Domácí úkol 1

Upozornění: příklady byly náhodně vygenerovány odpovědníkem „Domácí úkol 1“. Nabízené řešení bylo zpracováno Lukášem Másilkem.

Příklad 1: Vypočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(n+1)!}{3\cdot(n+1)!+2\cdot(n-1)!}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(n+1)!}{3\cdot(n+1)!+2\cdot(n-1)!} &=_1 \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{3\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!+2\cdot(n-1)!} \\
&=_2 \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!\cdot[3\cdot(n+1)\cdot n+2]} \\
&=_3 \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot(n+1)\cdot n+2} \\
&=_4 \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+5n}{3n^2+3n+2} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Poznámky k výpočtu: **1. krok** ($=_1$): úprava obou faktoriálů $(n+1)!$ tak, aby vyjádřeny se stejným podvýrazem $(n-1)!$ jako sčítanec ve jmenovateli vpravo; **2. krok** ($=_2$): vytknutí podvýrazu $(n-1)!$ v čitateli i jmenovateli zlomku; **3. krok** ($=_3$): krácení výrazu $(n-1)!$; **4. krok** ($=_4$): Roznásobení závorek a následný výpočet limity (nahoře i dole jsou polynomy stejného stupně, tudíž výsledkem je podíl vedoucích koeficientů).

Příklad 2: Vypočítejte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$$

Nápověda: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Řešení:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^n =_1 \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n =_{(*)}$

Substituce: $-\frac{3}{n}=\frac{1}{k}$, z čehož $n=-3k$, tedy

$=_{(*)} \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-3k} =_2 \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-3} =_3 e^{-3}$

Poznámky k výpočtu: **1. krok** ($=_1$): vydělení polynomů v čitateli a jmenovateli; **2. krok** ($=_2$): úprava zápisu exponentu a limitní přechod k vnitřní funkci $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$; **3. krok** ($=_3$): využití nápovědy a stanovení výsledku limity.

Příklad 3: Určete všechny hromadné body, limitu superior a limitu inferior posloupnosti

$$a_n = (-1)^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Řešení: Nejprve si spočítáme několik prvních členů, abychom si udělali představu o možných podposloupnostech.

$a_1 = (-1)^1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (kosinus z úhlu $\frac{\pi}{3}$ v 1. kvadrantu je kladný)

$a_2 = (-1)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (kosinus z úhlu $\frac{2\pi}{3}$ v 2. kvadrantu je záporný)

$a_3 = (-1)^3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) = 1$ (kosinus z úhlu π je -1)

$a_4 = (-1)^4 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (kosinus z úhlu $\frac{4\pi}{3}$ v 3. kvadrantu je záporný)

$a_5 = (-1)^5 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (kosinus z úhlu $\frac{5\pi}{3}$ ve 4. kvadrantu je kladný)

$a_6 = (-1)^6 \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1$ (kosinus z úhlu 2π je 1)

$a_7 = a_1, a_8 = a_2, \ldots$

Podposloupnosti:

1. $n = 6k+1,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+1} \cdot \cos\left(\frac{(6k+1)\cdot\pi}{3}\right) = -\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, tedy $-\frac{1}{2} \in H(a_n)$.
2. $n = 6k+2,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+2} \cdot \cos\left(\frac{(6k+2)\cdot\pi}{3}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
3. $n = 6k+3,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+3} \cdot \cos\left(\frac{(6k+3)\cdot\pi}{3}\right) = -\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{3\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\cos(\pi) = 1$, tedy $1 \in H(a_n)$.
4. $n = 6k+4,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+4} \cdot \cos\left(\frac{(6k+4)\cdot\pi}{3}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
5. $n = 6k+5,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+5} \cdot \cos\left(\frac{(6k+5)\cdot\pi}{3}\right) = -\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
6. $n = 6k+6,\ k \in \mathbb{N}_0$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+6} \cdot \cos\left(\frac{(6k+6)\cdot\pi}{3}\right) = -\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{6\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\cos(2\pi) = 1$.

Závěr: $H(a_n) = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{2}$, $\limsup a_n = 1$.

Příklad 4: Vypočítejte limitu funkce pomocí běžných úprav, nikoliv L'Hospitalovým pravidlem.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}$$

Řešení: po dosazení -3 do limitního výrazu vyjde neurčitý výraz $\left[\frac{0}{0}\right]$. Oba polynomy v čitateli a jmenovateli však lze rozložit na součin kořenových činitelů (pomocí Vietových vztahů či diskriminantu):

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\cdot(x+4)}{(x-1)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{x+4}{x-1} = -\frac{1}{4}$$

Příklad 5: Vypočítejte první derivaci funkce:

$$y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \ln x$$

Řešení: První sčítanec je složená funkce, druhý pak můžeme zderivovat dle vzorečků. Složenou funkci však lze pro účely derivování také výrazně zjednodušit:

$$y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \ln x = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln x = x^{\frac{3}{4}} + \ln x$$

Derivování je tedy snadné. Následnou úpravu provádíme, abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli 1. zlomku:

$$y' = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{x} = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{4x} + \frac{1}{x}$$

Poslední (výsledný) výraz je již možné spatřit v nabízených variantách řešení.

Příklad 6: Napište rovnici tečny v bodě $T\,[0;?]$ ke grafu funkce $y = \sin(x){+}3$.

Řešení:

1. Spočítejme nejdříve y-ovou souřadnici tečného bodu: $T_y = y(0) = \sin(0) + 3 = 3$, z toho $T[0,3]$.
2. Nyní zderivujeme funkci y: $y' = \cos(x)$.
3. Směrnici k tečny $y = kx + q$ získáme dosazením do derivace y' takto: $k = y'(T_x) = y'(0) = \cos(0) = 1$.
4. Tečna má tedy tvar $y = x{+}q$. Parametr q spočítáme dosazením tečného bodu $T[0,3]$: $3 = 1{+}q$, z čehož $q = 2$. Tečna má tedy rovnici $y = x{+}2$.