MA0004 Matematická analýza 1, 4. seminář

6. 3. 2023

Náplň cvičení

1. Derivace funkce jedné proměnné
   - Geometrický význam derivace
   - Využití základních vzorců
   - Derivace složené funkce
   - Úprava funkce před stanovením derivace
   - Tečna a normála funkce

Literatura a použité zdroje

- Došlá, Z., Kuben, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* MU: Brno, 2004.
- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I.* Brno, 2012. Dostupné z: `https://is.muni.cz/elportal/?id=980552`

Geometrický význam derivace

Derivace funkce

Definice: Derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazveme limitu

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Značit budeme $f'(x)$, resp. y'. Je-li limita vlastní, mluvíme o vlastní derivaci, v opačném případě se jedná o derivaci nevlastní. V případě, že existují jen jednostranné limity, mluvíme o derivaci zprava (zleva).

Ukázka animace vysvětlující geometrický význam derivace $f'(x)$ v určitém bodě $S2 = [x_0, f(x_0)]$, k němuž se přibližuje bod $S1 = [a, f(a)]$:

`https://www.geogebra.org/classic/m7vhpa2u`

Využití základních vzorců

Příklad 1: Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$
4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
5. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

Využití základních vzorců

Příklad 1: Zderivujte následující funkce:

1. $f\left(x\right) = \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
2. $f\left(x\right) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$
3. $f\left(x\right) = x^2 \cdot \ln x$
4. $f\left(x\right) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
5. $f\left(x\right) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

Výsledky:

1. $\left[\frac{11}{6} \cdot \sqrt[6]{x^5}\right]$, 2. $\left[\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x}}{2x^2}\right]$, 3. $\left[x \cdot (2\ln x + 1)\right]$,
4. $\left[-\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$, 5. $\left[\frac{1}{1-\sin x}\right]$

Derivace složené funkce

Příklad 2: Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \sin^4 x$
2. $f(x) = e^{x^2-2x+1}$
3. $f(x) = \ln^3\left(x^2-1\right)$
4. $f(x) = \mathrm{tg}^3 2x$
5. $f(x) = 5^{x^2-1}+3$
6. $f(x) = x^2\cdot\sqrt{1+x^2}$
7. $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$
8. $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

Příklad 2: Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = \sin^4 x$
2. $f(x) = e^{x^2-2x+1}$
3. $f(x) = \ln^3\left(x^2 - 1\right)$
4. $f(x) = \mathrm{tg}^3 2x$
5. $f(x) = 5^{x^2-1} + 3$
6. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2}$
7. $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^2}$
8. $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

Výsledky:

1. $\left[4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x\right]$, 2. $\left[2(x-1) \cdot e^{x^2-2x+1}\right]$, 3. $\left[\frac{6x \cdot \ln^2\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right]$, 4. $\left[\frac{6\sin^2 2x}{\cos^4 2x}\right]$

5. $\left[2x \cdot 5^{x^2-1} \cdot \ln 5\right]$, 6. $\left[\frac{x\left(2+3x^2\right) \cdot \sqrt{1+x^2}}{x^2+1}\right]$, 7. $\left[\frac{4}{(5-2x)^3}\right]$, 8. $\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$

Úprava funkce před stanovením derivace

Příklad 3: Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = x^{\ln x}$
3. $f(x) = x^{\sin x}$

Úprava funkce před stanovením derivace

Příklad 3: Zderivujte následující funkce:

1. $f(x) = x^x$
2. $f(x) = x^{\ln x}$
3. $f(x) = x^{\sin x}$

Výsledky:

1. $[x^x \cdot (\ln x + 1)]$, 2. $\left[2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x - 1}\right]$, 3. $\left[x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)\right]$

Tečna a normála funkce

Příklad 4: Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T = [x_0, y_0]$.

1. $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}, \quad T = [2, \ ?]$
2. $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}, \quad T = \left[-\frac{1}{2}, ?\right]$
3. $f(x) = \frac{8}{x^2+4}, \quad T = [2, \ ?]$
4. $f(x) = x \cdot \ln x, \quad T = [e, \ ?]$

Tečna a normála funkce

Příklad 4: Napište rovnici tečny a normály grafu dané funkce v bodě $T = [x_0, y_0]$.

1. $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}, \;\; T = [2, \;?]$
2. $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}, \;\; T = \left[-\frac{1}{2}, ?\right]$
3. $f(x) = \frac{8}{x^2+4}, \;\; T = [2, \;?]$
4. $f(x) = x \cdot \ln x, \;\; T = [e, \;?]$

Výsledky:

4.1. $T = \left[2, \frac{5}{7}\right]$, tečna: $y = \frac{11}{49}x + \frac{13}{49}$, normála: $y = -\frac{49}{11}x + \frac{741}{77}$
4.2. $T = \left[-\frac{1}{2}, -1\right]$, tečna: $y = -2x - 2$, normála: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
4.3. $T = [2, \;1]$, tečna: $y = -\frac{1}{2}x + 2$, normála: $y = 2x - 1$
4.4. $T = [e, \;e]$, tečna: $y = 2x - e$, normála: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}e$

Tečna a normála funkce

Příklad 5: Napište rovnici tečny a normály

1. ke kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v jejím bodě $[1,\ -1]$
2. k parabole $y^2 = x$ v jejím bodě $[4,\ -2]$

Příklad 6: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 4x + 3$, která svírá úhel $\varphi = 45^\circ$ s osou x.

Příklad 7: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 2x + 3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p : 3x - y + 5 = 0$.

Tečna a normála funkce

Příklad 5: Napište rovnici tečny a normály

1. ke kružnici $x^2 + y^2 = 2$ v jejím bodě $[1, \ -1]$
2. k parabole $y^2 = x$ v jejím bodě $[4, \ -2]$

Příklad 6: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 4x + 3$, která svírá úhel $\varphi = 45^\circ$ s osou x.

Příklad 7: Napište rovnici tečny ke křivce $f(x) = x^2 - 2x + 3$, je-li tečna rovnoběžná s přímkou $p : 3x - y + 5 = 0$.

Výsledky:

5.1. Tečna: $y = x - 2$, normála: $y = -x$
5.2. Tečna: $y = -\frac{1}{4}x - 1$, normála: $y = 4x - 18$

6. $T = \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right]$, tečna: $y = x - \frac{13}{4}$

7. $T = \left[\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right]$, tečna: $y = 3x - \frac{13}{4}$