Algebra 1

5. cvičení – Struktury se dvěma operacemi

Budeme se opírat o text doktora Fajmona ve studijních materiálech (strany 60-64), prostudujte si jej, prosím.

Zde uvedu pouze definice základních pojmů.

Vedle algebraických struktur s jednou operací existují i algebraické struktury se dvěma operacemi, typicky se sčítáním a násobením (jak budou operace značeny i v definicích), ale může se jednat i o obecně definované operace, např. $\circ, *$.

Def.: **OKRUH** je množina M s operacemi $+, \cdot$, tedy $(M, +, \cdot)$, které splňují vlastnosti:

a) Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $+$, operace $+$ na M je komutativní, asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku existuje prvek inverzní, tj. $(M, +)$ je komutativní grupa.

b) Množina M je uzavřená vzhledem k operaci $\cdot$, operace $\cdot$ na M je asociativní a má neutrální prvek, tj. $(M, \cdot)$ je monoid.

c) Operace $+$ a $\cdot$ na M splňují distributivní zákon
$$\forall x, y, z \in M: \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \wedge \quad (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Def.: **OBOR INTEGRITY** je okruh $(M, +, \cdot)$, který navíc splňuje, že M neobsahuje netriviální dělitele nuly (vzhledem k operaci $\cdot$) a operace $\cdot$ je na M komutativní.

(díky komutativitě $\cdot$ stačí psát jeden z distributivních zákonů)

Def: <u>NETRIVIÁLNÍ DĚLITELÉ NULY</u> jsou takové prvky a, b množiny M, které se nerovnají nule (ani jeden z nich), tedy neutrálnímu prvku v grupě $(M,+)$, ale jejich součin (výsledek operace $a \cdot b$) je roven nule, tedy $a \cdot b = 0$ → neutrální prvek $(M,+)$

zbytkové třídy po dělení 6

Př. 1 Ve struktuře $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$, kde $[a] \oplus [b] = [a+b]$, $[a] \odot [b] = [a \cdot b]$, nalezněte dvě dvojice nenulových prvků, které po vynásobení dávají nulu.

Def: <u>TĚLESO</u> je obor integrity $(M, +, \cdot)$, kde navíc operace $\cdot$ na $M-\{0\}$ splňuje vlastnost, že ke každému prvku existuje prvek inverzní, tedy $(M-\{0\}, \cdot)$ je grupa.

neutrální prvek $(M,+)$

Př. 2

Př. 2: Určete typ struktury $(A, \circ, *)$, kde $A = \mathbb{Z}$,

$$x \circ y = x + y - 1$$

$$x * y = x + y - xy$$

Řešení:

operace $\circ$

U ✓ $x \circ y = x + y - 1$, pokud $x, y \in \mathbb{Z}$, pak i $x + y - 1 \in \mathbb{Z}$

K ✓ $x \circ y = x + y - 1$, $y \circ x = y + x - 1 = x + y - 1$

A ✓ $(x \circ y) \circ z = (x + y - 1) \circ z = x + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 2$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 1) = x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2$

$\exists n$ ✓ $x \circ n = x$

$x + n - 1 = x$

$n = 1 \in \mathbb{Z}$

$(M, \circ)$ je komutativní grupa

$\exists x^{-1}\ \forall x$ ✓ $x \circ x^{-1} = n$

$x + x^{-1} - 1 = 1$ pokud $x \in \mathbb{Z}$, pak i $2 - x \in \mathbb{Z}$

$x^{-1} = -x + 2$

operace $*$

U ✓ $x * y = x + y - xy$, pokud $x, y \in \mathbb{Z}$, pak i $x + y - xy \in \mathbb{Z}$

K ✓ $x * y = x + y - xy$, $y * x = y + x - yx = x + y - xy$

A ✓ $(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y - xy + z - zx - zy + xyz$ ✓

$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz$

$\exists n$ ✓ $x * n = x$

$x + n - xn = x$

$n(1 - x) = 0$

$n = 0 \in \mathbb{Z}$

$(M, \cdot)$ je monoid, $\cdot$ je na M komutativní

$\exists x^{-1}\ \forall x$ ✗ $x * x^{-1} = n$

$x + x^{-1} - x x^{-1} = 0$

$x^{-1} = \frac{-x}{1 - x}$ např. pro $x = 3$

$x^{-1} = \frac{-3}{1 - 3} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

Netriviální dělitelé 0? ✗ $x + y - xy = 1 \land x \neq 1 \land y \neq 1$ nelze $\left(y = \frac{1 - x}{1 - x} = 1\right.$, podobně $\left.x\right)$

Distributivní zákon? (Stačí jeden díky komutativitě $(M,*)$)

$$x*(y\circ z) = x*y \circ x*z$$

L: $x*(y\circ z) = x*(y+z-1) = x+y+z-1-xy-xz+x$

P: $x*y\circ x*z = (x+y-xy)\circ(x+z-xz) = x+y-xy+x+z-xz-1$

L = P

Struktura $(A,\circ,*)$ je obor integrity.

Př. 3: Určete typ struktury $(\mathbb{R},\circ,*)$, kde platí
$x\circ y = x+y+2$, $x*y = 2x+2y+xy+2$

Př. 4: Určete typ struktury $(\mathbb{Z}_5,\oplus,\odot)$, kde platí
$[x]\oplus[y]=[x+y]$, $[x]\odot[y]=[x\cdot y]$, $\mathbb{Z}_5$ jsou zbytkové třídy po dělení 5, tedy $\mathbb{Z}_5 = \{[0],[1],[2],[3],[4]\}$

Př. 5: Určete typ struktury $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ s obyčejnými operacemi sčítání a násobení.

Př. 6: Určete typ struktury $(B,\circ,*)$, kde platí
$B=\{x,y\}$

$\circ$	x	y
x	x	y
y	y	x

$*$	x	y
x	x	x
y	x	y

Do příštího cvičení se podívejte na příklady 1 a 3-6.