$f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ (lokální extrémy)

Stacion. body: $f'_x(x,y) = 0$, $f'_y(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = ?$

$f'_x(x,y) = 2x - 4y$, $f'_y(x,y) = -4x + 3y^2 + 4$

$2x - 4y = 0$, $-4x + 3y^2 + 4 = 0$

$x = 2y$ $\quad -8y + 3y^2 + 4 = 0$, $3y^2 - 8y + 4 = 0$,

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3\cdot 4\cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} 2 & \to x = 4 \\ \frac{2}{3} & \to x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Stac. body: $P_1(4,2)$, $P_2\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Nutná podmínka pro lok. extrém byla vyhověna.

Postačující podmínka: determ. Hessovy matice

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Pro spojité parc. derivace bude vždy $f''_{xy} = f''_{yx}$

$f'_x(x,y) = 2x - 4y \quad f'_y(x,y) = -4x + 3y^2 + 4$

$f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 6y$, $f''_{xy} = -4 = f''_{yx}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{pmatrix}, \quad \det H_f(x,y) = 2\cdot 6y - 16 = 12y - 16.$$

$2 > 0$

Dosadíme stac. body.

$\det H_f(4,2) = 12\cdot 2 - 16 = \underline{8 > 0}$

v $P_1(4,2)$ je lok. minimum.

$\det H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 12\cdot\frac{2}{3} - 16 = 8 - 16 = -8 < 0 \to$

$\to$ lok. extrém zde není.

$\det H_f(x_0,y_0) > 0 \to$ v (x_0,y_0) je extrém

($f''_x(x_0,y_0) > 0 \to$ min

$< 0 \to$ max)

$\det H_f(x_0,y_0) < 0 \to$ v (x_0,y_0) extrém není

$\det H_f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ nelze takto rozhodnout (vyšetříme jinak)