

# Kapitola 1

## Posloupnosti

S pojmem posloupnosti jsme se již setkali na střední škole, zejména jsme procvičovali posloupnost aritmetickou a geometrickou. V této kapitole si dané poznatky zopakujeme a rozšíříme o další pojmy.

### 1.1 Definice a vlastnosti

**Def. 1.1** *Posloupnost je zobrazení z množiny  $\mathbb{N}$  do množiny  $\mathbb{R}$ .*

Tuto definici můžeme přepsat do tvaru *Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel.*

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů  $[n; f(n)]$ . Místo  $f(n)$  bývá zvykem psát  $a_n$  a mluvíme o  $n$ -tém členu posloupnosti. Posloupnost můžeme zadat výčtem členů, obecným vzorcem či rekurentním vzorcem. Tyto způsoby si ukážeme na příkladech.

**Příklad 1.1**  $\{a_n\} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ . Zde je zřejmé, že členy posloupnosti jsou prvočísla seřazená podle velikosti. Vyjádření zbývajícími dvěma způsoby je prakticky nemožné. Pokud bychom chtěli být pedanti, měli bychom psát  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ . Pokud nemůže dojít k nedorozumění, tak se indexy vynechávají.

**Příklad 1.2** Nám již známa aritmetická posloupnost je definována obecným vzorcem  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ , kde  $d$  je diference. Posloupnost geometrická je pak dána vzorcem  $a_n = a_1q^{n-1}$ , kde  $q$  je kvocient.

**Příklad 1.3** Nám již známá aritmetická posloupnost je definována rekurentním vzorcem  $a_n = a_{n-1} + d$ ,  $a_1 = c$ , kde  $d$  je diference. Posloupnost geometrická je pak dána vzorcem  $a_n = a_{n-1}q$ ,  $a_1 = c$ , kde  $q$  je kvocient.

**Def. 1.2** *Posloupnost  $\{a_n\}$  se nazývá*  
*rostoucí, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+1} > a_n$ ,*  
*klesající, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+1} < a_n$ ,*  
*nerostoucí, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+1} \leq a_n$ ,*  
*neklesající, jestliže pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_{n+1} \geq a_n$ ,*  
*ohraničená (omezená) shora, jestliže existuje  $K \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$*

platí  $a_n \leq K$ ,

ohraničená (omezená) zdola, jestliže existuje  $k \in \mathbb{R}$  takové, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n \geq k$ .

Posloupnost, která je ohraničená shora i zdola se nazývá ohraničená.

**Příklad 1.4** Zjistěte, zda posloupnost  $\{\frac{n+1}{n}\}$  má některou z uvedených vlastností.

Zkusíme si vypsat několik prvních členů posloupnosti:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = \frac{3}{2}$ ,  $a_3 = \frac{4}{3}$ ,  $a_4 = \frac{5}{4}$ . Vypadá to, že posloupnost bude klesající, přijmeme tedy tuto hypotézu. Jelikož  $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$  a  $a_n = \frac{n+1}{n}$ , musí pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platit  $\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}$ . Snadnou úpravou dojdeme k nerovnosti  $0 < 1$ , která je pravdivá a nezávislá na  $n$ , naše hypotéza se tedy potvrdila.

Jelikož je posloupnost klesající, je první člen největší, tedy platí, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  je  $a_n \leq 2$  a posloupnost je omezená shora. Posloupnost obsahuje pouze kladná čísla, je tedy každý člen větší než nula a posloupnost je ohraničená i zdola. Abychom získali co nejlepší informace u posloupnosti, bývá zvykem jeti pikem, pardon, to patří do kartografie. Bývá zvykem uvádět hranice nejmenší či největší. Uvědomíme-li si, že číselník zlomku je vždy o jedničku větší než jmenovate, je jasné, že všechny členy posloupnosti budou větší než jedna.

Z uvedeného postupu je také zřejmé, že ani špatný odhad hypotézy nás nemůže vykolejit. Pokud bychom předpokládali, že tato posloupnost je rostoucí, došli bychom k nepravdivé nerovnosti, musí tedy platit hypotéza opačná.

Navíc to, že si vypíšeme několik prvních členů posloupnosti, by nás nemělo vést k ukvapeným závěrům. Budeme-li vyšetřovat posloupnost  $\{\frac{2214442^n}{n!}\}$  a napíšeme-li si několik prvních členů posloupnosti, můžeme přijít k ukvapenému závěru, že se jedná o posloupnost rostoucí, a to i v případě, že budeme mít dost trpělivosti a psací látky a vypíšeme-li třeba prvních padesát tisíc členů. Uvědomme si ale, že každý další člen posloupnosti získáme tak, že předchozí vynásobíme jistým zlomkem, jehož číselník budou vždy stejný a jmenovatel se bude zvětšovat. Po určitém počtu kroků tedy dospějeme do stavu, že člen předchozí budeme násobit číslem menším než jedna a členy se budou zmenšovat.

Vraťme se však k posloupnosti  $\{\frac{n+1}{n}\}$ . Všechny členy posloupnosti budou čísla větší než jedna, pro velké hodnoty  $n$  se však číselník a jmenovatel nebudou příliš lišit, zlomek tedy bude skoro roven jedné. Dejme tomu, že nám bude stačit počítat s přesností na dvě desetinná místa. Vyjádřeno matematicky musí platit  $\frac{n+1}{n} - 1 < 0,01$ . Snadnou úpravou zjistíme, tento požadavek je splněn pro všechny členy stoprvním počínaje. Řečeno mluvou inženýra stým prvním členem počínaje budou všechny v toleranci 0,01 od středu reprezentovaném jedničkou. Sestrojíme graf posloupnosti a a sestrojme přímky  $y = 1,01$  a  $y = 0,99$ . Tyto dvě přímky vytvoří pás o šířce 0,02 a stým prvním členem počínaje budou všechny v tomto tolerančním pásu. Samozřejmě se tolerance 0,01 může někomu zdát příliš hrubá. Zvolí-li si někdo toleranci jemnější, pak stejnou úvahou dojde k podobnému závěru, že od jistého členu všechny členy padnou do tolerančního pásu. Tyto úvahy nás vedou k zavedení důležitého pojmu **limita posloupnosti**.

**Def. 1.3** Necht' je dána posloupnost  $\{a_n\}$  a číslo  $L \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má vlastní limitu  $L$ , jestliže ke každému  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové,

že pro všechna  $n > n_0$  platí  $|a_n - L| < \varepsilon$ . Má-li posloupnost vlastní limitu, říkáme, že konverguje (k číslu  $L$ ).

Pokud jsme pojem vlastní limity správně pochopili, je nám jasné, že pro všechna  $n > n_0$  se členy posloupnosti nemohou příliš lišit od jistého reálného čísla  $L$  (vlastní limity) a že tedy nemohou neomezeně růst či klesat, jinými slovy taková posloupnost musí být ohraničená. Máme tedy dobrý důvod vyslovit následující tvrzení, jehož důkaz lze najít v uvedené literatuře.

**Věta 1.1** Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.

Musíme podotknout, že nepatří k právům posloupnosti mít vlastní limitu. Uvažujme posloupnost  $\{n^2\}$ . Snadno se přesvědčíme, že se jedná a posloupnost rostoucí a jelikož členy jsou pouze kladná čísla, tak je i zdola ohraničená. S ohraničeností shora je to již horší. Zvolíme-li si libovolné reálné číslo  $K$ , byť sebevíc velké, vždy dojdeme k nezvratnému závěru, že všechny členy, jejichž index je větší než  $\sqrt{K}$  tuto závěru přeskóčí. Můžeme tedy definovat nevlastní limitu následujícím způsobem:

**Def. 1.4** Nechť je dána posloupnost  $\{a_n\}$  a číslo  $K \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má nevlastní limitu  $+\infty$ , jestliže ke každému  $K \in \mathbb{R}$ , existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n > n_0$  platí  $a_n > K$ . Podobným způsobem lze definovat nevlastní limitu  $-\infty$ . Má-li posloupnost nevlastní limitu, říkáme, že diverguje.

Podívejme se ještě na posloupnost  $\{\cos n\pi\}$ . Pro lichá  $n$  jsou členy posloupnosti rovny  $-1$ , pro sudá  $n$  zase  $+1$ . Tato posloupnost limitu nemá, neboť je zřejmé, že vzdálenost dvou sousedních členů na ose  $y$  je vždy dvě. Nepodaří se nám na ose  $y$  najít žádný bod takový, že by se nám do libovolného tolerančního pásu podařilo uzavřít všechny členy posloupnosti jistým indexem  $n_0$  počínaje. Jelikož se jedná o ohraničenou posloupnost, nemůže mít ani limitu nevlastní. O takové posloupnosti říkáme, že *osciluje*.

Z posledního příkladu plyne, že posloupnost mít limitu nemusí. Pokud ji má, pak jen jednu, což můžeme shrnout do následujícího tvrzení.

**Věta 1.2** Každá posloupnost má nejvýš jednu limitu.

Některé limity můžeme počítat přímo z definice. Vratíme-li se o pět odstavců výše a zopakujeme-li postup pro posloupnost  $\{\frac{n+1}{n}\}$  s tím, že číslo  $0,01$  nahradíme obecným číslem  $\varepsilon > 0$ , máme důkaz, že  $\lim\{\frac{n+1}{n}\} = 1$ . Podobně dokážeme, že  $\lim\{\frac{1}{n}\} = 0$ , toto necháme čtenáři na samostatné cvičení. Jelikož v případě posloupností se vždy jedná o limitu pro  $n \rightarrow \infty$ , bývá zvykem z úsporných důvodů tento symbol vynechávat. Tušíme však, že výpočet limity na základě definice nemusí být vždy tak jednoduchý jako ve výše uvedených případech. Je tedy na místě otázka, zda si můžeme při výpočtu limity počínat i jiným způsobem. Odpověď zní ano, pro výpočet limity máme řadu způsobů, které lze použít. Tak především limita kopíruje aritmetické operace jakož i absolutní hodnotu, platí tedy následující tvrzení.

**Věta 1.3** Nechť platí  $\lim\{a_n\} = A$  a  $\lim\{b_n\} = B$ , přičemž platí  $A, B \in \mathbb{R}$ . Pak je

- $\lim\{|a_n|\} = |A|,$

2.  $\lim (\{a_n\} \pm \{b_n\}) = A \pm B$ ,
3.  $\lim (\{a_n\} \cdot \{b_n\}) = A \cdot B$ ,
4.  $\lim \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{A}{B}$ , je-li  $B \neq 0$ .

Zkusíme dokázat tvrzení č. 2. Chceme dokázat, že ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0$  takové, že pro všechna  $n > n_0$  je  $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$ . Existuje pro nějaké  $\varepsilon_1 > 0$   $n_a$  tak, že pro všechna  $n > n_a$  je  $|a_n - A| < \varepsilon_1$  a  $n_b$  tak, že pro všechna  $n > n_b$  je  $|b_n - B| < \varepsilon_1$ . Zvolme  $n_0$  větší z obou čísel  $n_a$  a  $n_b$  a  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ . Pak pro všechna  $n > n_0$  je  $|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$ . Zbývající tvrzení si zkuste dokázat sami či si jejich důkazy prostudujte v literatuře.

Další užitečnou větu pro výpočet limity uvedeme reálnou situací. Představme si, že tři lidé jdou vedle sebe úzkou chodbou držíce se za ruce. Pokud oba krajníci projdou aniž by se odřeli o stěny, je zřejmé, že ani ona osoba jdoucí uprostřed neutrpí žádnou újmu. Proto můžeme tvrdit, ačkoliv výše uvedené nelze považovat za matematický důkaz, že je správné následující tvrzení.

**Věta 1.4** *Nechť jsou dány posloupnosti  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  a  $\{c_n\}$ , přičemž pro všechna  $n > n_0$  platí  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Nechť dále  $\lim\{a_n\} = \lim\{c_n\} = L$ , kde  $L \in \mathbb{R}$ . Pak platí, že  $\lim\{b_n\} = L$ .*

Použití si ukážeme na jednoduchém příkladu.

**Příklad 1.5** Určete  $\lim\{\frac{1}{n^3+6}\}$ . Zřejmě platí  $0 \leq \frac{1}{n^3+6} \leq \frac{1}{n}$ . Jelikož limity obou krajních posloupností jsou rovny nule, musí platit  $\lim\{\frac{1}{n^3+6}\} = 0$ .

A ještě jedna věta, která nám může napomoci k výpočtu limity.

**Věta 1.5** *Nechť  $\lim a_n = 0$  a posloupnost  $\{b_n\}$  je ohraničená. Pak  $\lim a_n \cdot b_n = 0$ .*

A na demonstraci opět jednoduchý příklad.

**Příklad 1.6** Vypočtete  $\lim \frac{\sin n}{n}$ . Abychom dodrželi označení předchozí věty, máme  $a_n = \frac{1}{n}$  a  $b_n = \sin n$ . Jelikož je  $\lim \frac{1}{n} = 0$  a posloupnost  $\{\sin n\}$  je ohraničená čísly  $-1$  a  $+1$ , je  $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$ .

**Věta 1.6** *Nechť  $\lim\{a_n\} = \pm\infty$ . Pak  $\lim \frac{1}{\{a_n\}} = 0$ . Nechť dále platí  $\lim\{a_n\} = 0$  a pro všechna  $n > n_0$  platí  $a_n > 0$  ( $a_n < 0$ ). Pak  $\lim \frac{1}{\{a_n\}} = +\infty$  ( $\lim \frac{1}{\{a_n\}} = -\infty$ ).*

K této větě si dovolíme malý komentář. Někdy se také nepřesně říká, že  $\frac{1}{\infty} = 0$  či  $\frac{1}{0} = \pm\infty$ . Musíme mít na paměti, že se v každém případě jedná o limitu posloupnosti či funkce, jak uvidíme v následující kapitole. Zatímco první situace je zřejmá, ve druhém případě musíme rozlišit, zda jsou od jisté meze všechny členy kladné (záporné). Například limita posloupnosti  $a_n = \frac{1}{(-1)^n n}$  neexistuje, posloupnost totiž osciluje. Při výpočtu limity můžeme narazit i na podivné výrazy jako  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  a podobně. V případě těchto **neurčitých výrazů**, jak zní správné označení těchto podivností se již nelze spoléhat na intuici a říci že je to nula či jednička. Tyto limity někdy existují a někdy ne, musíme postupovat případ od případu. V kapitole o aplikacích derivace poznáme poměrně jednoduchý způsob, jak některé z nich vypočítat.

**Věta 1.7** Každá neklesající, shora ohraničená posloupnost  $\{a_n\}$  má vlastní limitu, která je rovna suprému množiny tvořené všemi členy posloupnosti. Každá nerostoucí, zdola ohraničená posloupnost  $\{a_n\}$  má vlastní limitu, která je rovna infimu množiny tvořené všemi členy posloupnosti.

Závěrem uvedeme ještě jednu důležitou limitu. Lze dokázat, že  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

**Příklad 1.7** Vypočtěte  $\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$ . Podíváme-li se na daný výraz, zjistíme, že se hodně podobá výše uvedené limitě, problém je však v tom, že exponent neodpovídá jmenovateli zlomku. To snadno napravíme jednoduchým trikem, platí totiž  $\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{\frac{3n}{3}} = \sqrt[3]{\lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}}$ . Zavedeme-li substituci  $3n = m$ , máme  $\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sqrt[3]{e}$ .

Vraťme se k posloupnosti  $\{\cos \pi n\}$ . Jak již zjistili znalci goniometrických funkcí vidí, že všechny liché členy posloupnosti mají hodnotu  $-1$ , kdežto sudé jsou rovny a posloupnost limitu nemá. Pokud bychom škrtili všechny sudé (liché) členy posloupnosti, dostali bychom opět nekonečnou posloupnost, tentokrát ovšem konvergentní s limitou  $-1$  (1). Opticky to vypadá tak, že se členy této posloupnosti hromadí kolem těchto dvou čísel. Škrtní ponechme ministrům financím a definujme nyní pojem vybraná posloupnost.

**Def. 1.5** Nechť je dána posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  se nazývá vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Nyní uvedeme jednu větu, která navazuje na předchozí úvahy.

**Věta 1.8** Nechť  $\{a_{n_k}\}$  je vybraná posloupnost z posloupnosti  $\{a_n\}$  a nechť platí  $\lim \{a_n\} = L$ . Pak i  $\lim \{a_{n_k}\} = L$ .

Na základě této věty ukážem, že posloupnost  $a_n = \cos n\pi$  nemá limitu. Pokud by totiž bylo limitou číslo 1, pak by toto číslo muselo být i limitou vybrané posloupnosti členů s lichými indexy. Tak tomu evidentně není a stejná úvaha platí i pro číslo  $-1$ . další čísla ani nepřicházejí v úvahu.

Než přistoupíme k definici hromadného bodu, musíme si uvědomit, že členy posloupnosti se mohou hromadit i nad (pod) určitou hranicí. Připomínáme rozšířenou reálnou osu, kdy k reálným číslům přidáme symboly  $\pm\infty$ . Rozšířenou reálnou osu obvykle značíme  $\mathbb{R}^*$ .

**Def. 1.6** Nechť je dána posloupnost  $\{a_n\}$  a číslo  $H \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má hromadný bod  $H$ , jestliže ke každému  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro nekonečně mnoho  $n > n_0$  platí  $|a_n - H| < \varepsilon$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má hromadný bod  $+\infty$ , jestliže ke každému  $K \in \mathbb{R}$ , existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro nekonečně mnoho  $n > n_0$  platí  $a_n > K$ . Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  má hromadný bod  $-\infty$ , jestliže ke každému  $K \in \mathbb{R}$ , existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro nekonečně mnoho  $n > n_0$  platí  $a_n < K$ .

Uvedeme dvě věty o hromadných bodech.

**Věta 1.9** *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

Má-li posloupnost více hromadných bodů, lze je seřadit podle velikosti. Má-li posloupnost pouze jeden hromadný bod, je tento současně jak nejmenší, tak i největší. Předchozí větu můžeme uvést i ve znění, že každá posloupnost má největší a nejmenší hromadný bod. Definujeme následující pojmy:

**Def. 1.7** *Nechť je dána posloupnost  $\{a_n\}$ . Největší z hromadných bodů nazveme limita superior a značíme  $\limsup a_n$ . Nejmenší z hromadných bodů nazveme limita inferior a značíme  $\liminf a_n$ .*

Platí věta:

**Věta 1.10** *Posloupnost  $\{a_n\}$  má limitu právě tehdy, když platí  $\limsup a_n = \liminf a_n$ . Tato společná hodnota je limitou posloupnosti.*

**Věta 1.11** *Číslo  $H \in \mathbb{R}^*$  je hromadným bodem posloupnosti  $\{a_n\}$  právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost  $\{a_{n_k}\}$  taková, že  $\lim \{a_{n_k}\} = H$ .*

Následující věta je nazývána Bolzanova- Weierstrassova a má velký význam v řadě oblastí matematické analýzy.

**Věta 1.12** *Z každé ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní.*

Závěrem uvedeme ještě jeden důležitý pojem, s nímž se můžeme setkat především v teorii.

**Def. 1.8** *Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je cauchyovská, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n > n_0$  platí  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .*

Závěrem uvedeme ještě jednu větu, která je známa jako Cauchy-Bolzanovo kritérium konvergence.

**Věta 1.13** *Posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.*

# Kapitola 2

## Limita a spojitost funkce

Úvodem mi dovoluete několik slov. V současných učebnicích diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné se začíná výkladem pojmu limita. Moje dlouhodobá zkušenost však ukazuje, že studenti tento pojem nechápou, je jim cizí a jeho výpočet chápou formálně. Je historickou pravdou, že se již dvě století vesele a úspěšně derivovalo, aniž existoval pojem limity. Pokusím se vysvětlit, jak je to možné a proč tedy bylo nutno vynalézt limitu.

Vraťme se do 17. století a vyřešme jeden problém, který se týká stanovení vzorce pro okamžitou rychlost, známe-li vztah pro dráhu. Snad to velikán vědy přežije, použiji-li jeho jméno v následujícím výkladu. Newton znal vzorec pro dráhu pohybu rovnoměrně zrychleného, speciálním případem je pak volný pád. Koneckonců není ani problém si tento vzorec experimentálně ověřit ve fyzikálním praktiku. Vyjděme tedy ze znalosti vzorce  $s = \frac{1}{2}at^2$  (pro volný pád platí  $a = g = 9,81m.s^{-2}$ ) a ptejme se, jaká je okamžitá rychlost pohybujícího se tělesa v čase  $t_0$ . Otázku lze formulovat i jinak, například jakou rychlostí dopadneme, spadneme-li z jisté výšky  $s_0$ . Na danou otázku nemůžeme odpovědět, neboť patřičný vzorec nemáme k dispozici. Známe však vzorec pro průměrnou rychlost, spočtíme tedy alespoň tuto veličinu.

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t} = \frac{at_0\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t}.$$

Newton a jeho pomocník dlouho vyšetřovali tento pohyb, avšak žádných výsledků se nedobrali. Teprve až pomocník onemocněl a poslal za sebe svoji sličnou choť došlo k pokroku. Je lidské, že Newton postavil svoji pomocnici do své blízkosti, čímž se časový interval  $\Delta t$  velice zmenšil. V té chvíli si vědec uvědomil, že pokud bude tento časový úsek skoro roven nule, bude průměrná rychlost takřka rovna rychlosti okamžité, neboť pohybující se těleso nebude mít možnost rychlost významně změnit.

Pomocí kalkulačky lze demonstrovat, že pro dostatečně malé  $\Delta t$  můžeme její druhou mocninu vypustit, aniž by to změnilo výsledek. Pokud druhou mocninu zanedbáme, dostaneme po zkrácení  $\Delta t$  vzorec  $v = at$ , což je správný vzorec.

Zkusme se abstrouhat od fyzikální podstaty. Mějme tedy kvadratickou funkci  $y = x^2$ . Zopakujme si, že okamžitá rychlost je číselně rovna změně (přírůstku) dráhy za jednotku času. Určíme přírůstek kvadratické funkce  $y = x^2$  vztažený na jednotkovou změnu proměnné  $x$ . Postup je obdobný jako při stanovení průměrné

rychlosti.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

Pojem derivace bývá často motivován i úlohou nalázt tečnou ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$ . Jelikož přímka je dána dvěma body, musíme vyjít z rovnice sečny v bodě  $x_0$ . Hledaná sečna bude dána body  $T[x_0; f(x_0)]$  a  $X[x; f(x)]$  a její rovnice bude

$$y - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),$$

přičemž zlomek  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  je směrnici této přímky. S tímto zlomkem jsme se však setkali výše a interpretovali ho jako přírůstek funkce vztažený na jednotkový přírůstek proměnné  $x$  v bodě  $x_0$ .

Sami cítíme, že výpočet tohoto přírůstku metodou kdy se to hodí je  $\Delta x$  rovno nule nebo různé od nuly není hodno matematika 21. století. Tento problém hýbal matematikou více než dvě století a vyústil v zavedení pojmu limita funkce. Než přistoupíme k zavedení tohoto pojmu, uvedeme definici důležitého pojmu *okolí bodu*.

**Def. 2.1** *Nechť je dán bod  $x_0$  a reálné číslo  $\delta > 0$ . Interval  $O(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  nazveme (delta) okolím bodu  $x_0$ . Interval  $[x_0; x_0 + \delta)$  resp.  $(x_0 - \delta; x_0]$  nazveme pravým (levým) okolím bodu  $x_0$ . Množinu  $O(x_0) - \{x_0\}$  nazveme ryzím (prstencovým) okolím bodu  $x_0$ . Interval  $(a; +\infty)$  resp.  $(-\infty; a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  nazveme okolím bodu  $\infty$  resp.  $-\infty$ .*

Nyní můžeme přistoupit k zavedení pojmu limity funkce v bodě  $x_0$ .

**Def. 2.2** *Řekneme, že funkce má v bodě  $x_0$  limitu rovnou  $L \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje ryzí  $\delta$  - okolí bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x$  z tohoto okolí platí*

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

*Nahradíme-li pojem ryzí  $\delta$  okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o limitě zprava (zleva). Značit budeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  či  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .*

Přečteme-li si pozorně definici limity pozorně, zjistíme, že se v ní vůbec nemluví o hodnotě  $f(x_0)$ .

Výše uvedená definice nám určuje vlastní limitu ve vlastním bodě. Co však taková funkce  $y = \frac{1}{x^2}$  v bodě  $x = 0$ ? Budeme-li počítat funkční hodnoty pro  $x \sim 0$ , pak nám budou vycházet velká čísla. To nás vede k zavedení pojmu nevlastní limita ve vlastním bodě.

**Def. 2.3** *Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  nevlastní limitu  $\infty$  ( $-\infty$ ), jestliže pro každé  $K \in \mathbb{R}$  existuje ryzí delta okolí bodu  $x_0$  takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí  $f(x) > K$  ( $f(x) < K$ ). Nahradíme-li pojem okolí pojmem pravé (levé) okolí, budeme opět hovořit o limitě zprava (zleva).*

Jelikož posloupnost je speciální příklad funkce, tak nás určitě nepřekvapí některé analogie. První z nich je následující věta.



**Věta 2.1** Funkce  $f$  má v daném bodě nejvýš jednu limitu.

Stejně tak nás nepřekvapí, že limita funkce kopíruje aritmetické operace.

**Věta 2.2** Nechť platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , přičemž platí  $A, B \in \mathbb{R}$ . Pak je

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ , je-li  $B \neq 0$ .

Samozřejmě platí i věta o sevření.

**Věta 2.3** Nechť existuje okolí bodu  $x_0$  v němž platí  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ . Pak i  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ .

Rovněž pro počítání limit typu  $\frac{1}{\infty}$  a podobně platí též pravidla jako v případě posloupností.

Pro výpočet limity nám pomůže i následující věta.

**Věta 2.4** Nechť je dána složená funkce  $y = f[g(x)]$ , a nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(u) = L$  a nechť existuje ryzí okolí bodu  $x_0$  takové, že pro všechny body  $z$  tohoto okolí platí  $g(x) \neq \alpha$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = L$ .

Vraťme se k pojmu limity. Jak už bylo řečeno, v definici se vůbec nezmiňujeme o tom, jaká je hodnota funkce v bodě  $x_0$ . V tomto bodě nemusí být funkce vůbec definována či může mít jakoukoliv hodnotu, dokonce může být funkční hodnota rovna přímo limitě. A právě tento případ nás bude eminentně zajímat, jelikož funkce s nimiž od základní školy jsou většinou tento případ. Uvedeme proto následující definici.

**Def. 2.4** Řekneme, že funkce  $f(x)$  je v bodě  $x_0$  spojitá, jestliže platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Nahradíme-li pojem limita pojmem limita zprava (zleva), mluvíme o spojitosti zprava (zleva).

Pojem spojitosti však můžeme zavést, aniž bychom přímo mluvili o limitě. Stačí totiž definici spojitosti upravit následujícím způsobem.

**Def. 2.5** Řekneme, že funkce je v bodě  $x_0$  spojitá, jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje ryzí  $\delta$  - okolí bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x$  z tohoto okolí platí

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nahradíme-li pojem ryzí  $\delta$  okolí pojmem pravé (levé) ryzí okolí, mluvíme o spojitosti zprava (zleva).

Podobně jako v případě limity spojitost kopíruje aritmetické operace.

**Věta 2.5** *Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité v bodě  $x_0$ . Pak jsou v tomto bodě spojité i funkce  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  a v případě  $g(x_0) \neq 0$  i funkce  $\frac{f}{g}$ .*

Následující věta má význam pro počítání limit složených funkcí.

**Věta 2.6** *Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \alpha$  a funkce  $f$  je spojitá v bodě  $\alpha$ . Pak platí  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$ .*

Funkce s nimiž pracujeme bývají obvykle definovány na jistém intervalu. Měli bychom se tedy zajímat, jak je to se spojitostí funkce na intervalu. začneme definicí.

**Def. 2.6** *Řekneme, že funkce  $f(x)$  je spojitá na intervalu  $I \subseteq D(f)$ , je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li levý (pravý) koncový bod do  $I$ , pak je zde spojitá zprava (zleva).*

Nyní uvedeme dvě věty, které jsou velmi důležité a pomáhají nám osvětlit pojem spojitosti. První věta je také známa jako věta Weierstrassova.

**Věta 2.7** *Nechť funkce  $f$  je spojitá na uzavřeném intervalu  $I$ . Pak je zde ohraničená a nabývá zde největší a nejmenší hodnoty.*

Druhá věta je pojmenována podle českého matematika a filozofa Bernarda Bolzana.

**Věta 2.8** *Nechť funkce  $f$  je definována na uzavřeném intervalu  $I$  a je zde spojitá. Pak zde nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledkem této věty je toto tvrzení.

**Věta 2.9** *Nechť funkce  $f$  je definována na intervalu  $[a; b]$  a nechť platí  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Pak existuje bod  $\xi \in (a; b)$  takový, že platí  $f(\xi) = 0$ .*

Budeme běžně pracovat také s funkcemi inverzními, proto se nám hodí i tato věta.

**Věta 2.10** *Nechť funkce  $f$  je ryze monotónní a spojitá na intervalu  $I \subseteq D(f)$ . Pak inverzní funkce je spojitá a ryze monotónní na intervalu  $J = f(I)$ .*

Závěrem se ještě podrobněji podíváme na body, v nichž je funkce nespojitá. Ten bod budeme označovat  $x_0$ . Rozlišujeme tři případy:

1) Existuje vlastní limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ . Tento případ nazveme *odstranitelná nespojitost*. Název je případný, neboť nespojitost lze snadno odstranit definováním nové funkce dle níže uvedeného vzoru.

$$g(x) = \begin{cases} a & x = x_0 \\ f(x) & x \in D(f) - \{x_0\} \end{cases}$$

Příkladem budiž již zmíněná funkce  $y = \frac{\sin x}{x}$ . Tato funkce není definována pro  $x = 0$ , leč  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Tuto nespojitost lze odstranit dodefinováním

$$y = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} - 0 \end{cases}$$

2. Limita funkce sice neexistuje, ale existují obě jednostranné limity, jsou vlastní a různé. Tento případ nazveme *bod nespojitosti prvního druhu*. Příkladem budiž funkce definovaná následujícím způsobem.

$$y = \begin{cases} x - 1 & x \in \mathbb{R}^- \\ 0 & x = 0 \\ x + 1 & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Limita neexistuje, jednostranné limity jsou rovny -1 resp. +1.

3. Alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní. Tento případ nazveme *bod nespojitosti druhého druhu*. Příkladem budiž funkce  $y = \frac{1}{x}$ .



# Kapitola 3

## Derivace funkce

V motivačních úlohách, ať se již jednalo o určení okamžité rychlosti, rovnici tečny a další hrál klíčovou roli podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , jestliže jmenovatel byl prakticky roven nule. Jelikož jsme se již seznámili s pojmem limity, kterémuž dobře rozumíme, je nám jasné, že můžeme opustit čachry s  $\Delta x$  a definovat pojem derivace.

**Def. 3.1** *Derivaci funkce v bodě  $x_0$  nazveme limitu*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme  $f(x)'$  resp.  $y'$ . Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Následující věta uvádí vztah mezi spojitostí a derivací.

**Věta 3.1** *Nechť funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  derivaci (derivaci zprava, derivaci zleva). Pak je zde spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva).*

Musíme si uvědomit, že tato věta je implikace, nemusí tedy platit implikace obrácená. Jednoduchým příkladem je funkce  $y = |x|$ , která má derivaci zprava rovnu 1 a derivaci zleva rovnu -1, derivaci tedy nemá.

V další větě uvedeme postup pro derivaci součtu, součinu a podílu funkcí. Zatímco u součtu či rozdílu je to stejné jako u limity, v případě součinu resp. podílu funkcí je již situace složitější.

- Věta 3.2**
1.  $(cf(x_0))' = cf'(x_0)$
  2.  $(f(x_0) \pm g(x_0))' = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
  3.  $(f(x_0) \cdot g(x_0))' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
  4.  $\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Abychom nemuseli pořád psát u  $x$  index, nadefinujeme si derivaci na intervalu a pak již přistoupíme k některým vzorcům pro derivace elementárních funkcí.

**Def. 3.2** *Řekneme, že funkce  $f(x)$  má derivaci na intervalu  $I \subseteq D(f)$ , jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Je-li interval na některé straně uzavřený, musí mít patřičnou jednostrannou derivaci.*

Nyní si uvedeme vzorce pro derivaci elementárních funkcí.

$$3.1. (c)' = 0$$

$$3.2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3.3. (\sin x)' = \cos x$$

$$3.4. (\cos x)' = -\sin x$$

$$3.5. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$3.6. (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$3.7. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$3.8. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$3.9. (e^x)' = e^x$$

$$3.10. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$3.11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3.12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3.13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$3.14. (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Bohužel, většina funkcí s nimiž budeme pracovat jsou funkce složené, musíme si tedy říci, jak se derivuje funkce složená.

**Věta 3.3** *Nechť funkce  $u = g(x)$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0$  a nechť funkce  $y = f(u)$  má vlastní derivaci v bodě  $u_0 = g(x_0)$ . Pak složená funkce  $y = F(x) = f[g(x)]$  má vlastní derivaci v bodě  $x_0$  a platí:*

$$F'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Přidáme ještě větu o derivaci funkce složené.

**Věta 3.4** *Nechť funkce  $x = f(y)$  je spojitá a ryze monotónní na intervalu  $I$ . Nechť  $y_0$  je vnitřní bod intervalu  $I$  a nechť má funkce  $f$  v bodě  $y_0$  derivaci  $f'(y_0)$ . Pak má inverzní funkce  $y = f^{-1}(x)$  v bodě  $x_0 = f(y_0)$  rovněž derivaci.*

*Je-li  $f'(y_0) \neq 0$ , je derivace inverzní funkce vlastní a platí*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

*Je-li  $f'(y_0) = 0$ , je derivace funkce inverzní nevlastní a rovna  $+\infty$  pro funkci rostoucí a  $-\infty$  pro funkci klesající.*

Derivace funkce na intervalu  $I$  je funkce, neboť každé hodnotě  $x \in I$  přísluší právě jedna hodnota  $y$ . Tuto funkci můžeme opět derivovat, je tedy namísto následující definice.

**Def. 3.3** *Druhou derivací funkce  $f$  rozumíme funkce  $f'' = (f)'$  a pro libovolné  $n \geq 2$  definujeme  $n$ -tou derivaci (derivaci  $n$ -tého řádu) funkce  $f$  vztahem  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .*

# Kapitola 4

## Aplikace derivace

Důležitou úlohou nejen v matematice je nalezení tečny a normály ke grafu funkce v jistém bodě. Na základě toho, co jsme dosud probrali o derivaci a vzpomínek na analytickou geometrii můžeme formulovat následující větu.

**Věta 4.1** *Rovnice tečny ke grafu funkce  $y = f(x)$  v bodě  $T[x_0; y_0]$  má tvar*

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

*Rovnice normály má tvar*

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$f'(x)$

Nyní se vrátíme k výpočtu limity neurčitých výrazů. Máme k dispozici poměrně účinný prostředek známý jako L'Hospitalovo (nemocniční) pravidlo.

**Věta 4.2** *Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  a je splněna jedna ze dvou následujících podmínek*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

*nebo*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty.$$

*Existuje-li  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , pak existuje i  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

V následující části se budeme věnovat průběhu funkce, čímž se miní nalezení důležitých údajů o funkci (definiční obor, obor hodnot, monotonie, extrémy, inflexní body, asymptoty). Z toho, co již víme o derivaci, můžeme formulovat následující větu.

**Věta 4.3** *Nechť funkce  $f$  má na otevřeném intervalu  $I$  vlastní derivaci. Pak platí:*

*4.1. Funkce  $f$  je neklesající na  $I$  právě tehdy, když  $f'(x) \geq 0$  na  $I$ .*

4.2. Funkce  $f$  je rostoucí na  $I$  právě tehdy, když  $f'(x) \geq 0$  na  $I$ , přičemž rovnost  $f'(x) = 0$  neplatí na žádném podintervalu intervalu  $I$ .

Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.

Platnost této věty lze rozšířit na interval  $I$  libovolného typu. Stačí předpokládat, že  $f$  je spojitá na  $I$  a  $f'$  existuje uvnitř  $I$ . Věta platí i v případě, když  $f$  má někde nevlastní derivaci, pokud se předpokládá, že funkce  $f$  je spojitá. Z této věty snadno odvodíme postačující podmínku pro monotónii funkce.

**Věta 4.4** *Nechť  $f$  má konečnou derivaci na otevřeném intervalu  $I$ . Je-li  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) pro každé  $x \in I$ , pak je  $f$  rostoucí (klesající) na  $I$ .*

Definujme lokální extrém.

**Def. 4.1** *Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$ :*

- *lokální maximum, existuje-li okolí  $O(x_0)$  tak, pro každé  $x \in O(x_0)$  je  $f(x) \leq f(x_0)$ ,*
- *lokální minimum, existuje-li okolí  $O(x_0)$  tak, pro každé  $x \in O(x_0)$  je  $f(x) \geq f(x_0)$ ,*
- *ostré lokální maximum, existuje-li ryzí okolí  $O(x_0)$  tak, pro každé  $x \in O(x_0)$  je  $f(x) < f(x_0)$ ,*
- *ostré lokální minimum, existuje-li ryzí okolí  $O(x_0)$  tak, pro každé  $x \in O(x_0)$  je  $f(x) > f(x_0)$ .*

Tvrzení předchozí věty nám dává návod, jak nalézt lokální extrémy.

**Věta 4.5** *Nechť je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$  a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí  $O(x_0)$ . Je-li pro všechna  $x < x_0$  z tohoto okolí  $f'(x) > 0$  a pro všechna  $x > x_0$  z tohoto okolí  $f'(x) < 0$ , pak má v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum. Obdobné tvrzení platí i pro ostré lokální minimum, zobáčky jsou obrácené.*

Máme ještě jeden prostředek na nalezení lokálních extrémů.

**Věta 4.6** *Nechť  $f'(x_0) = 0$ . Je-li  $f''(x_0) < 0$ , má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum. Je-li  $f''(x_0) > 0$  má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.*

Shrneme-li tyto dvě věty, máme souvislost mezi derivací a lokálními extrémy.

**Věta 4.7** *Nechť má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální extrém a nechť je v tomto bodě vlastní derivace. Pak je  $f'(x_0) = 0$ .*

Tuto větu jsem uvedl jen pro první a druhou derivaci, mohl jsem ji ovšem formulovat obecněji zhruba tímto způsobem. Je-li lichá derivace rovna nule a následující sudá je kladná (záporná), má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum (maximum). Praktického smyslu to však moc nemá, snad jen u jednodušších funkcí má smysl počítat dervace vyšších řádů.

Zatím jsme zdůrazňovali, že se jedná o extrémy lokální, tedy že se jedná o záležitost bodu  $x_0$  a jeho blízkého okolí. Můžeme se také ptát, zda má funkce na nějaké množině největší či nejmenší hodnotu. Odpověď nalezneme v následující definici.



**Def. 4.2** *Nechť funkce  $f$  je definována na množině  $M$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  absolutní (globální) maximum, jestliže pro všechna  $x \in M$  platí  $f(x) \leq f(x_0)$ . Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  absolutní (globální) minimum, jestliže pro všechna  $x \in M$  platí  $f(x) \geq f(x_0)$ .*

Vykreslíme-li si graf nějaké funkce, pak většinou dojdeme k ladným křivkám. Definujeme

**Def. 4.3** *Řekneme, že funkce  $f$  je konvexní na intervalu  $I$ , jestliže pro libovolné tři body  $x_1, x_2, x_3 \in I$  takové, že  $x_1 < x_2 < x_3$  platí*

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

*Řekneme, že funkce  $f$  je konkávní na intervalu  $I$ , jestliže pro libovolné tři body  $x_1, x_2, x_3 \in I$  takové, že  $x_1 < x_2 < x_3$  platí*

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

*pokud nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostaneme definici pojmů ostré konvexnosti (konkávnosti) na intervalu  $I$ .*

Zkusme si tuto krkolomnou definici rozklíčovat jak se teď říká hezky česky. Spojme body  $x_1$  a  $x_3$  přímkou. Ta bude mít rovnici

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Znamená to, že všechny body funkce jsou pod touto přímkou, graf funkce je vypouklý směrem dolů všude tam, kde je vypouklý.

Zajímat nás musí jak zjistíme tuto vlastnost grafu. Odpověď nám dá následující věta.

**Věta 4.8** *Nechť funkce  $f$  má vlastní derivaci na otevřeném intervalu  $I$ . Funkce  $f$  je konvexní (ostře konvexní) na  $I$  právě tehdy když je funkce  $f'$  neklesající (rostoucí) na  $I$ . Funkce  $f$  je konkávní (ostře konkávní) na  $I$  právě tehdy když je funkce  $f'$  nerostoucí (klesající) na  $I$ .*

Uvědomíme-li si jak zkoumáme monotónii, tak můžeme formulovat tuto větu.

**Věta 4.9** *Nechť  $I$  je otevřený interval a funkce  $f$  má na  $I$  vlastní derivaci. Je-li  $f''(x) > 0$  pro každé  $x \in I$ , pak je funkce na  $I$  ostře konvexní. Je-li  $f''(x) < 0$  pro každé  $x \in I$ , pak je funkce na  $I$  ostře konkávní.*

Uvedeme ještě jednu větu, která nám tyto pojmy více objasní.

**Věta 4.10** *Nechť funkce  $f$  má vlastní derivaci na intervalu  $I$ . Pak je  $f$  konvexní (konkávní) na  $I$  právě tehdy, když pro každé dva různé body  $x, x_0 \in I$  platí:*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nahradíme-li ve výše uvedených rovnicích  $f(x)$  písmenem  $y$  a nerovnosti rovností, obdržíme rovnici tečny. Graf funkce konvexní je tedy nad tečnou, u funkce konkávní pak pod tečnou.

Tyto vlastnosti se mohou na nějakém intervalu střídát, ten bod, v němž tato změna nastane se nazývá bodem inflexním. Definujme si ho přesněji.

**Def. 4.4** *Nechť  $f$  má derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Je-li tato derivace nevlastní, musí zde být navíc spojitá. řekneme, že  $x_0$  je inflexním bodem funkce  $f$ , existuje-li  $\delta$ -okolí bodu  $x_0$  takové, že je funkce na intervalu  $(x_0 - \delta; x_0)$  ryze konvexní a na intervalu  $(x_0; x_0 + \delta)$  ryze konkávní nebo naopak.*

Abychom mohli nakreslit graf funkce, musíme se ještě seznámit s pojmem asymptota (tečna v nekonečnu).

**Def. 4.5** *Bud'  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Přímka  $x = x_0$  se nazývá asymptotou bez směrnice funkce  $f$ , jestliže má funkce v bodě  $x_0$  alespoň jednu limitu nevlastní. Přímka  $y = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  se nazývá asymptotou se směrnicí funkce  $f$ , jestliže platí nebo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  nebo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .*

Problém, jak vypočítat koeficienty  $a$ ,  $b$  řeší následující věta.

**Věta 4.11** *Přímka  $y = ax + b$  je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce  $f(x)$ , je-li  $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  a  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ . Analogickou větu můžeme zformulovat pro  $x \rightarrow -\infty$ .*

Nyní si ukážeme, jak asymptoty počítat.

**Příklad 4.1** Najděte asymptoty ke grafu funkce  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ . Tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, nemá tedy asymptoty bez směrnice. Podívejme se tedy, zda bude mít asymptoty se směrnicí. Nejdříve budeme hledat směrnici.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0.$$

Úsek na ose  $y$  určíme podle vzorce

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} - 0 \cdot x \right) = 1.$$

Ke stejnému výsledku bychom došli i pro  $x \rightarrow -\infty$ , přímka  $y = 1$  je tudíž asymptotou se směrnicí.

Jiná situace nastane v následujícím příkladu.

**Příklad 4.2** Určete asymptoty ke grafu funkce  $y = xe^x$ . I tato funkce je definována pro všechna reálná čísla, proto nemá asymptoty bez směrnice. S asymptotami se směrnicí je to ale jiné. Je totiž rozdíl, počítáme-li limitu pro plus či minus nekonečno. Zatímco  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x}{x} = \infty$ , je  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = 0$ . Dopočítáme ještě  $q = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$ . Použitím L'Hopitalova pravidla snadno zjistíme, že se rovná nule a přímka  $y = 0$  je asymptotou se směrnicí pro  $x \rightarrow \infty$ .

Závěrem této kapitoly si řekneme věty o střední hodnotě. První z nich je věta Rolleova.

**Věta 4.12** *Nechť funkce  $f$  je definována na intervalu  $[a; b]$ . Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní) a nechť platí  $f(a) = f(b)$ . Pak existuje  $c \in (a; b)$  takové, že je  $f'(c) = 0$ .*

Zobecněním této věty je věta Lagrangeova.

**Věta 4.13** *Nechť funkce  $f$  je definována na intervalu  $[a; b]$ . Nechť má tato funkce derivaci (může být i nevlastní). Pak existuje  $c \in (a; b)$  takové, že platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Se svou troškou do mlýna přišel i pan Cauchy.

**Věta 4.14** *Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou definovány na intervalu  $[a; b]$  a nechť v každém bodě  $x \in (a; b)$  existují vlastní derivace  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ . Pak existuje  $c \in (a; b)$  tak, že platí*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$



# Kapitola 5

## Přibližné vyjádření funkce

Na závěr si něco řekneme o přibližném vyjádření funkce. Problém spočívá v tom, že někdy je přesné vyjádření funkce dosti složité, přičemž v praxi bychom vystačili i s méně přesným, zato jednodušším vyjádřením funkce v okolí nějakého bodu. Budeme preferovat vyjádření pomocí polynomu, neboť tato funkce se mimo jiné snadno derivuje i integruje.

**Def. 5.1** *Nechť funkce  $f$  je definována v okolí  $O(x_0)$  bodu  $x_0$  a platí  $x_0 + h \in O(x_0)$ . Pak číslo  $h$  nazýváme přírůstkem nezávisle proměnné a rozdíl  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$  nazýváme přírůstkem funkce  $f$  v bodě  $x_0$  s krokem  $h$  nebo též přírůstkem závisle proměnné.*

Pokusíme se nyní vyjádřit přírůstek funkce v závislosti na čísle  $h$ . Jednu z možností udává následující definice.

**Def. 5.2** *Řekneme, že funkce  $f$  je diferencovatelná v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , jestliže existuje okolí bodu  $x_0$  takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \tau(h),$$

kde  $A$  je vhodné číslo a  $\tau(h)$  je funkce, pro niž platí  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$ .

*Je-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  diferencovatelná, nazývá se výraz  $A \cdot h$  diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a značí se  $df(x_0)(h)$  či stručněji  $df(x_0)$ .*

Nyní se pokusíme zjistit význam konstanty  $A$ . Pracujeme s funkcemi spojitými, které mohou mít v bodě  $x_0$  derivaci. Pokud tomu tak je, pak máme vyhráno, neboť byla dokázána následující věta.

**Věta 5.1** *Funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  diferenciál právě tehdy, když existuje vlastní derivace  $f'(x_0)$ . Konstanta  $A$  z předchozí definice je dána vztahem  $A = f'(x_0)$ , je tedy*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Píšeme též  $df(x_0) = f'(x_0)dx$ .

Může se stát, že přibližné vyjádření funkce diferencíálem není dostatečně přesné. V tomto případě můžeme hledat vyjádření polynomem stupně  $n$  ve tvaru  $P_n(x) = a_0 + A_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ . Je rozumné požadovat, aby platilo

$$\begin{aligned} f(x_0) &= P_n(x) = a_0 \\ f'(x_0) &= P'_n(x) = a_1 \\ f''(x_0) &= P''_n(x) = 2a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= P_n^{(n)}(x) = n!a_n \end{aligned}$$

Hledaný polynom má tvar

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(x)$$

Polynom  $T_n(x)$  se nazývá Taylorův polynom se středem  $x_0$ . Pan Taylor, po němž je pojmenována následující věta, dokázal, že funkci  $f(x)$  lze nahradit polynomem.

**Věta 5.2** *Nechť funkce  $f$  má v okolí bodu  $x_0$  vlastní derivace až do řádu  $n + 1$  pro některá  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pak pro všechna  $x$  z tohoto okolí platí:*

$$f(x) = T_n(x_0) + R_n(x).$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kde  $\xi$  je vhodné číslo mezi  $x$  a  $x_0$  je zbytek (chyba). Je-li  $x_0 = 0$ , pak se polynom nazývá Maclaurinův.

# Kapitola 6

## Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme věnovat funkcím více proměnných. Kdo se dobře učil v minulém semestru, bude mít úlohu značně usnadněnou, neboť řada věcí je stejných či alespoň hodně podobných. Některé věci jsou však znčně odlišné, tak si na to dávejte pozor čili bacha. Budu se snažit na to upozorňovat. Na druhé straně vám to zjednoduším tím, že se budeme skoro výhradně bavit o funkci dvou proměnných.

### 6.1 Limita a spojitost

**Def. 6.1** *Reálná funkce dvou reálných proměnných je zobrazení  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Jinými slovy každé uspořádané dvojici  $[x; y] \in M$  je přiřazeno právě jedno  $z \in \mathbb{R}$ . Množina  $M$  se nazývá definiční obor, množina všech  $z$ , které jsou přiřazeny k nějaké uspořádané dvojici  $[x; y]$  se nazývá obor hodnot funkce. Píšeme  $z = f(x, y)$ . Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit stručně o funkci dvou proměnných.*

**Příklad 6.1** *Určete definiční obor funkce  $z = \arcsin y + \ln(4 - x^2 - y^2)$ . Budeme vycházet ze znalosti funkcí jedné proměnné a vzpomeneme si na definiční obory funkcí arkussinus a přirozený logaritmus. Obě mají jistá omezení, která musí platit současně, je tedy*

$$-1 \leq y \leq 1 \cap 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

*Zatímco první podmínce vyhoví pás mezi přímkami  $y = -1$  a  $y = 1$ , druhé podmínce vyhoví všechny body uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem  $r = 2$ , v prvním případě včetně hranice. Definiční obor je samozřejmě průnik obou oblastí, leč obrázek zatím neumím.*

**Def. 6.2** *Grafem funkce dvou proměnných nazýváme množinu uspořádaných trojic  $[x, y, z]$ , kde body  $[x, y]$  patří do definičního oboru funkce. Jinými slovy je to plocha o rovnici  $z = f(x, y)$ . Vrstevnice je křivka o rovnici  $f(x, y) = c$ .*

Takovým nejběžnějším příkladem grafu funkce dvou proměnných je obyčejná plastická mapa. Proměnné představují zeměpisná šířka a délka, funkční hodnotu pak nadmořská výška. Patří sem i ona původně normální mapa, která se nacházela v kanceláři 91. pěšího pluku a kterou učinil plastickou až kocour chovaný písaři. Jen připomínám, že prvním, kdo se o této změně dotykem přesvědčil byl oberst Schröder a že to mělo pro písaře nepříjemné následky. Pojem vrstevnice je převzat z

geografie a má stejný význam—zlepšit představu o grafu funkce v dvourozměrném modelu.

Uvedeme několik příkladů.

- 6.1. Z analytické geometrie víte, že grafem funkce  $z = ax + by + c$  je rovina v  $\mathbb{R}_3$ .
- 6.2. Grafem funkce  $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem  $r = 3$  nad podstavovou rovinou os  $x$  a  $y$ .
- 6.3. Grafem funkce  $z = x^2 + y^2$  je rotační paraboloid s vrcholem v počátku, jehož osou je osa  $z$ . Vrstevnice tvoří soustředné kružnice o rovnicích  $x^2 + y^2 = c$ .

Nyní přistoupíme k definici pojmů limita a spojitost. Začneme definicí okolí.

**Def. 6.3** *Vzdálenost dvou bodů  $A[x_1; y_1]$  a  $B[x_2; y_2]$  rozumíme číslo*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

*Vzdálenost bodů ve vícerozměrném prostoru si jistě odvodíte sami.*

**Def. 6.4**  *$\delta$ -okolím bodu  $P$  nazýváme množinu všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu  $P$  je menší než  $\delta$ . Vyjmeme-li z této množiny samotný bod  $P$ , mluvíme o ryzím okolí.*

**Def. 6.5** *Řekneme, že funkce  $z = f(x, y)$  má v bodě  $M[x_0; y_0]$  limitu rovnou číslu  $L$ , jestliže ke každému  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechny body z ryzího  $\delta$  okolí bodu  $M$  platí*

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

*Píšeme  $\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = L$ .*

Definice pojmu limity je po formální stránce stejná, její výpočet je však někdy notně komplikovaný, kolikrát spíše dokazujeme, že daná funkce limitu nemá. Uvidíte záhy. Teď na uklidnění uvedeme větu pro výpočet limity vzhledem k aritmetickým operacím. Tato věta je shodná s tou, kterou znáte pro funkci jedné proměnné.

**Věta 6.1** *Nechť  $\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = A$  a  $\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} g(x, y) = B$ . Pak platí:*

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} (f(x, y) \pm g(x, y)) = A \pm B$$

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = A \cdot B$$

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

Pro funkce dvou proměnných je definován pojem spojitost analogicky jako u funkce jedné proměnné.



**Def. 6.6** Řekneme, že funkce je v bodě  $M[x_0; y_0]$  spojitá, je-li  $f(x_0; y_0) = \lim_{[x;y] \rightarrow [x_0; y_0]} f(x, y)$ .

Řekneme, že funkce je spojitá v oblasti  $O$ , jestliže je spojitá v každém bodě této oblasti.

**Poznámka 6.1** Pojem spojitosti v bodě lze samozřejmě definovat i bez pojmu limity, a to tak, že definici limity opíšeme a číslo  $L$  nahradíme  $f(x_0; y_0)$ .

**Poznámka 6.2** Jestliže jsme zkoumali spojitost funkce na uzavřeném intervalu, tak jsme v krajních bodech tohoto intervalu definovali spojitost zleva (zprava). U funkce dvou proměnných toto postrádá smysl, přesto můžeme uvažovat i o pojmu spojitost na uzavřené oblasti. Pro hraniční body budeme prostě ignorovat ty body z jeho okolí, které nespadají do dané oblasti.

Nyní si ukážeme několik příkladů na výpočet limity. Zatímco u funkce jedné proměnné je situace podobná ražbě tunelu z obou stran, kdy se buď' treťíme přesně nebo máme dva tunely, zde musíme vyzkoušet všechny možné cesty, a že jich je.

**Příklad 6.2** Určete limitu  $\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{x+y}{x-y}$ . Tato funkce v bodě  $[0;0]$  není definována, pokusíme se tedy spočítat limity pro různé cesty. Začneme přímkami  $y = kx$ .

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+k}{1-k}$$

Limity pro různé směry jsou různé, limita neexistuje. Tato situace paradoxně nastane, pokud bychom se přibližovali po parabolách  $y = kx^2$ .

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+kx}{1-kx} = 1$$

**Příklad 6.3** Zjistěte, zda existuje  $\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y}$ . Zkusme se nejdřív přibližovat po přímkách  $y = kx$ .

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{2xy}{xy+2x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{kx^2+2x-kx} = 0,$$

ovšem s výjimkou  $k = 2$ , to je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x+2-2} = 2$$

Tato limita tedy neexistuje.

K bodu  $P_0[x_0; y_0]$  se z bodu  $P[x; y]$  můžeme rovněž přibližovat po dvou kolmých přímkách  $x = p$  a  $y = q$ , kde  $p$  a  $q$  jsou konstanty, a to dvojím způsobem. Pak lze limitu funkce vypočítat postupným limitním přechodem funkce jedné proměnné, jak uvádí následující věta.

**Věta 6.2** Označme

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] = L_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = L_2.$$

Existuje-li limita

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = L,$$

pak platí  $L = L_1 = L_2$ .

Uvědomte si, že tato věta je implikací a představuje pouze podmínku nutnou, což značí, že bude sloužit k důkazu neexistence limity.

**Příklad 6.4** Rozhodněte, zda existuje limita

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{x - 2y}{3x + y}$$

Uřídíme postupné limity.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2y}{3x + y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y}{y} = -2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - 2y}{3x + y} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Tato limita neexistuje.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné platí následující věta.

**Věta 6.3** Nechť pro všechny body  $x \in O$  s výjimkou bodu  $M[x_0; y_0]$  platí  $f(x, y) = g(x, y)$  a nechť je  $\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} f(x, y) = L$ . Pak je i  $\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} g(x, y) = L$ .

**Příklad 6.5**

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [1;1]} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} = \lim_{[x;y] \rightarrow [1;1]} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}$$

Tato funkce je v okolí bodu  $[1; 1]$  shodná s funkcí

$$z = \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)}$$

Její limita je v tomto bodě rovna funkční hodnotě, tedy je

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [1;1]} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} = \lim_{[x;y] \rightarrow [1;1]} \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)} = \frac{3}{4}$$

Při výpočtu limity můžeme použít i některé triky známé z funkce jedné proměnné, jeden příklad následuje.

**Příklad 6.6**

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$$

Vynásobíme-li funkci jedničkou ve tvaru

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2}$$

a upravíme-li, počítáme limitu

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [0;0]} 3(\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2) = 12$$

Závěrem této části vám uvedu tři limity, které vám určitě něco připomenou.

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} \frac{\sin f(x, y)}{f(x, y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} \frac{\operatorname{tg} f(x, y)}{f(x, y)} = 1$$

$$\lim_{[x;y] \rightarrow [x_0;y_0]} \left(1 + \frac{1}{f(x, y)}\right)^{f(x, y)} = e$$

**6.2 Parciální derivace**

Už problémy s limitou nám naznačují, že to s derivacemi vůbec nebude snadné. Pokud bychom chtěli udělat nějakou analogii s funkcí jedné proměnné, bylo by to značně obtížné. Proto půjdeme jinou cestou. Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Pokud však plochu řízeme nějakou rovinou, tak řezem je křivka, křivku umíme popsat funkcí jedné proměnné—čajník je v kredenci. My budeme řezat rovinami kolmými k osám  $x$  a  $y$ .

**Def. 6.7** *Nechť existuje limita*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

*Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle  $x$  v bodě  $[x_0; y_0]$ , značíme  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  či  $f'_x(x_0, y_0)$ . Analogicky definujeme parciální derivaci podle  $y$ . Nechť existuje limita*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

*Pak tuto limitu nazveme parciální derivací podle  $y$  v bodě  $[x_0; y_0]$ , značíme  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  či  $f'_y(x_0, y_0)$ . Má-li funkce parciální derivaci podle nějaké proměnné v každém bodě nějaké oblasti  $M$ , potom říkáme, že zde má parciální derivaci. Jinými slovy vznikne na této oblasti nová funkce, to je stejné jako u funkce jedné proměnné.*

Protože jsme parciální derivace definovali jako derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně všechna pravidla tak jak je znáte z kurzu MA1, nebudu je tedy uvádět. Stejně tak nebudu řešit derivace vyšších řádů, tam ovšem jeden problém přece jen vyvstane. Záleží na pořadí proměnných podle kterých derivujeme nebo nezáleží, to je oč tu běží. Odpověď nám dává Schwarzova věta.

**Věta 6.4** *Nechť jsou derivace  $f''_{xy}(x, y)$  a  $f''_{yx}(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$  spojité. Pak jsou si rovny.*

Obdobnou větu bychom mohli zformulovat i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů. Jak vidíme, u spojitých funkcí je to s parciálními derivacemi jako s mušketýry, je jich o jednu víc než je jejich řád. Stejně jako tři mušketýři byli čtyři, tak i třetí parciální derivace jsou čtyři:  $f'''_{xxx}$ ,  $f'''_{xxy}$ ,  $f'''_{xyy}$  a  $f'''_{yyy}$ . Tak je tomu u parciálních derivací jakéhokoliv řádu.

**Příklad 6.7** *Je-li  $z = u(x) + v(y)$ , je  $z'_x = u'(x)$ ,  $z'_y = v'(y)$ ,  $z''_{xx} = u''(x)$ ,  $z''_{yy} = v''(y)$  a  $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$ . Tak je-li  $z = 3x^2 - 5y^3 + 1$ , máme  $z'_x = 6x$  a  $z'_y = -15y^2$ . Pro druhé derivace vychází  $z''_{xx} = 6$ ,  $z''_{yy} = -30y$  a  $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$ .*

**Příklad 6.8** *Je-li  $z = u(x)v(y)$ , je  $z'_x = u'(x)v(y)$ ,  $z'_y = u(x)v'(y)$ ,  $z''_{xx} = u''(x)v(y)$ ,  $z''_{yy} = u(x)v''(y)$  a  $z''_{xy} = z''_{yx} = u'(x)v'(y)$ . Tak je-li  $z = 5x^2y^4$ , máme  $z'_x = 10xy^4$  a  $z'_y = 20x^2y^3$ . Pro druhé derivace vychází  $z''_{xx} = 10y^4$ ,  $z''_{yy} = 60x^2y^2$  a  $z''_{xy} = z''_{yx} = 40xy^3$ .*

**Příklad 6.9** *Je-li  $z = \frac{u(x)}{v(y)}$ , je  $z'_x = \frac{u'(x)}{v(y)}$ ,  $z'_y = -\frac{u(x)v'(y)}{v^2(y)}$ ,  $z''_{xx} = \frac{u''(x)}{v(y)}$ ,  $z''_{yy} = z''_{yx} = -\frac{u'(x)v'(y)}{v^2(y)}$  a  $z''_{xy} = -u(x)\frac{v''(y)v(y)-2(v'(y))^2}{v^3(x)}$ . Konkrétní příklad dáme tento:  $z = \frac{x}{y^2}$ . Potom je  $z'_x = \frac{1}{y^2}$ ,  $z'_y = \frac{-2x}{y^3}$ ,  $z''_{xx} = 0$ ,  $z''_{yy} = \frac{6x}{y^4}$  a  $z''_{xy} = \frac{-2}{y^3}$ .*

Pokud nejsou proměnné separovány, postupujeme standardně.

**Příklad 6.10** *Určete první a druhé derivace funkce  $z = \sin(x^2 + y^2)$ . Máme  $z'_x = 2x \cos(x^2 + y^2)$ ,  $z'_y = 2y \cos(x^2 + y^2)$ . Derivujeme jako součin a máme  $z''_{xx} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)$  a  $z''_{yy} = 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$ . Při smíšené vyjdeme z  $y'_x$  a derivujeme podle  $y$ ,  $x$  je konstanta. Obdržíme  $z''_{xy} = -4xy \sin(x^2 + y^2)$ .*

Závěrem uvedeme ještě větu o derivaci složené funkce.

**Věta 6.5** *Nechť funkce  $u = f(x, y)$ ,  $v = g(x, y)$  jsou v bodě  $[x_0; y_0]$  diferencovatelné. Nechť funkce  $z = h(u, v)$  je diferencovatelná v odpovídajícím bodě  $[u_0 = f(x_0, y_0); v_0 = g(x_0, y_0)]$ . Pak také složená funkce  $z = h(f(x, y), g(x, y))$  je diferencovatelná v bodě  $[x_0; y_0]$  a platí*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**Poznámka 6.3** *Analogickou větu můžeme odvodit pro libovolný počet proměnných.*

**Poznámka 6.4** *Pojem diferencovatelnosti bude vysvětlen vzápětí, stačí však, aby v daném bodě měla funkce spojité parciální derivace.*

## 6.3 Totální diferenciál

Podobně jako u funkce jedné proměnné zavedeme pojem diferenciál. Samozřejmě, že můžeme pro parciální derivace definovat parciální diferenciály naprosto stejným způsobem jako u funkce jedné proměnné. Jenže probíráme funkci dvou proměnných, takže není dobré, aby si jednotlivé proměnné hrály na svém písečku. Chápu, že slovo totální nemá dnes nejlepší pověst, leč matematika je na politické situaci nezávislá. Kdo by s tím měl problém, nechť si místo slova totální myslí ekvivalentní výrazy (úplný, celkový).

**Def. 6.8** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  je v bodě  $M[x_0; y_0]$  diferencovatelná (má zde totální diferenciál), je-li

$$\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varrho\tau(h, k),$$

kde  $A, B$  jsou konstanty,  $\varrho = \sqrt{h^2 + k^2}$  a  $\lim_{[h;k] \rightarrow [0;0]} \tau(h, k) = 0$ .

Na otázku kdy to nastane nám dá odpověď následující věta.

**Věta 6.6** Je-li  $f(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$  diferencovatelná, má v tomto bodě parciální derivace prvního řádu a platí

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0).$$

**Poznámka 6.5** Dále budeme používat běžné označení  $h = dx$ ,  $k = dy$ .

**Def. 6.9** Je-li funkce  $f(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$  diferencovatelná, pak výraz

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)dy$$

nazýváme totální diferenciál funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$

**Věta 6.7** Nechť  $f(x, y)$  je v bodě  $M[x_0; y_0]$  diferencovatelná, pak je zde spojitá.

**Věta 6.8** Jsou-li první parciální derivace funkce  $f(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$  spojitě, pak je zde diferencovatelná.

Hlavní význam diferenciálu funkce jedné proměnné spočíval v tom, že jsme mohli (skutečný) přírůstek funkce v bodě nahradit s jistou chybou diferenciálem, čili graf funkce nahradit v okolí tohoto bodu tečnou. Obdobně lze postupovat i u funkce dvou proměnných, jen tečnu nahradíme tečnou rovinou. Jak stanovit její rovnici nám ukáže další věta.

**Věta 6.9** Je-li  $f(x, y)$  v bodě  $M[x_0; y_0]$  diferencovatelná, má plocha  $z = f(x, y)$  v bodě  $M_p[x_0; y_0; z_0]$  tečnou rovinu, jejíž rovnice má tvar

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0)$$

Menší zádrhel spočívá v tom, že tak jako neumíme (neurčitě) integrovat libovolnou funkci, ne každý výraz tvaru  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  je diferenciálem nějaké funkce. Kdy tomu tak je nám odpoví následující věta.

**Věta 6.10** *Nechť funkce  $P(x, y)$  a  $Q(x, y)$  jsou spojité v oblasti  $O$  a stejně tak jsou zde spojité i jejich parciální derivace. Pak výraz  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  je totálním diferenciálem jisté funkce  $f(x, y)$  právě tehdy, když platí*

$$P'_y(x, y) = Q'_x(x, y).$$

Užití diferenciálu si ukážeme na příkladu.

**Příklad 6.11** *Válec má poloměr 2 dm a výšku 10 dm. Jak se změní jeho objem, jestliže se při deformaci poloměr zvětší na 2,05 dm a výška naopak zmenší na 9,8 dm? Objem válce je  $V = \pi r^2 v$ , což lze chápat jako funkce dvou proměnných  $r$  a  $v$ . Totální diferenciál má tvar*

$$dV = 2\pi r v dr + \pi r^2 dv$$

Zde je  $dr = +0,05$  a  $dv = -0,2$ . Po dosazení do diferenciálu máme  $dV = 1,2\pi \doteq 3,77 \text{ dm}^3$ .

**Příklad 6.12** *Ověřte, zda výraz  $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$  je totálním diferenciálem této funkce. V případě že ano, nalezněte tuto funkci. Ověření nebude těžké, neboť  $P'_y = -2xy = Q'_x$ . Na nalezení funkce, jejíž totální diferenciál jsme právě objevili, vám poradím jednu inženýrskou fintu. Zintegrujeme obě části dle příslušné proměnné, přičemž tu druhou budeme považovat za konstantu.*

$$\int (2x^3 - xy^2)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

$$\int (2y^3 - x^2y)dy = \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + c$$

Do hledané funkce  $z = f(x, y)$  vezmeme první integrál celý, z druhého pak vezmeme pouze ty sčítance, které se v prvním nevyskytují. Je tedy

$$z = \frac{1}{2}(x^4 - x^2y^2 + y^4) + c$$

Totální diferenciál je velmi důležitý pojem ve fyzice. Je-li výraz  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  totální diferenciál, pak ho lze integrovat, přičemž hodnota tohoto integrálu nezávisí na integrační cestě z bodu  $A$  do bodu  $B$ , nýbrž pouze na hodnotách funkce  $z = f(x, y)$  v těchto bodech (je to jakoby klasický Newtonův integrál). Funkce  $z$  pak reprezentuje veličinu stavovou.

Podobně jako u funkce jedné proměnné můžeme definovat totální diferenciál řádu  $n$ .

**Def. 6.10** *Totální diferenciál řádu  $n$  funkce dvou proměnných je výraz*

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Jak postupovat si ukážeme na příkladě.

**Příklad 6.13** Určete totální diferenciály druhého a třetího řádu funkce  $z = y \ln x$ . Nejdříve si určíme všechny parciální derivace až do řádu 3.  $z'_x = \frac{y}{x}$ ,  $z'_y = \ln x$ ,  $z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$ ,  $z''_{xy} = \frac{1}{x}$ ,  $z''_{yy} = 0$ ,  $z'''_{xxx} = \frac{2y}{x^3}$ ,  $z'''_{xxy} = -\frac{1}{x^2}$ ,  $z'''_{xyy} = z'''_{yyy} = 0$ . Totální diferenciál druhého řádu je

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2 = -\frac{y}{x^2}(dx)^2 + \frac{2}{x}dxdy(dy)^2$$

Totální diferenciál třetího řádu je pak

$$d^3z = z'''_{xxx}(dx)^3 + 3z'''_{xxy}(dx)^2dy + 3z'''_{xyy}dx(dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3 = \frac{2y}{x^3}(dx)^3 - \frac{3}{x^2}(dx)^2dy$$

### 6.3.1 Extrémy funkce dvou proměnných

**Def. 6.11** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $M[x_0; y_0]$  lokální maximum (minimum), existuje-li okolí  $O$  bodu  $M$  takové, že pro všechna  $x \in O$  platí  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  ( $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ ). V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrém lokálním maximum (minimu).

Postup při stanovení extrémů je obdobný jako u funkce jedné proměnné.

**Věta 6.11** Nechť funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $M[x_0; y_0]$  lokální extrém a nechť existují v bodě  $M$  parciální derivace prvního řádu. Pak je  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

**Poznámka 6.6** Tak jako u funkce jedné proměnné budeme bod  $M$  nazývat bodem stacionárním.

Stacionární (podezřelé z extrému) body budeme vyšetřovat pomocí následující věty.

**Věta 6.12** Nechť  $M$  je stacionární bod a nechť v jeho okolí existují spojité parciální derivace prvního a druhého řádu. Vypočtíme výraz

$$D = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

Je-li  $D > 0$ , pak pro  $f''_{xx} > 0$  je v bodě  $M$  lokální minimum a pro  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  je v bodě  $M$  lokální maximum. Je-li  $D < 0$ , pak v bodě  $M$  extrém není, je-li  $D = 0$ , nemůžeme o extrému rozhodnout (extrém tady být může, ale nemusí).

**Poznámka 6.7** Označení  $D$  jsme nezvolili náhodou,  $D$  je de facto determinant druhého řádu, přičemž v hlavní diagonále jsou derivace podle  $xx$  a  $yy$  a ve vedlejší diagonále jsou derivace smíšené (ty jsou si samozřejmě rovny).

Nyní ukážeme několik příkladů.

**Příklad 6.14** Nalezněte lokální extrémy funkce  $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$ . Nejprve spočítáme parciální derivace prvního řádu.

$$f'_x = 3x^2 + y^2 + 12x, \quad f'_y = 2xy + 2y$$

. Položíme-li tyto derivace rovny nule, získáme čtyři stacionární body  $S_1[-1; 3]$ ,  $S_2[-1; -3]$ ,  $S_3[0; 0]$  a  $S_4[-4; 0]$ . Spočteme tedy parciální derivace druhého řádu

$$f''_{xx} = 6x + 12, \quad f''_{xy} = 2y, \quad f''_{yy} = 2x + 2.$$

Budeme postupně dosazovat jednotlivé stacionární body a počítat číslo  $D$ . V prvních dvou případech je  $D(S_1) = -36$ ,  $D(S_2) = -36$ , extrém nenastává.  $D(S_3) = 24$  a protože je  $f''_{xx}(0, 0) = 12$ , je v počátku minimum. Naproti tomu je  $D(S_4) = 72$ , ale tentokrát je  $f''_{xx}(-4, 0) = -12$ , v bodě  $S_4$  je tedy maximum.

**Příklad 6.15** Určete lokální extrémy funkce  $z = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y - 5$ . Začneme prvními parciálními derivacemi.

$$z'_x = 2x + 4y - 2 \quad z'_y = 4x + 12y + 8$$

Opět položíme obě derivace rovny nule, po vyřešení soustavy dvou lineárních rovnic získáme jediný stacionární bod  $S[7; -3]$ . Druhé parciální derivace jsou  $z''_{xx} = 2$ ,  $z''_{xy} = 4$  a  $z''_{yy} = 12$ . Všechny jsou konstantní, není kam dosazovat a determinant má univerzální hodnotu  $D = 8 > 0$ . Jelikož je  $z''_{xx} = 2 > 0$ , je v bodě  $S$  lokální minimum. Jen pro zajímavost, jeho hodnota je  $z(7, -3) = -24$ .

**Příklad 6.16** Určete lokální extrémy funkce  $z = -3x^4 - 5y^4$ . Spočteme první derivace  $z'_x = -12x^3$ ,  $z'_y = -20y^3$ . Jediným stacionárním bodem je počátek. Jdeme na druhé derivace.  $z''_{xx} = -36x^2$ ,  $z''_{yy} = -60y^2$ ,  $z''_{xy} = 0$ . Zřejmě je  $D = 0$ , o extrému nemůžeme tímto způsobem rozhodnout. My si ale všimneme, že funkční hodnoty jsou mimo počátek záporné, je zřejmé, že v počátku bude maximum.

Tak jako u funkce jedné proměnné můžeme určovat i extrémy absolutní, a to v případech, že je funkce definovaná na uzavřené oblasti. Ty pak mohou nastat buď v bodech lokálních extrémů nebo na hranici oblasti. Ukážeme si to na příkladu, nejdříve trochu teorie.

**Def. 6.12** Řekneme, že funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $[x_0; y_0]$  absolutní maximum (minimum), jestliže pro všechny body  $[x; y] \in M$  platí  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ).

**Def. 6.13** Bod  $[x_0; y_0]$  nazveme vnitřním bodem množiny  $M$ , existuje-li okolí  $O$  tohoto bodu takové, že  $O \subset M$ . Množina, která obsahuje pouze vnitřní body, se nazývá otevřená. Bod  $[x_0; y_0]$  nazveme vnějším bodem množiny  $M$ , jestliže každé jeho okolí obsahuje jak body množiny  $M$ , tak i body, které do ní nepatří. Množinu všech hraničních bodů nazýváme hranicí. Množina, která obsahuje všechny své hraniční body, se nazývá uzavřená.

**Def. 6.14** Množina  $M$  se nazývá omezená, existuje-li kruh  $K$  se středem v počátku tak, že  $M \subseteq K$ .



**Věta 6.13** *Nechť  $f(x, y)$  je spojitá funkce definovaná na omezené uzavřené množině. Pak zde nabývá své nejmenší a největší hodnoty.*

**Příklad 6.17** *Stanovte absolutní extrémy funkce  $z = \sqrt{2x - x^2 - 4y^2}$ . Po doplnění na čtverec zjistíme, že definičním oborem jsou vnitřní a hraniční body elipsy  $(x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1$ . Stacionární body určíme řešením soustavy rovnic*

$$z'_x = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0 \quad z'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{2x - x^2 - 4y^2}} = 0$$

*Existuje jediný stacionární bod  $S[1; 0]$ . Je  $f(1, 0) = 1$ . Stanovení extrémů na hranici je obecně velmi obtížné, vezmeme-li rozum do hrsti, tak vidíme, že funkce je na hranici rovna nule a jinak je kladná. Absolutní maximum je tedy ve středu elipsy a minimum na její hranici.*

Podobně jako u funkce jedné proměnné se budeme ptát, zda lze funkci dvou proměnných nahradit polynomem v okolí nějakého bodu  $A[x_0; y_0]$ . Odpověď zní ano, je to analogické, jen derivace musíme nahradit totálními diferenciály. Následující věta se nazývá Taylorova.

**Věta 6.14** *Nechť funkce  $f(x, y)$  má spojité parciální derivace do řádu  $n + 1$  včetně na množině  $M \subset \mathbb{R}_2$ . Nechť body  $A = [x_0; y_0]$  a  $X = [x; y]$  patří do  $M$ . Potom platí*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^1 f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x_0, y_0) + R_{n+1} \end{aligned}$$

Že  $dx = x - x_0$  a  $dy = y - y_0$  jste jistě poznali sami. Zbytek se nejčastěji vyjadřuje ve tvaru

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{n+1} f(\xi, \eta)$$

Čísla  $\xi$  a  $\eta$  leží mezi  $x$  a  $x_0$ , resp.  $y$  a  $y_0$ .

## Témata

- Posloupnosti, definice, vlastnosti
- Limita posloupnosti, výpočet
- Hromadné body
- Limita funkce

- Spojitost funkce, vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu
- Derivace funkce, výpočet
- Extrémy funkce, monotonie
- Konvexnost, konkávnost, inflexní body
- Asymptoty
- Tečna a normála ke grafu funkce
- Věty o střední hodnotě
- Diferenciál funkce
- Taylorova věta
- Funkce dvou proměnných, definice, graf, definiční obor
- Limita a spojitost funkce dvou proměnných
- Parciální derivace
- Extrémy funkce dvou proměnných
- Totální diferenciál
- Taylorova věta

# Literatura

- [1] Novák V.: Diferenciální počet v  $\mathbb{R}$ . MU Brno, fakulta přírodovědecká, Brno 1995