁ, Leni a Marta FRANCOVÁ: *Texty k základům elementární geometrie: pro studium učitelství 1. stupně základní školy.* Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, 2014, 77 stran.
6. JEDLIČKOVÁ, M., KRUPKA, P., NECHVÁTALOVÁ, J.: *Pracovní sešit. Matematika. Hranoly a válce*. Brno: Nová škola, 2016.
7. JEDLIČKOVÁ, M., KRUPKA, P., NECHVÁTALOVÁ, J.: *Pracovní sešit. Matematika. Rovinné útvary.* Brno: Nová škola, 2015.