

MA0004 Matematická analýza 1, 6. seminář

20. 3. 2023

- 1 Monotónnost a lokální extrémny
- 2 Konvexnost/konkávnost a inflexní body
- 3 Asymptoty
- 4 Vyšetřování průběhu funkce

Literatura a použité zdroje

- Zemánek, P., Hasil, P. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*. Brno, 2012. Dostupné z:
<https://is.muni.cz/elportal/?id=980552>
- Ústav matematiky, FSI VUT Brno. *MATEMATIKA online – Matematika I*. Dostupné z:
<http://mathonline.fme.vutbr.cz/Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx>

Příklad 1: Určete intervaly monotonie a lokální extrémym pro následující funkce.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

c) $f(x) = x - 2 \cdot \sin x$, $D(f) = (0, 2\pi)$

d) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$, $D(f) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$

f) $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

Monotónnost a lokální extrémý – výsledky

- a) na $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ rostoucí, na $(0, 2)$ klesající,
 $[2, 4 \ln 2]$ lokální maximum, $[0, 0]$ lokální minimum
- b) na $(0, e)$ klesající, na (e, ∞) rostoucí, na $(0, 2)$ klesající,
 $[e, e]$ lokální minimum
- c) na $(0, \frac{\pi}{3})$ a $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ klesající, na $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ rostoucí,
 $[\frac{\pi}{3}, \pi - \sqrt{3}]$ lokální minimum, $[\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}]$ lokální maximum
- d) na $(-\infty, -3)$ a $(-1, \infty)$ klesající, na $(-3, -1)$ rostoucí,
 $[-3, 0]$ lokální minimum, $[-1, 4e]$ lokální maximum
- e) na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ klesající, na $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$ rostoucí,
 $[0, 1]$ lokální minimum, $[-1, 0], [1, 0]$ lokální maxima
- f) na $(\frac{9}{11}, 1)$ klesající, na $(-\infty, \frac{9}{11})$ a $(1, \infty)$ rostoucí,
 $[1, 0]$ lokální minimum, $[\frac{9}{11}, \frac{3^6 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{11^{11}}}]$ lokální maximum

Příklad 2: Rozhodněte o konvexnosti a konkávnosti funkce a najděte případné inflexní body u následujících funkcí.

a) $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x)$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

d) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2)$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x - 3$, $D(f) = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{e^x}$, $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{e^x}$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

Konvexnost/konkávnost a inflexní body – výsledky

- a) na $(-\infty, 0)$ konkávní, na $(0, \infty)$ konvexní, $[0, 0]$ inflexní bod
- b) na $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ konvexní, na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ konkávní, $\left[2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2}) e^{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$, $\left[2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2}) e^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$ inflexní body
- c) na $(0, 1)$ a (e^2, ∞) konkávní, na $(1, e^2)$ konvexní, $\left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$ inflexní bod
- d) na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$ konkávní, na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$ konvexní, $[0, 0]$, $\left[-\sqrt{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$, $\left[\sqrt{3}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ inflexní body
- e) na $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ konvexní, na $(-1, 2)$ konkávní, $[-1, -19]$, $[2, -37]$ inflexní body
- f) na $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ a $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$ konvexní, na $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ konkávní, $\left[-1 - \sqrt{2}, \frac{6 - 4\sqrt{2}}{e^{-1 - \sqrt{2}}}\right]$, $\left[-1 + \sqrt{2}, \frac{6 + 4\sqrt{2}}{e^{-1 + \sqrt{2}}}\right]$ inflexní body

Příklad 3: Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 4: Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Příklad 3: Určete asymptoty bez směrnice u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 4: Určete asymptoty se směrnicí (tj. v nevlastních bodech $\pm\infty$) u následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Výsledky:

3. a) $x = 0$, b) neexistuje, c) $x = 1$

4. a) $y = 3x + 3$, b) $y = -x$, c) $y = 0$

- Definiční obor
- Lichost, sudost, periodičnost
- Charakteristika bodů nespojitosti (výpočet jednostranných limit)
- Řešení rovnice $f(x) = 0$ (intervaly, kdy je funkce nad osou x či pod osou x)
- Řešení rovnice $f'(x) = 0$ (intervaly monotónnosti, lokální extrémy)
- Řešení rovnice $f''(x) = 0$ (intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body)
- Asymptoty

Průběh funkce – příklady

Příklad 5: U funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ byl vyšetřen její průběh. Načrtněte graf funkce dle dostupných informací (viz soubor Příklad 266 - vzorový.docx ve Studijních materiálech, ve složce Semináře).

Příklad 6: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf, je-li dána jejich první i druhá derivace.

a) $f(x) = \frac{x}{3-x^2}$, $f'(x) = \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2}$, $f''(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$, $f'(x) = \frac{2-\ln x^2}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2\ln x^2-6}{x^3}$

Příklad 7: Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich graf.

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$