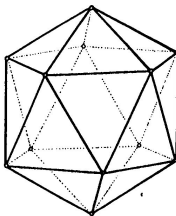
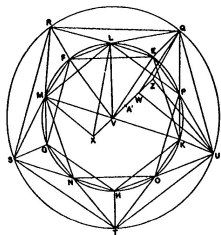


# Konstrukční geometrie



Poslední aktualizace: 13. května 2023, Vojtěch Žádník

<https://is.muni.cz/el/1441/jaro2023/MA0007/>

## Cíle

- ▶ připomenout, zorganizovat a rozšířit stávající poznatky
- ▶ něco udělat, udělané vysvětlit, ...

## Proces

- ▶ zapamatovat a zopakovat
- ▶ pochopit a použít
- ▶ rozlišovat a vysvětlovat
- ▶ přetvářet a vytvářet

## Kulisy

- ▶ geometrie

## Přehled celkový

- ▶ jaro 2023: konstrukční geometrie („syntetická“) — pravítko, kružítko, trpělivost
- ▶ podzim 2023 a jaro 2024: počítačí geometrie („analytická“) — soustavy rovnic, matice, determinanty

## Přehled aktuální

- ▶ klasická konstrukční geometrie: Základy, dotykové úlohy
- ▶ geometrická zobrazení: shodná, podobná, afinní, projektivní a pár dalších
- ▶ poznámky k zobrazování prostoru do roviny

## Materiály

- ▶ IS: osnova, přednáška, odkazy, staré písemky<sup>1</sup>

## Zakončení

- ▶ úlohy → písemka → ústní zkouška

## Soutěž

- ▶ o nejpovedenější konstrukci/výkres/aplikaci použitelnou ve výuce

---

<sup>1</sup><https://is.muni.cz/auth/el/ped/jaro2023/MA0007/index.qwarp>

Základy	4
Úvod	5
Obsahy a kvadratura mnohoúhelníku	15
Trocha algebry a sestrojitelné veličiny	22
Kosinová věta	32
O kružnicích	33
Pravidelný pětiúhelník a další	40
Teorie podobnosti	51
Trocha stereometrie	65
Pravidelné mnohostěny	70
Dotykové úlohy	78
Geometrická zobrazení	91
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

- = základy eukleidovské geometrie
- = geometrie Eukleidových Základů,<sup>2</sup> ovšem s Hilbertovými upřesněními.<sup>3</sup>

Základní pojmy:

- ▶ *bod, přímka, rovina*

Základní vztahy/relace:

- ▶ *incidence, uspořádání, rovnoběžnost, shodnost, spojitost*

Základní definice:

- ▶ *např. úhel, pravý úhel, resp. kolmost přímek, trojúhelník, čtverec, kružnice, rovnoběžnost přímek, ...*

Základní tvrzení (axiómy/postuláty):

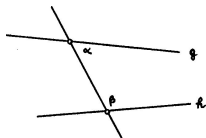
- ▶ *několik ke každému ze základních vztahů...*

---

<sup>2</sup>kolem -300, [http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy\\_Z%C3%A1klady](http://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleidovy_Z%C3%A1klady)

<sup>3</sup>kolem +1900, [http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's\\_axioms](http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms)

- (I) Každé dva různé body spojuje přímka.
- (II) Každou přímku lze na každé straně libovolně prodloužit.
- (III) Lze vytvořit kružnici s libovolným daným středem procházející libovolným jiným bodem.
- (IV) Všechny pravé úhly jsou shodné.
- (V) Když přímka protínající dvě jiné přímky tvoří vnitřní úhly na jedné straně menší než dva pravé, pak tyto dvě přímky (dostatečně prodlouženy) setkají se na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.<sup>4</sup>



$$\alpha + \beta < 2R \implies g \text{ a } h \text{ se protínají}$$

---

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel\\_postulate](https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate)

- ▶ *Veličiny témuž rovné i navzájem rovný jsou.*
- ▶ *Když se přidají rovné veličiny k rovným, i celky jsou rovný.*
- ▶ apod.

Dnes čteme jako:

- ▶  $k = l \text{ a } m = l \implies k = m.$
- ▶  $k = l \text{ a } m = n \implies k + m = l + n.$
- ▶ apod.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup><https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/cn.html>

Některé věci nejsou v Eukleidově systému explicitně formulovány. . .

Typický axióm **uspořádání** je např.:

- ▶ *Pro tři různé body ležící na jedné přímce platí, že právě jeden z nich je mezi zbylými dvěma.*

Axiomy **spojitosti** je možné nahradit jediným, tzv. Dedekindovým axiómem.

- ▶ *Body na přímce neobsahují (vzhledem k výše zmíněnému uspořádání) Dedekindovy řezy typu „skok“ a „mezera“.*

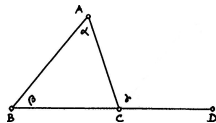
. . . jde zejména o upřesnění představy eukleidovské přímky jakožto „reálné“ přímky!<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>viz konstrukci tělesa reálných čísel (algebra) a problém sestrojitelných veličin (s. 25).

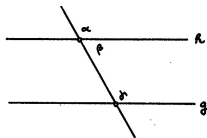


- ▶ Věty SUS, SSS, USU, nerovnosti v trojúhelníku apod.
- ▶ Věta o vnějším úhlu trojúhelníku.<sup>7</sup>



$$\gamma > \alpha \text{ a } \gamma > \beta$$

- ▶ Shodné střídavé úhly implikují rovnoběžnost přímek<sup>8</sup> (odtud existence rovnoběžky).

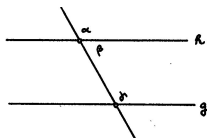


$$\alpha = \gamma \implies h \parallel g$$

<sup>7</sup>Zde jsou poprvé potřeba axiomy uspořádání (viz s. 11).

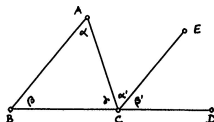
<sup>8</sup>Nepřímo pomocí věty o vnějším úhlu trojúhelníku (viz s. 12).

- ▶ Věta o střídavých úhlech<sup>9</sup> (odtud jednoznačnost rovnoběžky).



$$h \parallel g \implies \alpha = \gamma$$

- ▶ Věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku.<sup>10</sup>



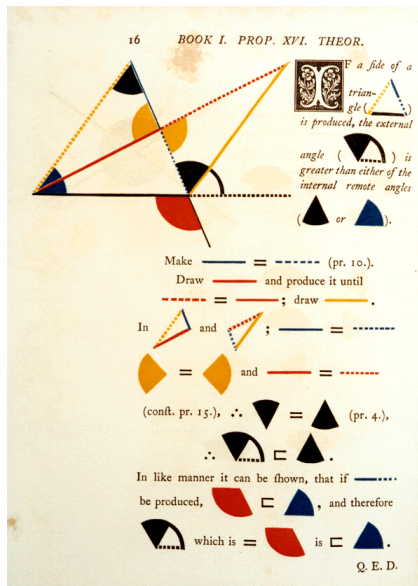
$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

- ▶ Věty o rovnoběžnících a trojúhelnících a jejich obsazích.<sup>11</sup>
- ▶ Pythagorova věta (a téměř vše co následuje)...

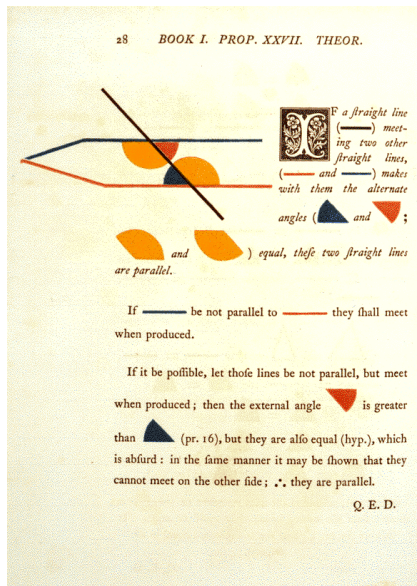
<sup>9</sup>Nepřímo:  $\alpha \neq \gamma \implies \alpha + \beta \neq \gamma + \beta \implies 2R \neq \gamma + \beta$ ; odtud podle (V) plyne, že se přímky  $h, g$  protínají, tedy nejsou rovnoběžné (viz s. 13).

<sup>10</sup>Přímo pomocí věty o střídavých úhlech (viz s. 14).

<sup>11</sup>Podrobněji od s. 15...

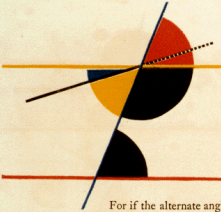


<sup>12</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-16.html>









<sup>13</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-28.html>

30 BOOK I. PROP. XXIX. THEOR.




 STRAIGHT line  
 (—) falling on  
 two parallel straight  
 lines (— and  
 —), makes the alternate  
 angles equal to one another; and  
 also the external equal to the in-  
 ternal and opposite angle on the  
 same side; and the two internal  
 angles on the same side together  
 equal to two right angles.

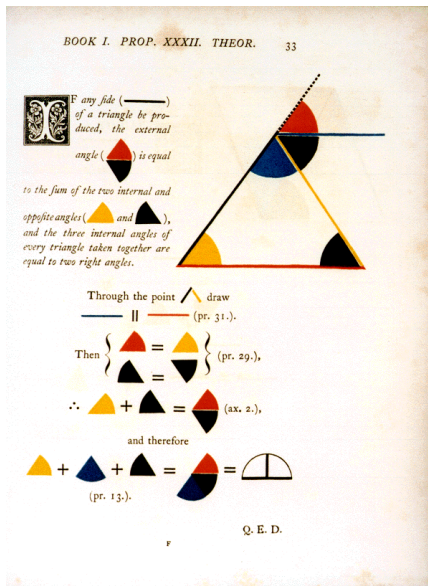
For if the alternate angles  and  be not equal,  
 draw —, making  =  (pr. 23).  
 Therefore — || — (pr. 27.) and there-  
 fore two straight lines which intersect are parallel to  
 the same straight line, which is impossible (ax. 12).

Hence the alternate angles  and  are not  
 unequal, that is, they are equal:  =  (pr. 15);  
 $\therefore$   = , the external angle equal to the inter-  
 nal and opposite on the same side: if  be added to  
 both, then  +  =  =  (pr. 13).

That is to say, the two internal angles at the same side of  
 the cutting line are equal to two right angles.

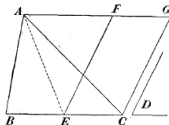
Q. E. D.

<sup>14</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-30.html>

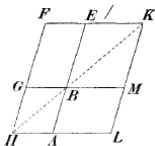


<sup>15</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-32.html>

- ▶ *Rovnoběžníky, resp. trojúhelníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.*
- ▶ *Trojúhelník  $ABC$  a rovnoběžník  $ECGF$  mají stejný obsah (kde  $E =$  střed  $BC$  a  $BC \parallel AF$ ):*



- ▶ *Rovnoběžníky  $BEFG$  a  $BALM$  mají stejný obsah (kde společný bod  $B \in$  úhlopříčce  $HK$ ):*



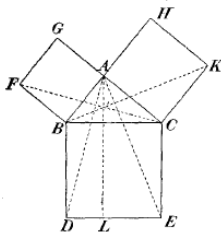
- ▶ *Eukleidova věta o odvěsně/výšce, resp. věta Pythagorova. . .*

<sup>16</sup>Ve všech důkazech vystačíme s větou o střídavých úhlech a shodnými trojúhelníky (viz s. 17, 18).

## Věta

Trojúhelník  $BAC$  je pravoúhlý a  $P$  je pata výšky z vrcholu  $A$ .

Potom platí  $BP \cdot BC = BA^2$  a  $CP \cdot CB = CA^2$ , tudíž  $BC^2 = BA^2 + AC^2$ .



## Důkaz.

- ▶  $FBAG$  je čtverec a úhel  $BAC$  je pravý  $\implies$  body  $G, A, C$  leží na jedné přímce, a ta je rovnoběžná s  $FB$ .
- ▶ Odtud podle zákl. věty o obsahích, shodnosti trojúh.  $FBC$  a  $ABD$  a znovu podle zákl. věty o obsahích:

$$\text{obsah } FBA = \text{obsah } FBC = \text{obsah } ABD = \text{obsah } PBD.$$

Proto má čtverec  $FBAG$  stejný obsah jako obdélník  $PBDL$ .

Obdobně to funguje na druhé straně...<sup>17</sup>



<sup>17</sup><https://www.geogebra.org/m/apubVUSE>



36 BOOK I. PROP. XXXV. THEOR.



ARALLELOGRAMS  
on the same base, and  
between the same paral-  
lels, are (in area) equal.

On account of the parallels,

$$\begin{array}{l} \text{red triangle} = \text{blue triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{black triangle} = \text{white triangle} \quad ; \quad (\text{pr. 29.}) \\ \text{and } \text{blue triangle} = \text{red triangle} \quad (\text{pr. 34.}) \end{array}$$

But,  $\text{yellow trapezoid} = \text{yellow triangle} \quad (\text{pr. 8.})$

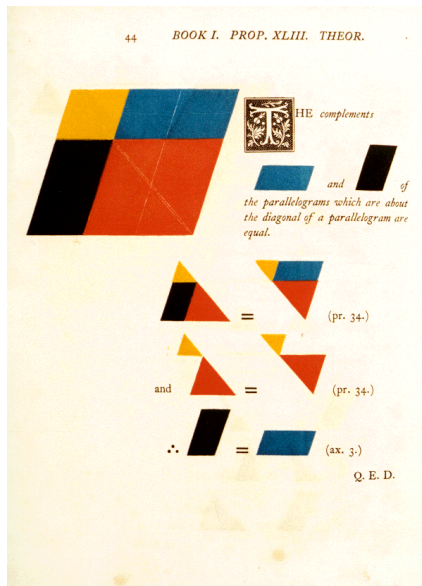
$$\therefore \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{yellow triangle} = \text{yellow triangle} \text{ minus } \text{blue triangle}$$

$$\text{and } \text{yellow trapezoid} \text{ minus } \text{yellow triangle} = \text{yellow triangle} \text{ minus } \text{black triangle}$$

$$\therefore \text{yellow trapezoid} = \text{yellow triangle} \text{ minus } \text{black triangle}$$

Q. E. D.

<sup>18</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-36.html>



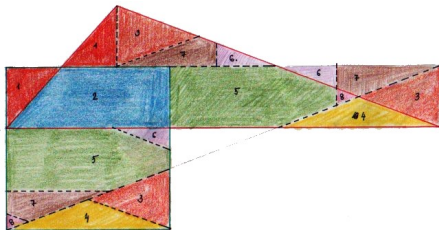
<sup>19</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book1/byrne-44.html>

Kombinací předchozích poznatků zjišťujeme, že libovolný mnohoúhelník lze geometricky *kvadraturovat* = sestrojít čtverec se stejným obsahem.<sup>20</sup>

Navíc každou dílčí konstrukci lze doplnit názorným rozstříháním . . .

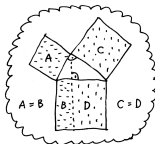
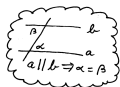
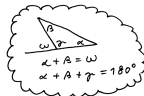
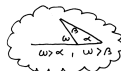
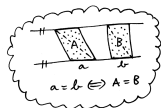
### Věta (Wallaceova–Bolyaiova–Gerwienova)

*Dva mnohoúhelníky mají stejný obsah  $\iff$  jeden lze rozstříhat na části, z nichž lze složit ten druhý.*

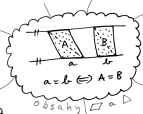
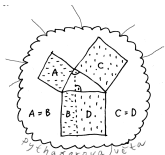


Kvadratura obecného trojúhelníku se stříháním

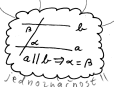
<sup>20</sup><http://ggbtu.be/mkripDpYd>



1. PATRO



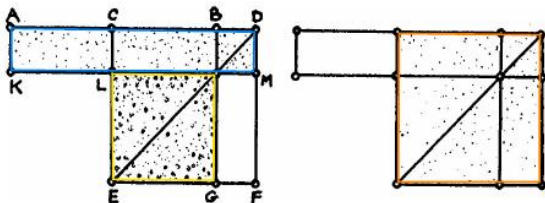
PŘÍZEMÍ



SUTERÉN



... geometrické konstrukce vs. algebraická vyjádření...



Obrázek 4.11: **A** II.6: Pokud je  $C$  střed úsečky  $AB$  a  $D$  je libovolný bod na téže přímce vpravo od  $B$ , potom platí  $AD \cdot BD + CB^2 = CD^2$ .

## Poznámky

Při značení  $|AB| =: b$  a  $|DB| =: x$  lze předchozí tvrzení psát jako

$$(b+x)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2.$$

Uvedené úpravy známe jako tzv. doplnění do čtverce.

Tyto úpravy jsou prvním krokem k vyjádření kořenů obecné kvadratické rovnice (s. 27).

Míříme k charakterizaci sestrojitelných veličin (s. 25)...

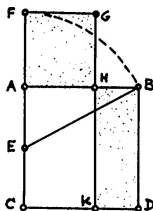
### Definice

Bod  $H$  dělí úsečku  $AB$  ve *zlatém řezu*, pokud poměr celé úsečky k delší části řezu je stejný jako poměr delší části ke kratší, tzn. pokud

$$BA : AH = AH : HB, \quad \text{nebo} \quad AB : BH = BH : HA.$$

### Konstrukce (Eukleidova)

- (i)  $AC$  je kolmice k  $AB$ , přičemž  $AC = AB$ ,
- (ii)  $E$  = střed  $AC$ ,
- (iii)  $F$  leží na polopřímce  $CA$  tak, že  $EF = EB$ ,
- (iv)  $H$  leží na úsečce  $AB$  tak, že  $AH = AF$   
 $\implies AH$  je delší částí zlatého řezu úsečky  $AB$ .

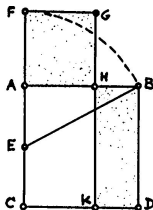


Zdůvodnění konstrukce plyne z předchozího (s. 22) a z Pythagorovy věty (s. 16):

$$CF \cdot FA + AE^2 = EF^2 = EB^2 = AE^2 + AB^2 \quad \text{neboli} \quad CF \cdot FA = AB^2.$$

Tzn. obdélník  $CFGK$  a čtverec  $ABDC$  mají stejný obsah. Tyto však mají společnou část  $CKHA$ , takže taky čtverec  $AHGF$  a obdélník  $KDHB$  mají stejný obsah. To můžeme zapsat jako

$$AH^2 = AB \cdot BH \quad \text{neboli} \quad AH : BH = AB : AH. \quad \square$$



### Počítání

Při označení  $|AB| =: b$  a  $|AH| =: x$  definice zlatého řezu zní:

$$b : x = x : (b - x) \quad \text{neboli} \quad b(b - x) = x^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 + bx - b^2 = 0.$$

Postupně sestrojené veličiny jsou:

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}b, \quad |EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}b, \quad |AF| = |AH| = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b.$$

Skutečně,  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$  je kořenem kvadratické rovnice  $x^2 + bx - b^2 = 0 \dots$



Reálné veličiny — reprezentované úsečkami — umíme:

- ▶ **sčítat** a **odčítat** — pomocí přikládání a odebírání úseček na přímce,
- ▶ **násobit** a **dělit** — pomocí stejnoplochých rovnoběžníků, resp. podobných trojúhelníků,<sup>21</sup>
- ▶ **druhou odmocninu** — pomocí Eukleidovy věty o odvěsně, resp. o výšce.

Nic dalšího neumíme a nic dalšího ani sestrojít nelze:

### Věta

*Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem  $\iff$  jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu*

$$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\quad} \quad ( \quad )$$

---

<sup>21</sup>Podobnostem se budeme věnovat záhy, viz s. 51.

## Věta

Reálné číslo je sestrojitelné eukleidovským pravítkem a kružítkem  $\iff$  jej lze vyjádřit pomocí konečného počtu

$$1 \quad + \quad - \quad \cdot \quad : \quad \sqrt{\quad} \quad ( \quad )$$

## Důkaz.

Začneme s úsečkou představující jednotku.

Další sestrojitelné veličiny vznikají konstrukcemi v rovině, a to výhradně jako

- (a) průnik dvou přímek  $\rightsquigarrow$  soustava dvou lineárních rovnic,
- (b) průnik přímky s kružnicí  $\rightsquigarrow$  soustava lineární a kvadratické rovnice,
- (c) průnik dvou kružnic  $\rightsquigarrow$  soustava dvou kvadratických rovnic.

Eliminací jedné proměnné dostaneme jednu lineární, nebo kvadratickou rovnici; vyřešíme, dosadíme, ...

Kořen(y) lib. lineární a kvadratické rovnice umíme vyjádřit z jejích koeficientů pomocí právě uvedených operací! □

Algebraické vyjádření kořenů kvadratické rovnice  $x^2 + bx + c = 0$  se dělá takto:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \quad \text{neboli} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

což po odmocnění a úpravě vede k dobře známému vzorečku

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad \text{neboli} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

- (a) zdvojení krychle  $\leadsto x = \sqrt[3]{2a}$ ,
- (b) rozvinutí kružnice  $\leadsto x = 2\pi r$ ,
- (c) kvadratura kruhu  $\leadsto x = \sqrt{\pi}r$ ,
- (d) roztřetí úhlu  $\leadsto x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$ ,
- (e) pravidelné mnohoúhelníky  $\leadsto \dots\dots$  (s. 48)

Problémy (b) a (c) jsou ekvivalentní; problémy (d) a (e) spolu úzce souvisí.

Díky J.H. Lambertovi, resp. F. Lindemannovi víme, že  $\pi$  není racionální, resp. algebraické číslo.<sup>22</sup>

Z předchozího (a trochu následujícího) víme, že

- ▶ problémy (a), (b) a (c) nejsou nikdy řešitelné,
- ▶ problémy (d) a (e) ve speciálních případech jsou řešitelné.

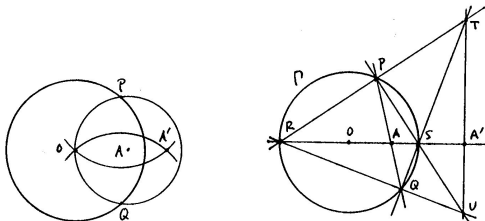
---

<sup>22</sup>r. 1767, resp. 1882

Eukleidovské konstrukce = konstrukce s kružítkem a pravítkem.

Mascheroniovské konstrukce = konstrukce pouze s kružítkem.

Steinerovské konstrukce = konstrukce pouze s pravítkem a jednou kružnicí.



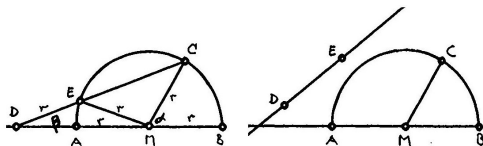
Příklad: Mascheroniovská a steinerovská konstrukce inverzního bodu  $A'$  k bodu  $A$  vzhledem ke kružnici se středem  $O$ .

## Věta

*Konstrukce je proveditelná eukleidovsky  $\iff$  je proveditelná mascheroniovsky  $\iff$  je proveditelná steinerovsky.*<sup>23</sup>

<sup>23</sup>Tvrzení vyplývá z předchozího (s. 26); obvykle však **nebývá** jasné, jak odp. konstrukce provést...

Konstrukce *neusis* = konstrukce s kružítkem a pravítkem se značkami (které se přikládají k přímkám, resp. kružnicím)

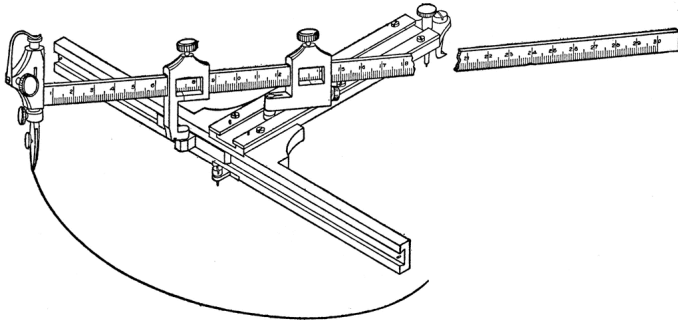


Příklad: Archimédova trisekce úhlu s označeným pravítkem.

### Poznámka

Takto lze sestavit (reálné) kořeny libovolné kubické rovnice, tedy vyřešit problémy (a), (d) a některé další (e) na s. 28...<sup>24</sup>

<sup>24</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis\\_construction](http://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction)

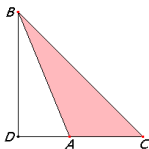


Konstrukce elipsy pomocí *neuseis* udělatka.

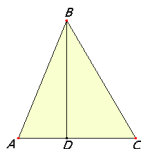
Jako důsledek (a zobecnění) Pythagorovy věty (s. 16) představujeme:

### Věta

V obecném trojúhelníku  $ABC$ , kde  $D =$  pata výšky z vrcholu  $B$ , platí:



$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC,$$



$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2DA \cdot AC.$$

### Důkaz.

Plyne z Pythagorovy věty (zde pro trojúh.  $BDC$  a  $BDA$ ) a pár úprav:

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (DA + AC)^2 = \\ &= (BD^2 + DA^2) + AC^2 + 2DA \cdot AC = BA^2 + AC^2 + 2DA \cdot AC. \quad \square \end{aligned}$$

### Poznámka

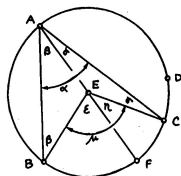
Při obvyklém značení  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$  a  $\alpha = |\angle BAC|$  můžeme obě části předchozí věty psát současně jako

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

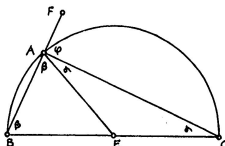


Jako důsledky věty o součtu úhlů v trojúhelníku (s. 10) uvádíme:<sup>25</sup>

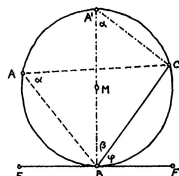
- ▶ větu o středovém a obvodovém úhlu,
- ▶ spec. případ — Thaletovu větu,
- ▶ větu o úsekovém úhlu,
- ▶ apod.



$$\mu = 2\alpha = \text{konst.}$$



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



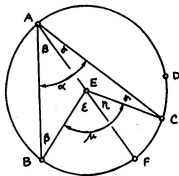
$$\varphi = \alpha$$

<sup>25</sup><https://ggbm.at/MtseAe67>

Pro kružnici se středem  $E$  a úseč  $BC$  je úhel  $BEC$  středový (ozn.  $\mu$ ) a úhel  $BAC$  obvodový (ozn.  $\alpha$ ):

### Věta

Středový úhel k dané úseči je dvakrát větší než lib. úhel obvodový ( $\mu = 2\alpha$ ).  
Proto jsou obvodové úhly k téže úseči **všechny stejné**.



### Důkaz.

- ▶ Trojúhelník  $ABE$  je rovnoramenný  $\implies$  úhly u základny jsou stejné (ozn.  $\beta$ ).
- ▶ Věta o součtu úhlů v trojúhelníku  $ABE \implies$  vnější úhel  $\underline{\varepsilon = 2\beta}$ .

Ze stejných důvodů platí také  $\eta = 2\gamma$ , odkud plyne  $\mu = 2\alpha$ .

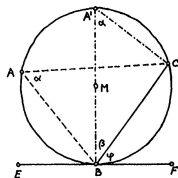
(Podobně se zdůvodní i ostatní varianty. . . )



Pro kružnici, úseč  $BC$  a tečnu  $BF$  je úhel  $CBF$  úsekový (ozn.  $\varphi$ ):

### Věta

Úsekový úhel  $k$  dané úseči je stejný jako úhel obvodový ( $\alpha = \varphi$ ).



### Důkaz.

- ▶ Věta o obvodovém úhlu  $\implies$  úhel  $BAC$  je stejný pro lib.  $A$  (ozn.  $\alpha$ ).
- ▶ Vezměme  $A'$  tak, aby  $A'B$  byl průměrem kružnice ( $\angle A'BC$  ozn.  $\beta$ ).  
Věta o tečně  $\implies \underline{\varphi + \beta = 90^\circ}$ .
- ▶ Thaletova věta  $\implies$  úhel u  $C$  je pravý.  
Věta o součtu úhlů v trojúhelníku  $A'BC \implies \underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$ .

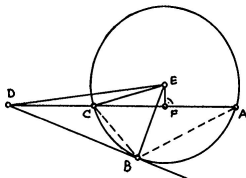
Celkem tedy  $\alpha = \varphi$ .



Sečna jdoucí bodem  $D$  protíná kružnici v bodech  $C$  a  $A$ :

### Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin  $DC \cdot DA$  je stále **stejný**.



$$DC \cdot DA = DB^2 = \text{konst.}$$

### Důkaz 1 (pro $D$ vně kružnice).

Lze zdůvodnit několikerým užitím Pythagorovy věty (pro trojúhelníky  $DBE$ ,  $DFE$ ,  $CFE$ )<sup>26</sup> a pár úpravami:

$$\begin{aligned} DB^2 &= DE^2 - EB^2 = DE^2 - EC^2 = (DF^2 + FE^2) - (EF^2 + FC^2) = \\ &= DF^2 - FC^2 = (DF + FC) \cdot (DF - FC) = DA \cdot DC. \end{aligned}$$

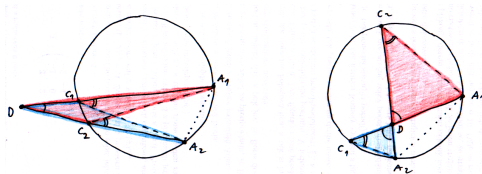
□

<sup>26</sup>kde  $E$  = střed kružnice a  $F$  = pata kolmice na  $AC$

Sečna jdoucí bodem  $D$  protíná kružnici v bodech  $C$  a  $A$ :

### Věta

Pro **libovolnou** sečnu platí, že součin  $DC \cdot DA$  je stále **stejný**.



$$DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2 = \dots = \text{konst.}$$

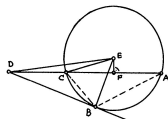
### Důkaz 2 (univerzální).

Alternativně pomocí podobných trojúhelníků:

- ▶ Věta o obvodových úhlech  $\implies$  vyznačené úhly u vrcholů  $C_i$  jsou stejné.
- ▶ Navíc úhly u vrcholu  $D$  jsou stejné  $\implies$  trojúhelníky  $C_1DA_2$  a  $C_2DA_1$  jsou podobné.
- ▶ Tedy  $DC_1 : DC_2 = DA_2 : DA_1$ , což je ekv.  $DC_1 \cdot DA_1 = DC_2 \cdot DA_2$ . □

Pro bod  $D$  vně kružnice (a  $B$  bod dotyku tečny) platí

$$DC \cdot DA = DB^2 = DE^2 - EB^2.$$

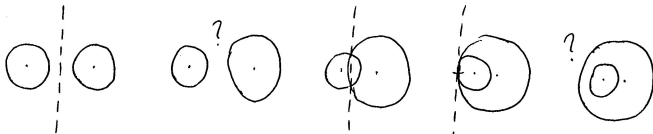


## Definice

Mocnost bodu  $D$  ke kružnici se středem  $E$  a poloměrem  $r$  je reálné číslo

$$m := DE^2 - r^2.$$

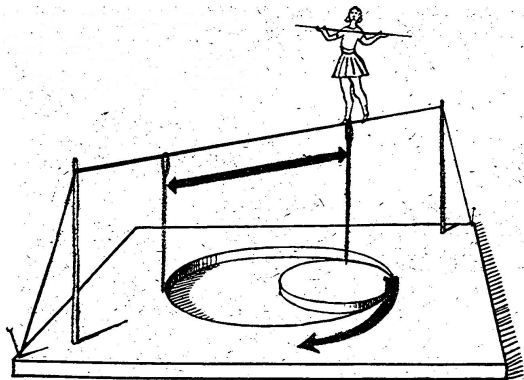
Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím.



## Věta

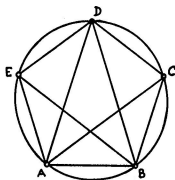
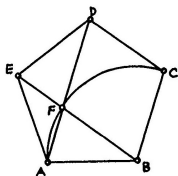
Chordála dvou nesoustředných kružnic je **přímka**, která je kolmá na spojnici jejich středů.<sup>27</sup>

<sup>27</sup>Vyplývá z definice a Pythagorovy věty...



Kotoulením kružnice uvnitř kružnice s dvojnásobným poloměrem se převádí pohyb otáčivý na přímočarý.

Pravidelný = všechny strany a všechny úhly navzájem shodné.



## Postřehy

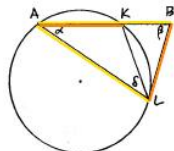
- (1) Souměrnost podle osy jdoucí  $E \implies AD \parallel BC$  a  $BE \parallel CD \implies BCDF$  je kosočtverec.
- (2) Obvodové úhly  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$  atd. jsou všechny shodné  $\implies$  trojúhelník  $ABD$  je rovnoramenný a úhly u základny jsou dvojnásobky úhlu u vrcholu  $D$ , tzv. zlatý trojúhelník.
- (3) Trojúhelníky  $ADE$  a  $EAF$  jsou oba rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu  $A \implies$  jsou podobné.



## Věta

V rovnoramenném trojúhelníku platí:

poměr ramene a základny je **zlatý**  $\iff$  trojúhelník je **zlatý**.



## Důkaz.

Poměr stran je určen poměrem úhlů a naopak. Stačí předp.  $AK =$  delší část zlatého řezu  $AB$ ,  $AL = AB$ ,  $BL = AK$  a ukázat  $\beta = 2\alpha$ :

- ▶  $K =$  zlatý řez a  $AK = BL \implies AB : BL = BL : BK$  neboli  $BA \cdot BK = BL^2$ .
- ▶ Toto je mocnost bodu  $B$  ke kružnici  $AKL \implies BL =$  tečna.
- ▶ Úsekový  $\angle BLK =$  obvodový  $\angle LAK \implies \angle ALB = \alpha + \delta$ .
- ▶  $\triangle ABL$  je rovnoramenný  $\implies \underline{\beta = \alpha + \delta}$ .
- ▶  $\angle LKB$  je vnějším úhlem v  $\triangle AKL \implies \angle LKB = \alpha + \delta$ , což je  $= \beta$ .
- ▶ Odtud plyne, že  $\triangle BLK$  je rovnoramenný  $\implies KL = BL = AK$ .
- ▶ Proto také trojúhelník  $AKL$  je rovnoramenný  $\implies \underline{\alpha = \delta}$ .

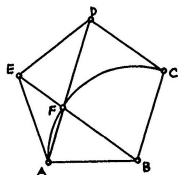
Celkem tedy  $\beta = \alpha + \delta = 2\alpha$ .



Zlatý řez lze v pravidelném 5-úhelníku objevit rovnou:

### Věta

Úhlopříčky pravidelného 5-úhelníku se protínají v poměrech **zlatého řezu**. . .<sup>28</sup>



### Důkaz.

- ▶ Trojúhelníky  $ADE$  a  $EAF$  jsou rovnoramenné a mají společný úhel u vrcholu  $A \implies$  jsou podobné.
- ▶ Odpovídající si strany jsou úměrné  $\implies AD : DE = EA : AF$ .
- ▶ Současně však platí  $DE = EA = DF$ , tedy

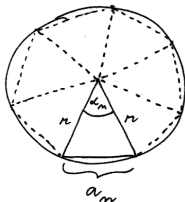
$$AD : DF = DF : FA. \quad \square$$

<sup>28</sup>... jejichž delší části jsou shodné se stranami 5-úhelníku.

Středový úhel v pravidelném  $n$ -úhelníku je  $\alpha_n = 360^\circ/n$ .

Velikost strany pravidelného  $n$ -úhelníku veps. do kružnice s poloměrem  $r$  je (podle kosinové věty)

$$a_n = r \sqrt{2 - 2 \cos \alpha_n}.$$



Pro  $n = 10$  je  $\alpha_{10} = 36^\circ$ , pro  $n = 5$  je  $\alpha_5 = 72^\circ$ .

Ale to jsou právě úhly ve zlatém trojúhelníku!

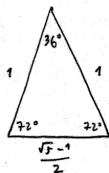
Odtud

$$a_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

a (podle kosinové věty)  $\cos 72^\circ = \frac{a_{10}}{2r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Po dosazení dostáváme

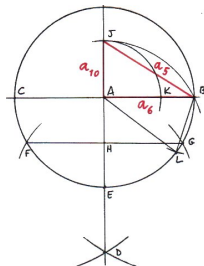
$$a_5 = r \sqrt{2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \dots = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$



Na obr. je konstrukce zlatého řezu úsečky  $AB$  a zlatý trojúhelník  $ABL$ :

### Věta

Strana pravidelného 5-úhelníku vepsaného do kružnice je přeponou **pravouhlého trojúhelníku**, jehož odvěsnami jsou strany pravidelného 6-úhelníku, resp. 10-úhelníku vepsaného do téže kružnice.



### Důkaz.

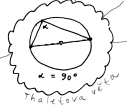
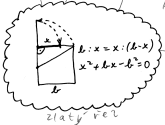
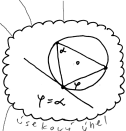
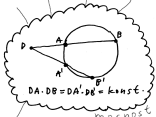
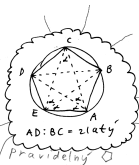
Z předchozího víme, že

$$a_6 = r, \quad a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad a_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku  $ABL$  platí

$$|BL| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \dots = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5. \quad \square$$

2. PATRO



1. PATRO

Pravidelný  $n$ -úhelník umíme sestrojít pro  $n = 3, 4, 5, 6$ .

Půlením úhlů lze sestrojít také např. pro  $n = 8, 10, 12, 16, 20, \dots$

Kombinací předchozího lze sestrojít také např. pro  $n = 15, \dots$

### Věta

*Pokud lze sestrojít pravidelný  $k$ -úhelník a  $l$ -úhelník, potom lze sestrojít také pravidelný  $n$ -úhelník, kde  $n =$  nejmenší společný násobek  $k$  a  $l$ .<sup>29</sup>*

### Důkaz.

Bez újmy můžeme předp.  $k, l$  nesoudělné.

Kombinacemi odp. středových úhlů umíme:

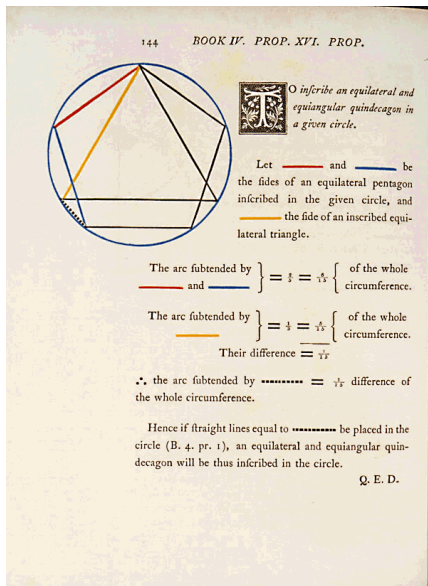
$$\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l}\right) \cdot 360^\circ = \frac{al + bk}{k \cdot l} \cdot 360^\circ.$$

Bezout:  $k, l$  nesoudělné  $\implies al + bk = 1$ , pro nějaká celá čísla  $a, b, \dots$

$\dots$ , tedy umíme středový úhel  $k \cdot l$ -úhelníku.



<sup>29</sup>Pozor: n.s.n. nelze obecně nahradit součinem (viz např.  $3 \cdot 3 = 9$ )!



Z předchozího tušíme, že **ne každý** pravidelný mnohoúhelník je sestrojitelný:

### Věta (Gaussova–Wantzelova)

*Pravidelný  $n$ -úhelník lze sestrojit eukleidovským pravítkem a kružítkem  $\iff$   $n$  je součinem libovolné mocniny 2 a navzájem různých Fermatových prvočísel.*

*Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru  $F_k = 2^{2^k} + 1$ .*

K dnešnímu dni<sup>31</sup> je známo pouze pět Fermatových prvočísel:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537.$$

Tedy:

lze	<b>3</b>	4	<b>5</b>	6	8	10	12	15	16	<b>17</b>	20		
nelze				7	9	11	13	14		18	19	21	22

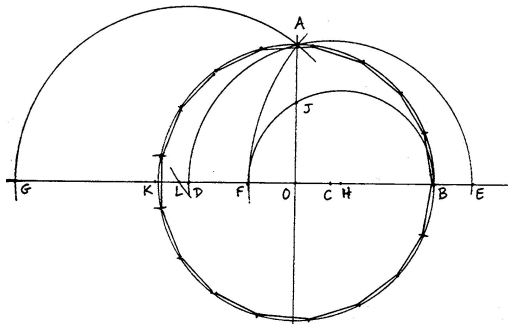
<sup>31</sup> 13. května 2023, viz [https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number)



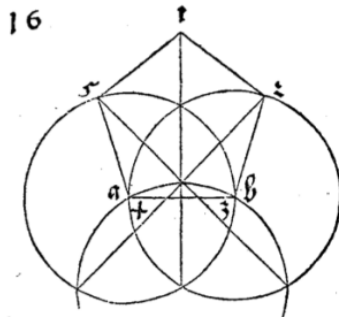
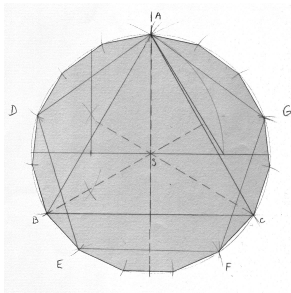
Délku strany pravidelného 17-úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem  $r$  lze vyjádřit jako

$$a_{17} = \frac{r}{4} \sqrt{34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} + \sqrt{170 - 26\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Gaussova konstrukce pravidelného 17-úhelníku vypadá takto<sup>32</sup>



<sup>32</sup>30. března 1796, viz <https://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon>



Konečně umíme rozeznat přesné konstrukce od přibližných...

Teorie podobnosti (kniha VI) je založena na pojmu úměrnosti, tedy rovnosti poměrů veličin (kniha V):

### Definice

Veličiny  $a, b$  jsou *ve stejném poměru* jako veličiny  $c, d$ ,

$$a : b = c : d,$$

pokud pro každá čísla  $m, n$  platí

$$na \geq mb \iff nc \geq md.$$

### Poznámky pro moderního čtenáře

Veličiny  $a, b, c, d$  jsou reálná čísla, čísla  $m, n$  jsou čísla celá.

Předchozí definici můžeme vyslovit taky takto:<sup>33</sup>

Reálná čísla  $r (= \frac{a}{b})$  a  $s (= \frac{c}{d})$  jsou si rovna, pokud pro každé racionální číslo  $q (= \frac{m}{n})$  platí

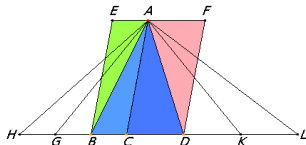
$$r \geq q \iff s \geq q.$$

---

<sup>33</sup>Tady by se nám měla vybavovat konstrukce reálných čísel z racionálních pomocí tzv. Dedekindových řezů...

## Věta

Poměr obsahů trojúhelníků (resp. rovnoběžníků) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základů.



$$\text{obsah } ACB : \text{obsah } ACD = CB : CD$$

## Důkaz.

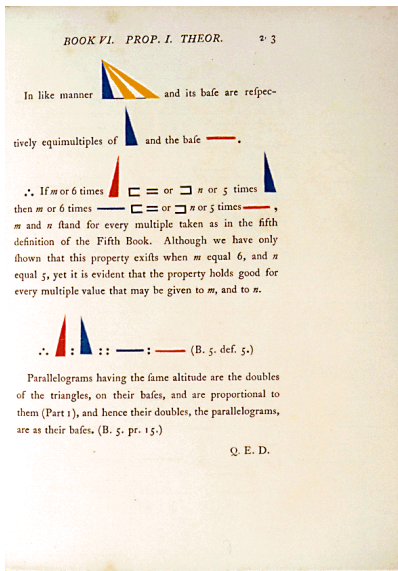
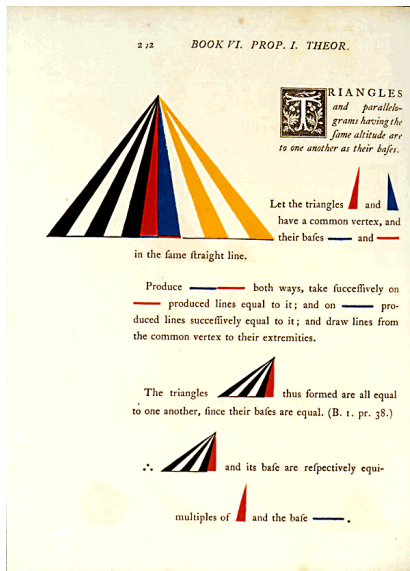
Plyne přímo ze základní věty o rovnosti obsahů trojúhelníků (s. 17) a z definice rovnosti poměrů (s. 51)... □

## Poznámka

Odtud máme vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku:

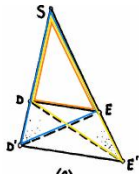
$$S = \frac{1}{2} a \cdot v,$$

kde  $S$  = obsah trojúhelníku,  $a$  = velikost strany,  $v$  = velikost výšky na stranu  $a$ .



## Věta

Přímka je rovnoběžná s jednou stranou trojúhelníku  $\iff$  protíná zbylé dvě strany úměrně.



$$SD' : SD = SE' : SE \iff D'E' \parallel DE$$

## Důkaz.

Podle předchozí věty víme, že

$$SD' : SD = \text{obsah } SD'E : \text{obsah } SDE,$$

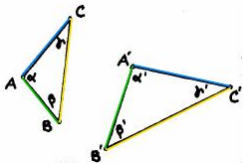
$$SE' : SE = \text{obsah } SE'D : \text{obsah } SED.$$

Jmenovatelé na pravé straně jsou titíž a trojúhelníky  $SD'E$  a  $SE'D$  mají společný průnik  $SDE$ . Tedy (s. 17):

$$SD' : SD = SE' : SE \iff \text{obsah } DD'E = \text{obsah } EE'D \iff D'E' \parallel DE.$$

## Definice

Trojúhelníky (obecněji, mnohoúhelníky) jsou *podobné*, pokud mají po dvou shodné vnitřní úhly a strany u shodných úhlů mají úměrné.



Tedy: trojúhelníky jsou podobné, pokud (při obvyklém značení)

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma',$$

$$b : c = b' : c', \quad c : a = c' : a', \quad a : b = a' : b'.$$

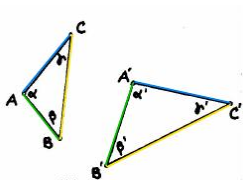
Druhou sadu rovností obvykle přepisujeme takto

$$a' : a = b' : b = c' : c = \textit{koeficient podobnosti}.$$

Vlastnosti v definici podobných trojúhelníků (s. 55) jsou ekvivalentní:

## Věta

Trojúhelníky mají po dvou shodné vnitřní úhly  $\iff$  strany u shodných úhlů jsou úměrné.



$$\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma' \iff b : c = b' : c', c : a = c' : a', a : b = a' : b'.$$

## Důkaz.

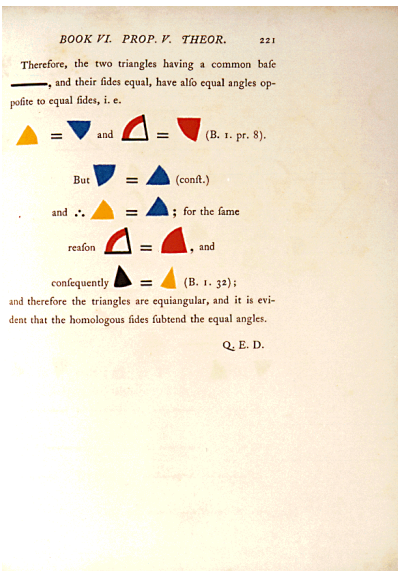
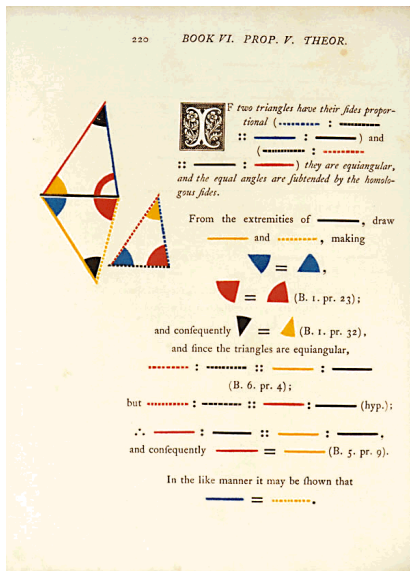
Implikace  $\implies$  je důsledkem předchozí věty (s. 54)...

Pro implikaci  $\impliedby$  uvažme pomocný trojúhelník  $ABD$ , který má shodné vnitřní úhly s trojúhelníkem  $A'B'C'$ :

- ▶ strany u shodných úhlů jsou úměrné a současně trojúhelníky  $ABD$  a  $ABC$  mají společnou stranu,
- ▶ tedy trojúhelníky  $ABD$  a  $ABC$  jsou shodné.....



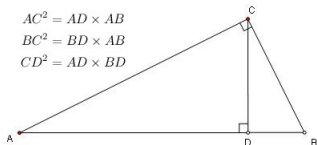




Implikaci „ $\implies$ “ v předchozí větě se přezdívá věta UU.

Mnoho předchozích úvah lze nahradit úspornějším argumentem s podobnými trojúhelníky, viz např.:

- ▶ Věta o mocnosti bodu ke kružnici (s. 37).
- ▶ Věta o zlatém řezu v pravidelném pětiúhelníku (s. 42).
- ▶ Eukleidova věta o odvěsně/výšce (s. 16):



### Důkaz.

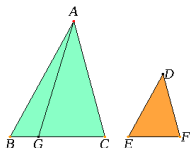
Trojúhelníky  $ADC$  a  $ACB$  mají po dvou shodné vnitřní úhly  $\implies$  jsou podobné

$$\implies AC : AD = AB : AC \implies AC^2 = AB \cdot AD.$$

Ostatní vztahy lze zdůvodnit podobně... □

## Věta

Poměr obsahů podobných trojúhelníků (mnohoúhelníků) je stejný jako poměr druhých mocnin odpovídajících stran.



Je-li koeficient podobnosti =  $k$ , potom poměr obsahů =  $k^2$ .

## Poznámky k důkazu

Snadné pro  $k \in \mathbb{Z}$ , resp.  $k \in \mathbb{Q}$ . (dělení na menší navzájem shodné trojúhelníčky)

Problematické pro  $k \in \mathbb{R}$  — možné přístupy:

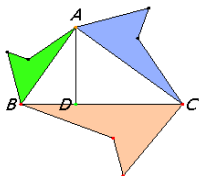
- ▶ limitní přechod, (libovolně jemné dělení)
- ▶ vzoreček, (viz s. 52)
- ▶ “elementární” trik.<sup>36</sup>

(pomocný bod  $G \in BC$  takový, že  $EF : BG = \dots = k : 1$ ; úpravy a předchozí základní tvrzení  $\leadsto$  obsah  $ABC$  : obsah  $DEF$  = obsah  $ABC$  : obsah  $ABG$  =  $k^2 : 1$ )

<sup>36</sup><https://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/book6/images/bookVI-prop19.html>

### Věta

*Pokud jsou mnohoúhelníky nad stranami pravoúhlého trojúhelníku podobné, potom obsah mnohoúhelníku nad přeponou je roven součtu obsahů těch nad odvěsnami.*



### Důkaz.

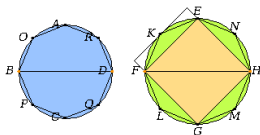
Plyne z předchozího tvrzení (s. 59) a z Pythagorovy věty (s. 16)...



U křivočarých útvarů se infinitezimálním úvahám nevyhneme...<sup>37</sup>

### Věta

*Poměr obsahů kruhů je stejný jako poměr druhých mocnin jejich průměrů.*



### Idea důkazu.

Každý kruh lze libovolně přesně aproximovat mnohoúhelníky.

Každé dva kruhy jsou podobné a pokud jsou aproximovány analogicky, jsou odpovídající mnohoúhelníky taky podobné.

Poměrům obsahů takových mnohoúhelníků rozumíme (s. 59)... □

### Poznámka

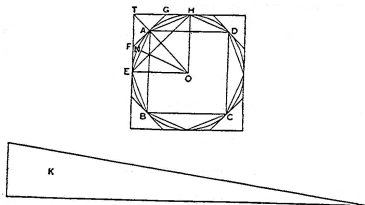
Při obvyklém značení můžeme předchozí tvrzení psát jako

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \quad \text{neboli} \quad S_1 : r_1^2 = S_2 : r_2^2 = \text{konst.}$$

<sup>37</sup>... v klasickém pojetí pomocí tzv. Eudoxovy metody.

### Věta (Archimédova)

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je shodná s poloměrem, druhá s obvodem kruhu.



### Poznámky

Jinými slovy:  $S = \frac{1}{2}r \cdot o$ , kde  $r$  = poloměr kružnice a  $o$  = její obvod.  
To spolu s rovností na s. 61 dává

$$S = \frac{1}{2}r \cdot o = \text{konst} \cdot r^2.$$

Tzn. stejná konstanta vystupuje ve vyjádření jak obsahu, tak obvodu!  
Při tradičním značení:

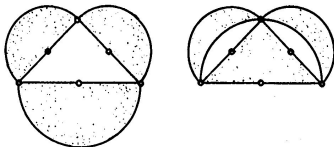
$$S = \pi \cdot r^2 \quad \text{a} \quad o = 2\pi \cdot r.$$

<sup>38</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Area\\_of\\_a\\_circle#Archimedes's\\_proof](https://en.wikipedia.org/wiki/Area_of_a_circle#Archimedes's_proof)

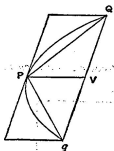
Libovolný mnohoúhelník kvadraturovat umíme (s. 19), kruh neumíme (s. 28).

Některé křivočaré útvary však kvadraturovat lze:

- ▶ Hippokratés: Vyznačené půlměsíce nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku mají stejný obsah jako tento trojúhelník.<sup>39</sup>



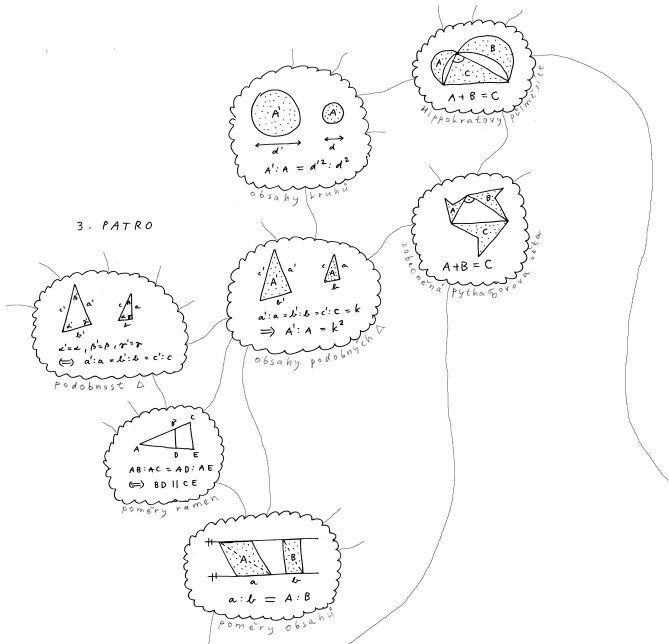
- ▶ Archimédés: Obsah parabolické úseče je roven  $\frac{4}{3}$  obsahu trojúhelníku  $PQq$  (což jsou  $\frac{2}{3}$  obsahu opsaného rovnoběžníku).<sup>40</sup>



<sup>39</sup> plyne snadno z tvrzení na s. 61, 60 a 33...

<sup>40</sup> plyne z vlastností paraboly a součtu jisté geometrické řady...

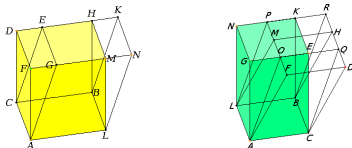
3. PATRO



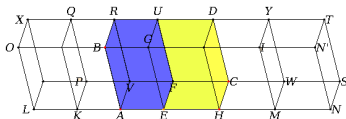


K tvrzením o rovnoběžnících (s. 15, s. 52, s. 59) máme tyto 3D **analogie**:

- ▶ Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.



- ▶ Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.

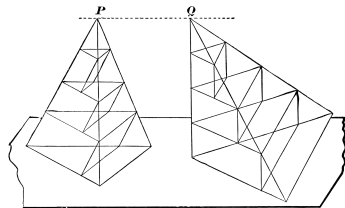


- ▶ Poměr objemů podobných rovnoběžnostěnů je stejný jako poměr třetích mocnin odpovídajících stran.

K tvrzením o trojúhelnících uvádíme na ukázkou jednu 3D analogii s naprosto **neanalogickým** důkazem:

### Věta

Poměr objemů jehlanů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základů.



### Idea důkazu.

Každý jehlan lze libovolně přesně aproximovat konečným počtem hranolů. Např. můžeme v obou jehlanech použít hranoly se stejnými výškami. Poměrům objemů takových hranolů rozumíme (s. 65)... □

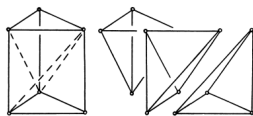
Limitní verze předchozí úvahy je známá jako tzv. *Cavalieriho princip*.<sup>41</sup>

Z uvedeného např. vyvozujeme, že objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu hranolu se stejnou základnou a stejnou výškou:

Teprve odtud máme vzorečky

$$V = \frac{1}{3} S \cdot v,$$

kde  $V$  = objem jehlanu,  $S$  = obsah podstavy a  $v$  = velikost odpovídající výšky.



### Pozor

Ani v případě jehlanů se stejnými základnami a stejnými výškami (tedy se stejnými objemy) nelze úvahy v předchozím důkazu nahradit stříháním a přeskupováním částí jako u rovnoběžnostěnů, resp. hranolů!<sup>42</sup>

Tzn. 3D analogie Wallaceovy–Bolyaiovy–Gerwienovy věty (s. 19) obecně **neplatí**.

<sup>41</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s\\_principle](http://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle)

<sup>42</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s\\_third\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem)

S podobnými úvahami jako na s. 66 (s odkazy na předchozí poznatky o rovnoběžnostěnech a hranolech) se zdůvodní, že

- ▶ *Poměr objemů válců se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich podstav,*
- ▶ *poměr objemů koulí je stejný jako poměr třetích mocnin jejich průměrů,*
- ▶ *objem kužele je roven  $\frac{1}{3}$  objemu jemu opsaného válce,*
- ▶ *apod.*

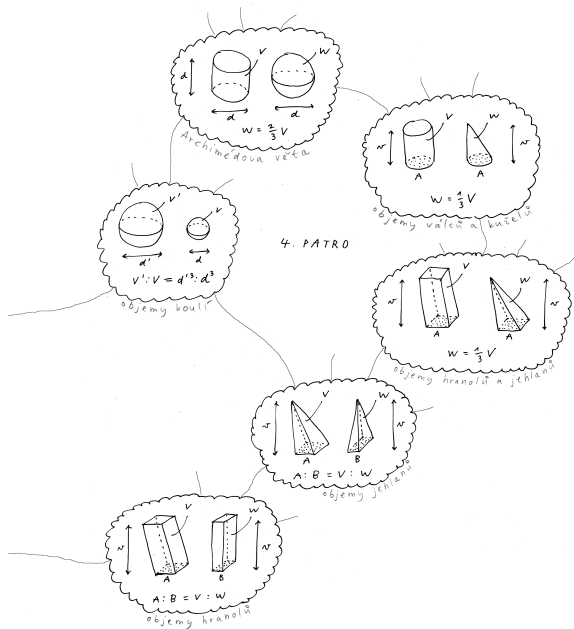
Tyto poznatky doplňuje pozoruhodná

### Věta (Archimédova)

*Objem koule je roven  $\frac{2}{3}$  objemu jemu opsaného válce.*<sup>43</sup>

---

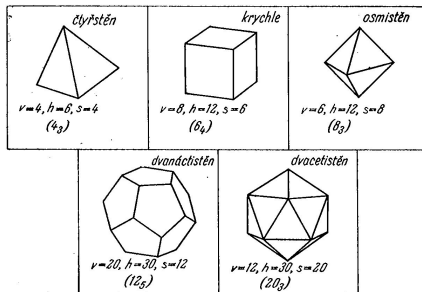
<sup>43</sup>viz např. opět [https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv\\_princip](https://cs.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%C5%AFv_princip)



- = pravidelné konvexní mnohostěny
- = konvexní mnohostěny, které mají stejný počet stěn kolem každého vrcholu a jejichž stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky<sup>44</sup>









## Věta

Platónských těles je právě pět druhů:



<sup>44</sup>  $\implies$  mají všechny stěnové úhly shodné, lze je vepsat do koule atd.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)

- (1) Platónských těles není víc než pět druhů:  
součet úhlů kolem každého vrcholu musí být ostře menší než plný úhel:

			
{3,3} Defect 180°	{3,4} Defect 120°	{3,5} Defect 60°	{3,6} Defect 0°
			
{4,3} Defect 90°	{4,4} Defect 0°	{5,3} Defect 36°	{6,3} Defect 0°
<p>A vertex needs at least 3 faces, and an <b>angle defect</b>.            A 0° angle defect will fill the Euclidean plane with a regular tiling.            By <b>Descartes' theorem</b>, the number of vertices is <math>720^\circ/\text{defect}</math>.</p>			

- (2) Platónských těles je právě pět druhů:  
pro každou z pěti možností je třeba „složit“ odpovídající těleso:
- ▶ čtyřstěn {3, 3}, krychle {4, 3}, osmistěn {3, 4} jsou snadné,
  - ▶ pro rozbor dvacetistěnu {3, 5} a dvanáctistěnu {5, 3} budeme potřebovat větu o pravidelném 5-, 6- a 10-úhelníku vepsaném do téže kružnice (s. 44)...

Bubínek:

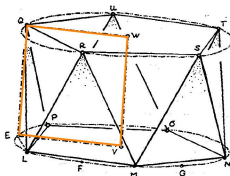
$QL = QR =$  strana vepsaného 5-úhelníku,

$LE =$  strana vepsaného 10-úhelníku,

$LEQ =$  pravoúhlý trojúhelník.

Proto podle s. 44:

- ▶  $EQ =$  strana vepsaného 6-úhelníku = poloměr kružnice.



$EQ = VE$ , tedy  $EVWQ$  je čtverec.



Čepičky:

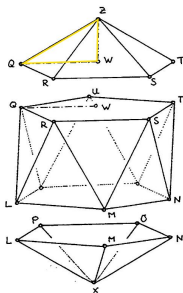
$QWZ$  = pravouhlý trojúhelník,

$QZ = QR$  = strana vepsaného 5-úhelníku,

$QW$  = strana vepsaného 6-úhelníku.

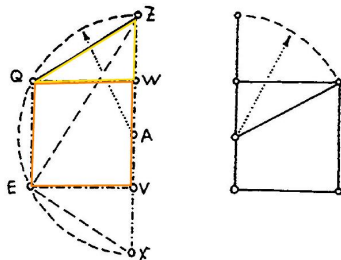
Proto podle s. 44:

- ▶  $WZ$  = strana vepsaného 10-úhelníku = delší část zlatého řezu poloměru kružnice.



$WZ$  = delší část zlatého řezu úsečky  $WQ$ .

Pravidelný dvacetistěn je vepsán do koule...



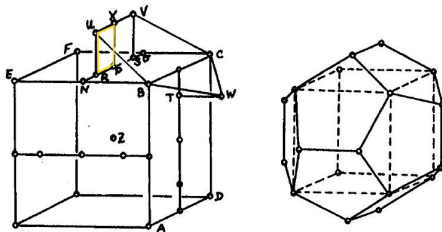
Řez dvacetistěnu a řez zlatý.<sup>45</sup>

<sup>45</sup>viz konstrukci na s. 23

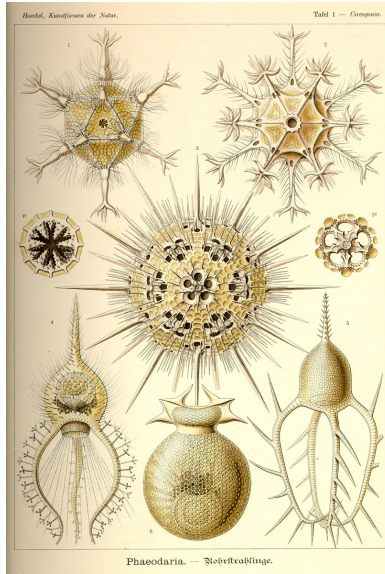
Nad každou stěnou krychle uvažme vrcholy  $U, V, W$  podle obr. . .

. . . a postupně se zdůvodní, že:

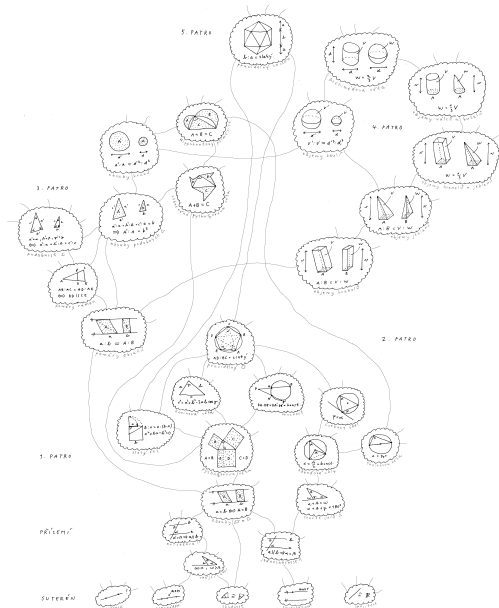
- ▶ body  $UBCWV$  leží v jedné rovině,
- ▶ pětiúhelník  $UBCWV$  je pravidelný,
- ▶ vzdálenost středu krychle je od všech vrcholů stejná.



$RU = RP =$  delší část zlatého řezu úsečky  $PN$ .



*Circogonia icosahedra* je vlevo nahoře.

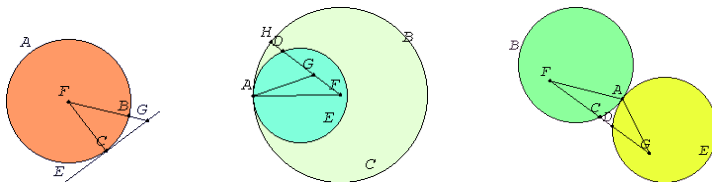


Základy	4
Dotykové úlohy	78
Úvod	79
Základní úlohy	81
Zobecnění	85
Obecná Apollóniova úloha	87
Geometrická zobrazení	91
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

= úlohy s body, přímkami, kružnicemi a jejich dotykem.

### Definice

Přímka a kružnice, resp. dvě kružnice se *dotýkají*, pokud mají právě jeden společný bod.



### Věta

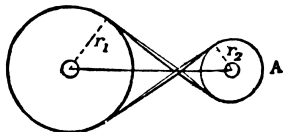
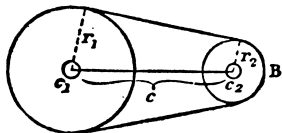
*Přímka se dotýká kružnice v bodě C  $\iff$  je kolmá k průměru FC.*

*Kružnice se dotýkají v bodě A  $\iff$  spojnice jejich středů prochází bodem A.<sup>47</sup>*

<sup>47</sup>Důkazy zpravidla nepřímo, viz např.

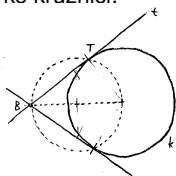
Často je výhodné (občas nutné) rozlišovat orientace:

- ▶ *cyklus* = orientovaná kružnice,
- ▶ *paprsek* = orientovaná přímka,
- ▶ *orientovaný dotyk* = dotyk ve shodě s orientacemi.

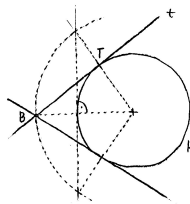




Tečna z bodu ke kružnici:

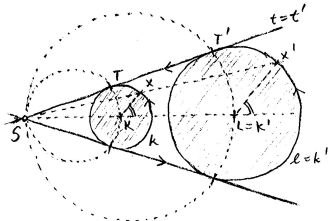


(a) pomocí Thaletovy kružnice

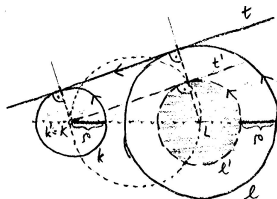


(b) pomocí **souměrnosti**

Společné tečny ke dvěma kružnicím:



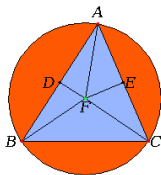
(a) pomocí **stejnolehlosti**



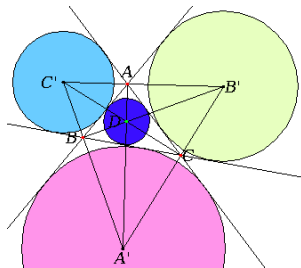
(b) pomocí **dilatace**<sup>48</sup>

<sup>48</sup>...redukováno na předchozí případ.

Kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná mezi tři přímky:

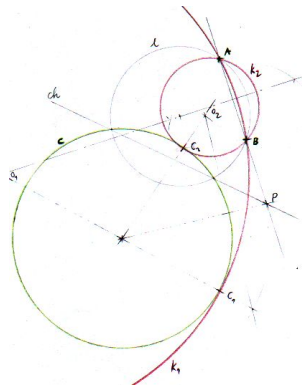
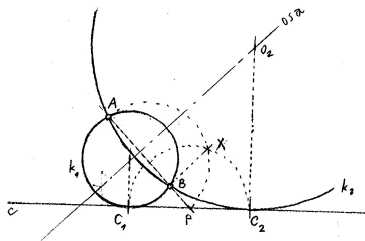


pomocí os úseček,



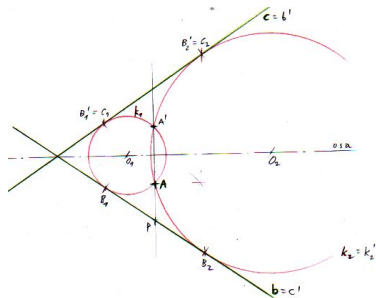
os úhlů

Kružnice procházející dvěma body a dotýkající se přímky, resp. kružnice:

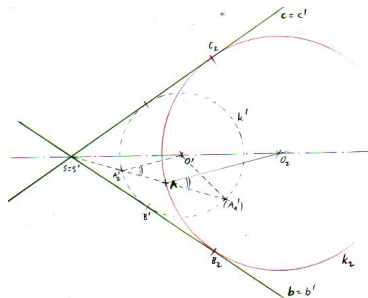


např. pomocí mocnosti

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou přímek:



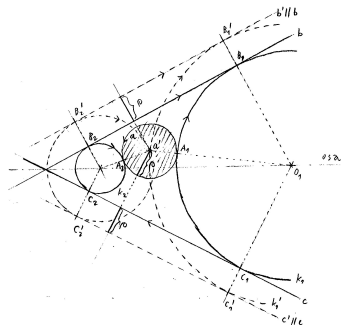
(a) pomocí **souměrnosti**<sup>49</sup>



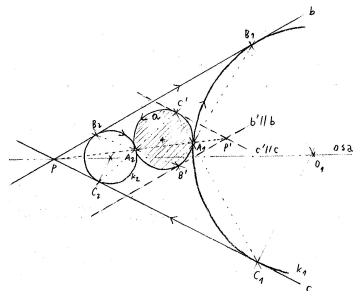
(b) pomocí **stejnolehlosti**

<sup>49</sup>... redukováno na předchozí případ (s. 83).

Kružnice dotýkající se kružnice a dvou přímk:



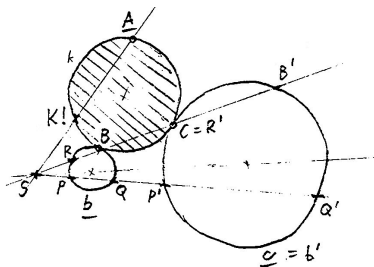
(a) pomocí **dilatace**<sup>50</sup>



(b) pomocí **stejnolehlosti**

<sup>50</sup>... redukováno na předchozí případ (s. 84).

Kružnice procházející bodem a dotýkající se dvou kružnic:



Pomocí **stejnolehlosti** a mocnosti lze ukázat, že platí

$$SK \cdot SA = SP \cdot SQ'.$$

Tím je bod  $K$  jednoznačně určen, umíme jej sestavit, ... <sup>51</sup>

---

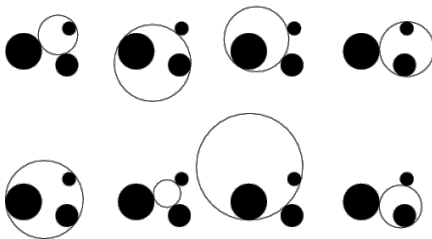
<sup>51</sup>... a tím redukováno na předchozí případ (s. 83).

= dotyková úloha se třemi danými kružnicemi.

Všechny předchozí úlohy (a mnoho dalších) chápeme jako mezní případy:

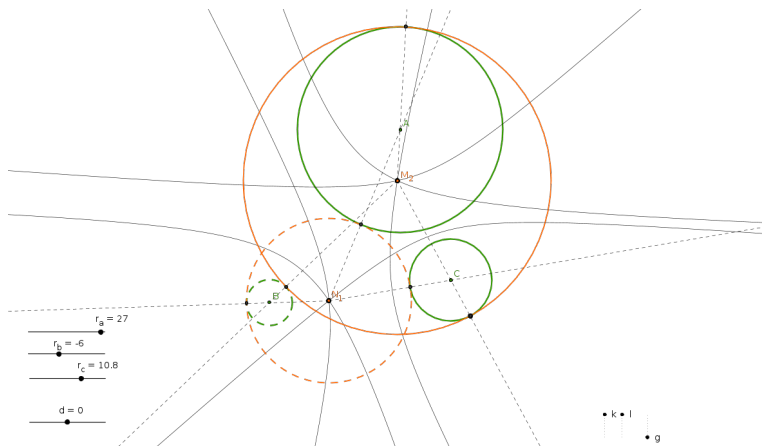
$$\lim_{r \rightarrow 0}(\text{kružnice}) = \text{bod}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty}(\text{kružnice}) = \text{přímka}.$$

Obecná (neorientovaná) úloha má až 8 řešení; se zvolenými orientacemi dostáváme řešení po dvojicích:



Zajímavá historie, mnoho rozličných řešení a řada aplikací. . . <sup>52</sup>

Viz např. van Roomenovo řešení, Newtonovu reformulaci a problém *trilaterace* . . .



Středů všech cyklů, které se dotýkají dvou daných cyklů, tvoří kuželosečku.

<sup>52</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Problem\\_of\\_Apollonius](http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius)



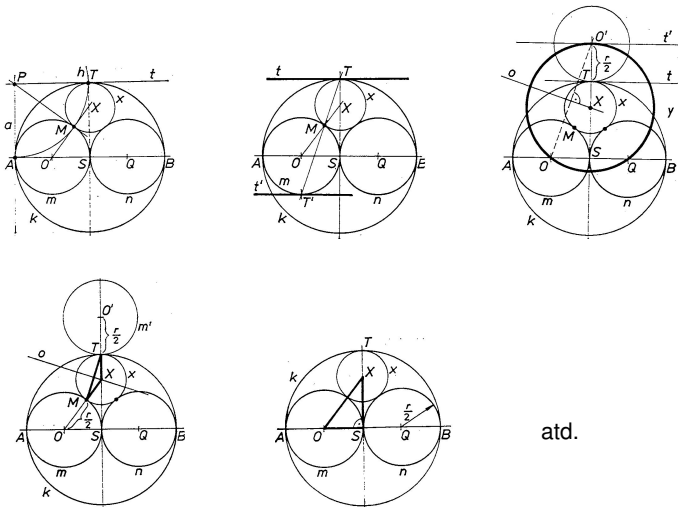
Z předchozích ukázek je patrné, že budeme protěžovat užití geometrických **transformací** k zjednodušení problému:

- ▶ souměrnosti,
- ▶ stejnolehlost,
- ▶ dilatace,
- ▶ kruhová inverze,
- ▶ apod.

Podrobnosti k jednotlivým transformacím od s. [92](#)...

Ukázka typického použití na s. [103](#)...

Specifická zadání nabízejí mnohá (a specifická) řešení:<sup>53</sup>

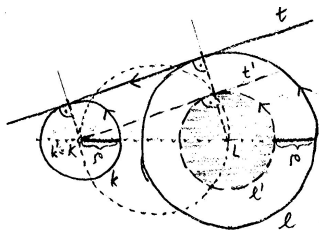


atd.

<sup>53</sup>např. pomocí mocnosti, stejnolehlosti, dilatace, souměrnosti, výpočtu, kruhové inverze

Základy	4
Dotykové úlohy	78
Geometrická zobrazení	91
Dilatace a kontaktní zobrazení	92
Kruhová inverze a konformní zobrazení	94
Souměrnosti a shodná zobrazení	110
Stejnolehlost a podobná zobrazení	115
Osová afinita a afinní zobrazení	123
Poslední zobecnění a projektivní rozšíření	132
Osová kolineace a projektivní zobrazení	144
Shrnutí a přehledy	153
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

Dilataci jsme poprvé potkali při konstrukci společných tečen ke dvěma kružnicím (s. 81):



Popis dilatace jakožto geometrického zobrazení je ošidný:

- ▶ nemá smysl mluvit o obrazu bodu jako takovém (bez kontextu),<sup>54</sup>
- ▶ měli jsme vždy bod na orientované kružnici, resp. přímce,
- ▶ není podstatná ona kružnice, resp. přímka, ale **orientovaný dotyk**,
- ▶ orientovaný dotyk nejnáze znázorníme tečným (vázaným) vektorem. . .

<sup>54</sup>Na rozdíl od všech ostatních zobrazení v tomto kurzu!

*Co to je?* Orientované kontaktní zobrazení v rovině.

*Čím je určena?* Nenulovým reálným číslem  $\rho$ .

*Jak je určena?* Obraz lib. orient. dotyk. elementu zastoupeného vektorem  $\mathbf{v}$  je reprezentován vektorem  $\mathbf{v}'$ , který je posunut o vzdálenost  $\rho$  kolmo k  $\mathbf{v}$ , a to na správnou stranu v závislosti na orientaci. . .



*Jaké má vlastnosti?* Orientované kontaktní zobrazení!

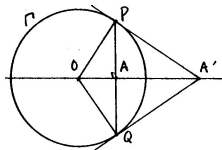
*K čemu to je dobré?* Zachovává orientovaný dotyk křivek (viz s. 81, 85, 104, . . . )!

*Co to je?* Transformace roviny vyjma jednoho bodu, ozn.  $O$ .<sup>55</sup>

*Čím je určena?* Kružnicí se středem  $O$  a poloměrem  $r$ .<sup>56</sup>

*Jak je určena?* Obraz  $A'$  lib. bodu  $A \neq O$  leží na polopřímce  $OA$ , a to tak, že

$$|OA| \cdot |OA'| = r^2 \quad \text{neboli} \quad |OA'| = \frac{r^2}{|OA|}.$$



*Jaké má vlastnosti?* Involutivní transformace s kružnicí pevných bodů,  
základní konformní transformace v rovině, nepřímá, ...

<sup>55</sup>tzv. střed kruhové inverze

<sup>56</sup>tzv. řídicí kružnice

Zřejm:

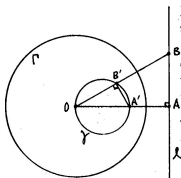
- (a) Kruhov inverze je involutivní transformace.
- (b) Všechny body na řídící kružnici jsou pevn.
- (c) Všechno, co je vně řídící kružnice, se zobrazuje dovnitř, a naopak.
- (d) Každ přímka procházející středem inverze je pevn; přitom jedin pevn body jsou průsečíky s řídící kružnicí a

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X' = O, \quad \text{resp.} \quad \lim_{X \rightarrow O} X' = \infty.$$

Nezřejm:

- (e) Kružnice procházející středem  $O$  se zobrazuje na přímku (neprocházející středem  $O$ ), a naopak.
- (f) Kružnice kolm ke  $\Gamma$  se zobrazuje sama na sebe.  
Naopak, každ kružnice procházející dvojit inverzních bodů je kolm ke  $\Gamma$ .
- (g) Obecn kružnice neprocházející středem  $O$  se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející  $O$ .
- (h) Kruhov inverze je konformní, tzn. úhlojevn zobrazení.

- (e) Kružnice procházející středem  $O$  se zobrazuje na přímku (neprocházející středem  $O$ ), a naopak.



### Důkaz.

Předp. extrémní dvojici  $A \mapsto A'$ , kde  $OA \perp \ell$  a  $OA' =$  průměr  $\gamma$ .

Ozn.  $B \in \ell$  a  $B' \in \gamma$  průsečíky s lib. přímkou jdoucí  $O$ .

Dokážeme, že  $B$  a  $B'$  jsou inverzního vzhledem ke  $\Gamma$ :

- ▶ Thaletova věta  $\implies$  úhel  $OB'A'$  je pravý  $\implies$  trojúhelníky  $OAB$  a  $OA'B'$  jsou podobné  $\implies$

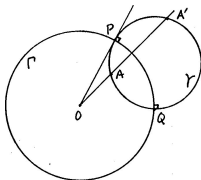
$$OB' : OA = OA' : OB \quad \text{neboli} \quad OB' \cdot OB = OA' \cdot OA.$$

- ▶ Body  $A$  a  $A'$  jsou inverzní vzhledem ke  $\Gamma$ , takže  $B$  a  $B'$  taky:

$$OB' \cdot OB = OA' \cdot OA = r^2. \quad \square$$



- (f) Kružnice kolmá ke  $\Gamma$  se zobrazuje sama na sebe.  
 Naopak, každá kružnice procházející dvojicí inverzních bodů je kolmá ke  $\Gamma$ .



### Důkaz.

Kružnice  $\gamma$  protíná řídicí kružnici  $\Gamma$  kolmo<sup>57</sup>

$\iff$  poloměr  $OP$  je tečnou ke kružnici  $\gamma$

$\iff$  pro libovolnou sečnu jdoucí bodem  $O$  platí<sup>58</sup>

$$OA \cdot OA' = OP^2 = r^2$$

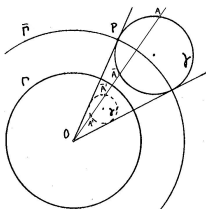
$\iff$  body  $A$  a  $A'$  jsou inverzní vzhledem ke  $\Gamma$ .

□

<sup>57</sup> tzn. tečny ve společném bodě  $P$  jsou kolmé

<sup>58</sup> podle věty o mocnosti bodu ke kružnici (s. 37)

- (g) Obecná kružnice neprocházející středem  $O$  se zobrazuje do jiné kružnice neprocházející  $O$ .



### Důkaz.

Uvažme kružnici  $\bar{\Gamma}$ , která je soustředná s  $\Gamma$  a protíná kružnici  $\gamma$  kolmo. Ukážeme, že složení kruhových inverzí  $\bar{\Gamma}$  a  $\Gamma$  je stejnolehlost.<sup>59</sup>

- Ozn.  $A \mapsto A'$  kruhovou inverzi vzhledem ke  $\Gamma$  a  $A \mapsto \bar{A}$  kruhovou inverzi vzhledem ke  $\bar{\Gamma}$ , tedy

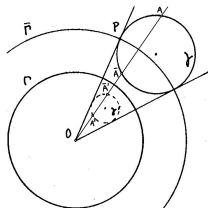
$$OA \cdot OA' = r^2 \quad \text{a} \quad O\bar{A} \cdot OA' = \bar{r}^2.$$

- Odtud po úpravě

$$O\bar{A}' : OA = r^2 : \bar{r}^2 = \mathbf{konst.} \quad \text{neboli} \quad O\bar{A}' = \mathbf{konst} \cdot OA. \quad \square$$

<sup>59</sup>... zbytek je jasný: z předchozího (s. 97) a vlastností stejnohlosti (s. 118) plyne, že obrazem  $\gamma$  vzhledem ke  $\Gamma$  je kružnice.

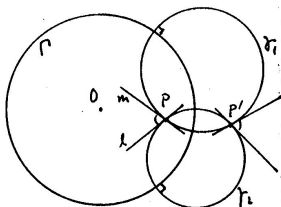
Při stejnolehlosti  $\Gamma \circ \bar{\Gamma} : A \mapsto \bar{A}'$  se střed  $\gamma$  zobrazuje na střed  $\gamma'$ .



Při kruhové inverzi  $\Gamma : A \mapsto A'$  se střed  $\gamma$  **nezobrazuje** na střed  $\gamma'$ !

(Viz též obraz středu  $\gamma$  vzhledem ke kruhové inverzi  $\bar{\Gamma} \dots$ )

(h) Kruhová inverze je konformní zobrazení.<sup>60</sup>



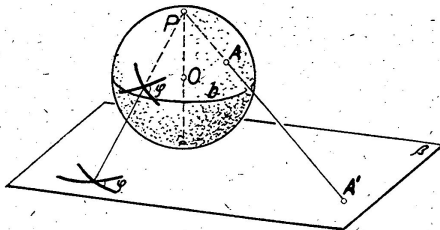
### Důkaz.

- ▶ Odchylka dvou křivek v jejich společném bodě  $P$  = odchylka jejich tečen  $m$  a  $\ell$ .
- ▶ Místo dvou obecných křivek můžeme uvažovat lib. dvě kružnice, které prochází bodem  $P$  a mají přímky  $m$  a  $\ell$  jako tečny.
- ▶ Místo obecných dvou kružnic můžeme uvažovat kružnice  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ , které jsou kolmé k řídicí kružnici  $\Gamma$ !
- ▶ Avšak kružnice  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  se zobrazují samy do sebe (s. 97), obrazem bodu  $P$  je druhý společný bod  $P'$  kružnic a odchylka v bodě  $P$  je stejná jako odchylka v bodě  $P'$ . □

<sup>60</sup>... úhlojevné, tzn. zachovává odchylky protínajících se křivek.

Každé podobné zobrazení je konformní.

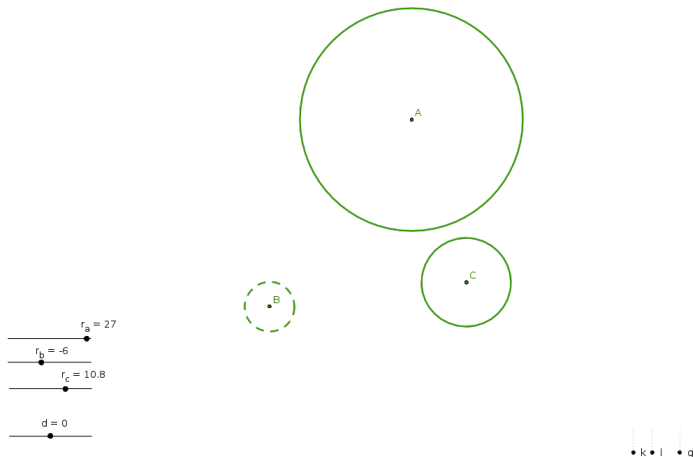
Dalším známým **nepodobným** konformním zobrazením je např. stereografická projekce (sféry bez jednoho bodu do roviny):



Kruhovou inverzi lze vyjádřit pomocí stereografické projekce a souměrnosti sféry podle roviny rovníku. . .

Kruhová inverze a obecná konformní zobrazení:

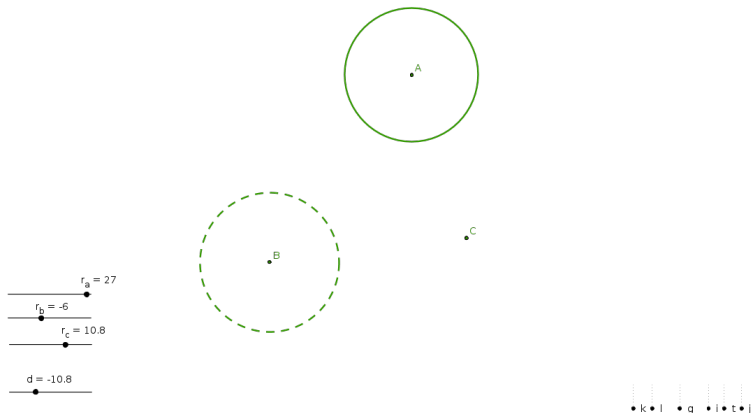
- ▶ **nezachovávají** vzdálenosti ani poměry vzdáleností,
  - ▶ **nezobrazují** přímky na přímky,
  - ▶ **nezachovávají** obsahy, resp. objemy,
- 
- ▶ ale zachovávají odchylky protínajících se křivek,
  - ▶ jsou prostá (injektivní).

Orientovaná Apollóniova úloha.<sup>61</sup>

Sestrojít cykly, které se dotýkají tří daných cyklů.

<sup>61</sup><http://ggbtu.be/mrFsNSnbN>

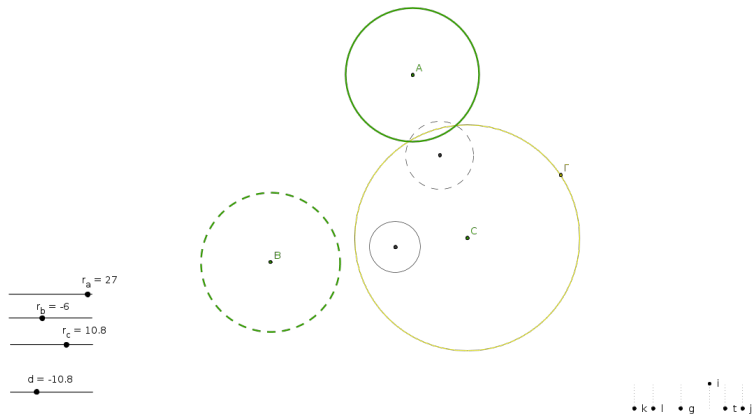
(1) vhodná **dilatace**:



... tím je úloha redukována na případ s bodem místo kružnice, ...

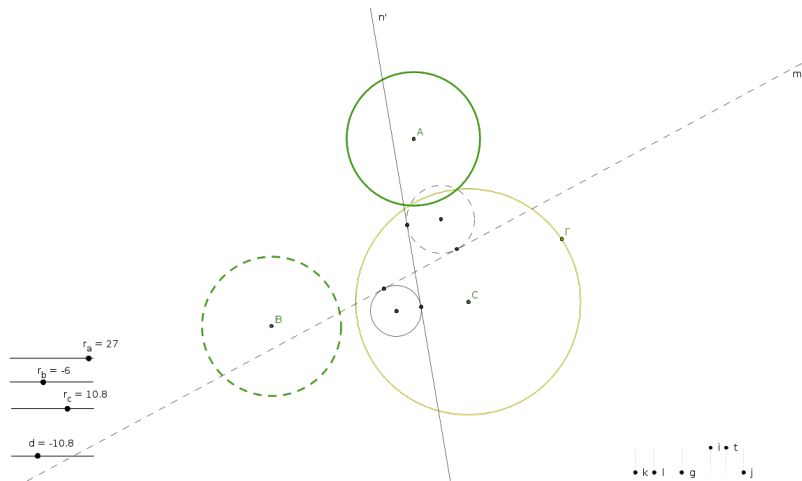


(2) vhodná **kruhová inverze**:



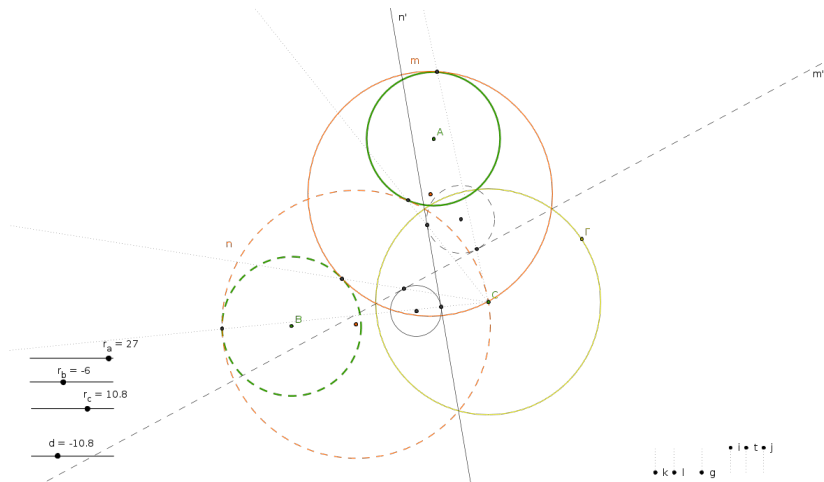
... kružnice procházející bodem C se zobrazují do přímek (s. 96), ...

(3) společné tečny dvou kružnic:



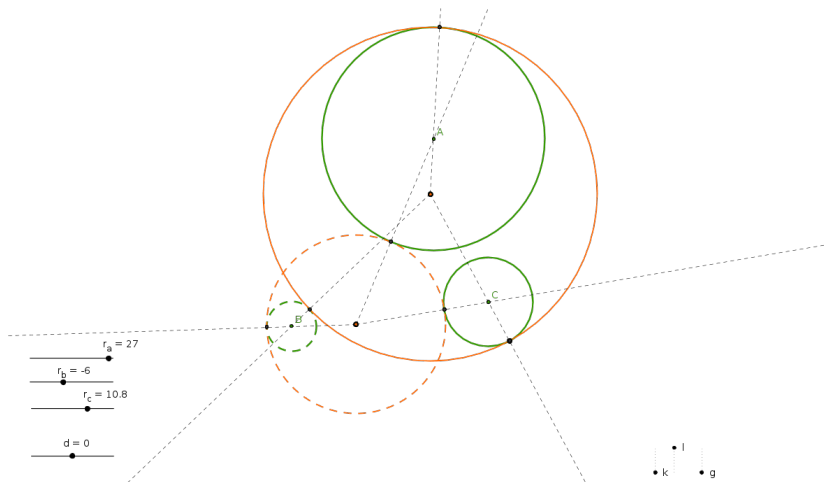
... což je jedna ze základních úloh (s. 81), ...

(4) kruhová inverze zpět:



... což je snadné, ...

(5) dilatace zpět:



... což je taky snadné.



projektivní



afinní



podobná



shodná



ekviafinní

*Co to je?* Transformace eukleidovské roviny.

*Čím je určena?* Přímkou  $o$ .<sup>62</sup>

*Jak je určena?* Obraz  $X'$  lib. bodu  $X$  leží na kolmici k ose, a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_o} = -\overrightarrow{XX_o},$$

kde  $X_o$  = průsečík  $XX'$  s osou  $o$ .



*Jaké má vlastnosti?* Involutivní transformace s přímkou pevných bodů,  
základní shodnost v rovině, nepřímá transformace, ...

---

<sup>62</sup>tzv. osa

## Definice

*Shodné zobrazení*

(a) zachovává vzdálenosti,

tztn. pro libovolné body  $A, B$  a jejich obrazy  $A', B'$  platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

## Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímk,

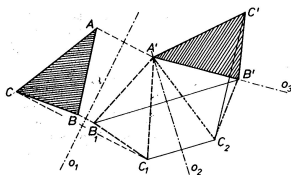
(d) zachovává obsahy, resp. objemy,

(e) je prosté (injektivní).

Shodnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

### Věta

*Každá shodnost v rovině je složením nejvýše tří osových souměrností:*



### Důkaz.

Postupně vkládáme osy tak, aby

- ▶  $A \mapsto A' \dots$  dořešíme obrazy  $B \mapsto B_1$  a  $C \mapsto C_1$ ,
- ▶  $B_1 \mapsto B' \dots$  dořešíme obraz  $C_1 \mapsto C_2$ , atd.

□

... proto je osová souměrnost základní shodností v rovině.



Odtud klasifikace shodností v rovině:

- (a) *identita* = složení dvou os. soum. takových, že  $o_1 = o_2$ ,
- (b) *posunutí* = složení dvou os. soum. takových, že  $o_1 \parallel o_2$ ,
- (c) *otáčení* = složení dvou os. soum. takových, že  $o_1$  a  $o_2$  jsou různoběžné,
- (d) *středová souměrnost* = složení dvou os. soum. takových, že  $o_1 \perp o_2$ ,
- (e) *osová souměrnost* = jedna os. soum.,
- (f) *posunutá souměrnost* = složení tří obecných os. soum.

### Poznámky

Shodnost s přímkou pevných bodů je právě osová souměrnost (e).

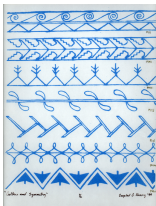
Shodnosti (a)–(d) jsou *přímé* (zachovávají orientaci), shodnosti (e)–(f) jsou *nepřímé* (mění orientaci).

Pojmenování (f) je odvozeno z možného rozkladu na osovou souměrnost a posunutí:

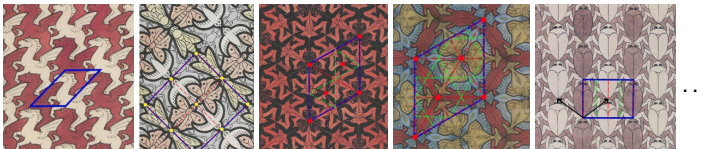


Odtud klasifikace symetrických vzorů, viz např.

- ▶ sedm frízových vzorů<sup>63</sup>



- ▶ sedmnáct tapetových vzorů<sup>64</sup>



- ▶ atp.

<sup>63</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group)

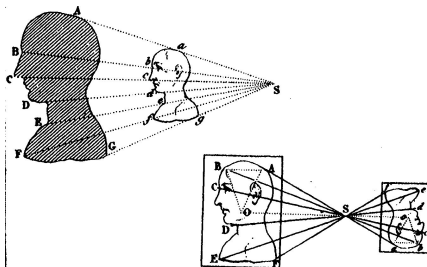
<sup>64</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group)

*Co to je?* Transformace eukleidovské roviny.

*Čím je určena?* Bodem  $S$  a nenulovým reálným číslem  $k$ .<sup>65</sup>

*Jak je určena?* Obraz  $X'$  lib. bodu  $X$  leží přímce  $SX$ , a to tak, že

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}.$$



*Jaké má vlastnosti?* Transformace se pevným bodem,  
základní podobnost, v rovině přímá transformace, . . .

<sup>65</sup>tzv. střed a koeficient = poměr škálování

Spec. pro koeficient  $|k| = 1$  dostáváme shodnosti:

- ▶ *identita*, pokud  $k = 1$ ,
- ▶ *středová souměrnost*, pokud  $k = -1$ .

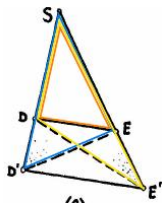
Pokud bychom připustili  $k = 0$ , dostaneme velmi degenerovaný případ:

- ▶ *zobrazení do jednoho bodu*.

Základní poznatek známe ze s. 54!

Zejména, každá stejnoolehlost je

- ▶ podobné zobrazení, které
- ▶ každou přímku zobrazuje na přímku s ní rovnoběžnou.



Zobrazení s těmito vlastnostmi není mnoho, jmenovitě tři:

## Věta

*Složení dvou stejnoolehlostí se středy  $S_1$ , resp.  $S_2$  a koeficienty  $k_1$ , resp.  $k_2$  je:*

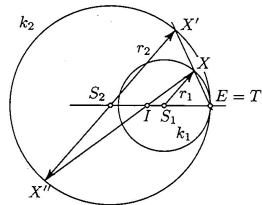
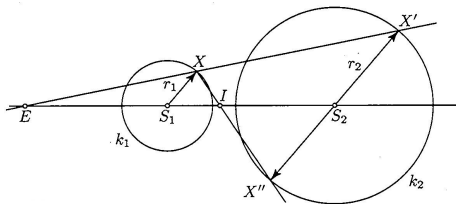
- ▶ *identita, právě když  $k_1 \cdot k_2 = 1$  a  $S_1 = S_2$ ,*
- ▶ *posunutí, právě když  $k_1 \cdot k_2 = 1$  a  $S_1 \neq S_2$ ,<sup>66</sup>*
- ▶ *obecná stejnoolehlost, právě když  $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ .<sup>67</sup>*

---

<sup>66</sup>... , přičemž vektor posunutí je násobkem vektoru  $\overrightarrow{S_1 S_2}$

<sup>67</sup>... pokud  $S_1 \neq S_2$ , potom střed výsledné stejnoolehlosti leží na přímce  $S_1 S_2$

Stejnolehlým obrazem kružnice je kružnice, ...



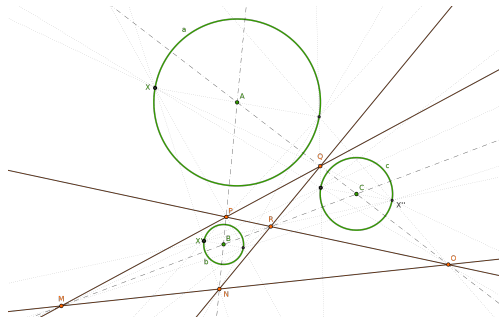
... každé dvě kružnice jsou stejnohlé, ...

... a to dvojím způsobem.

Odtud (pro zajímavost) Mongeova věta:<sup>68</sup>

### Věta

Mezi šesti středy stejnoolehlostí tří kružnic jsou čtyři kolineární trojice.



### Důkaz.

Plyne z věty o skládání stejnoolehlostí (s. 117)... □

<sup>68</sup>... uplatnění např. při řešení obecné Apollóniovovy úlohy

## Definice

Podobné zobrazení

(a) zachová poměry vzdáleností,

tzn. pro libovolné body  $A, B$  a jejich obrazy  $A', B'$  platí

$$|A'B'| = k \cdot |AB|,$$

kde  $k$  = kladná konstanta, tzv. *koeficient podobnosti*.

## Další vlastnosti

(b) zachovává kolineárnost bodů,

(c) zachovává odchylky přímek,

(d) obsahy se mění  $k^2$ -krát, resp. objemy se mění  $k^3$ -krát,

(e) je prosté (injektivní).

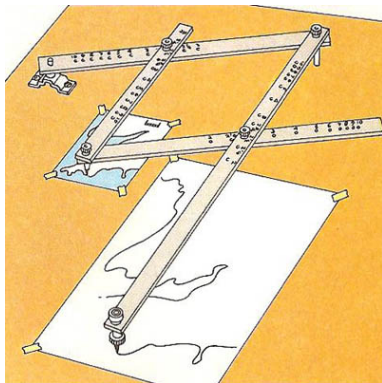


Podobnost v rovině je dána obrazem trojúhelníku (tj. tří bodů v obecné poloze).

Každé shodné zobrazení je podobné (s koeficientem  $k = 1$ ).

Každé podobné zobrazení je složením nějaké shodnosti a stejnolehlosti.

... proto je stejnolehlost základní podobností.

Pantograf<sup>69</sup>

---

<sup>69</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Pantograph>

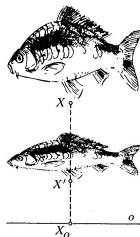
*Co to je?* Transformace eukleidovské roviny.

*Čím je určena?* Přímkou  $o$ , směrem  $\mathbf{s}$  a nenulovým reálným číslem  $m$ .<sup>70</sup>

*Jak je určena?* Obraz  $X'$  lib. bodu  $X$  leží na přímce se směrem  $\mathbf{s}$ , a to tak, že

$$\overrightarrow{X'X_0} = m \cdot \overrightarrow{XX_0},$$

kde  $X_0$  = průsečík  $XX'$  s osou  $o$ .



*Jaké má vlastnosti?* Transformace s přímkou pevných bodů,  
základní afinní transformace v rovině,  
přímá/nepřímá podle znaménka  $m$ , ...

<sup>70</sup>tzv. osa, směr škálování a modul = poměr škálování v daném směru

Speciálními, resp. mezními případy osově afinity jsou:

- ▶ *osová souměrnost*, pokud  $m = -1$  a  $\mathbf{s} \perp o$ ,
- ▶ *šikmá souměrnost*, pokud  $m = -1$  a  $\mathbf{s} \not\perp o$ ,
- ▶ *elace* aneb *naklonění*, pokud  $\mathbf{s} \parallel o$  ( $\implies m = 1$ ),

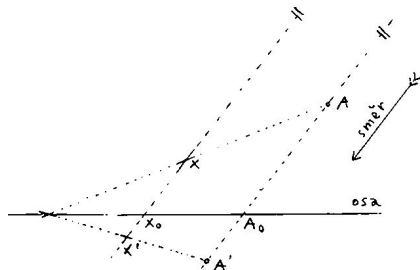


Pokud bychom připustili  $m = 0$ , dostaneme degenerovaný (neinjektivní) případ:

- ▶ *rovnoběžné promítání* do přímky  $o$  ve směru  $\mathbf{s}$ .

Osová afinita zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) poměry vzdáleností trojic kolineárních bodů,
- (c) rovnoběžnost přímk.



Důkaz.

Variace na podobné trojúhelníky...



Osová afinita s osou  $o$ , směrem  $\mathbf{s}$  a modulem  $m$ :

- (d) zobrazuje přímku  $p$  do sebe, právě když  $p = o$  nebo  $p \parallel \mathbf{s}$ ,
- (e) je přímá, resp. nepřímá, právě když  $m > 0$ , resp.  $m < 0$ ,
- (f) je involutivní, právě když  $m = -1$ ,
- (g) obsahy se mění  $m$ -krát.

### Definice

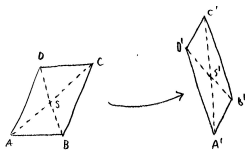
Obecné *afinní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a)–(c) z předchozí strany.

Bijektivní afinní zobrazení se nazývá *afinita*.

Afinita, která zachovává obsahy (resp. objemy), se nazývá *ekviafinita* (viz šikmou souměrností nebo elaci).

### Poznámka

Za předpokladu (a) jsou vlastnosti (b) a (c) ekvivalentní. . .



Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) implikuje (b) a (c). . .<sup>71</sup>

<sup>71</sup>... viz základní větu afinní geometrie (příští semestr)

Analogicky k tvrzení na s. 112 máme:

## Věta

*Každá afinita v rovině je složením nejvýše tří osových afinit.*

## Důkaz.

Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci větší. . .



. . . proto je osová afinita základní afinitou v rovině.

## Příklad

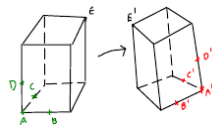
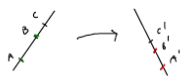
Stejnolehlost jako složení dvou osových afinit:





Afinní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b), tj. obrazy dvou různých bodů. . .

Afinní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno obrazy tří bodů v obecné poloze. . .



## Věta

*Prosté afinní zobrazení prostoru dimenze  $n$  je jednoznačně určeno obrazy  $n + 1$  bodů v obecné poloze.*

## Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí rovnoběžek a přenášení dělicích poměrů. . . <sup>72</sup>



<sup>72</sup><https://ggbm.at/yWcCaQeA>

Každé podobné zobrazení je afinní.

Každé shodné zobrazení je ekviafinní.

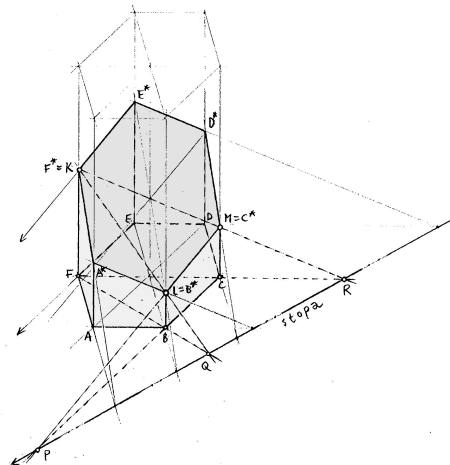
Podobné a ekviafinní zobrazení je shodné.

3-rozměrnou analogií osové afinity je afinita s rovinou pevných bodů. . .

3-rozměrnou analogií rovnoběžného promítání do přímky je  
rovnoběžné promítání do roviny. . .

Obecné afinní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ zachovává rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ **nemusí** být prosté (injektivní).



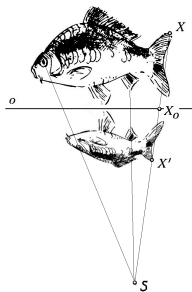
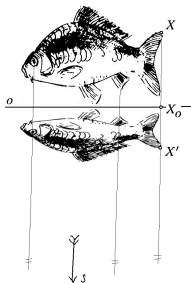
Afinní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho řez rovinou  $KLM$ ...<sup>73</sup>

<sup>73</sup><http://ggbtu.be/mkvJL3iqr>

Poslední příspěvky do sbírky základních zobrazení (s. 109):

Od posunutí ke stejnolehlosti to je stejné. . .

. . . jako od osově afinity k osové kolineaci. . .



. . . nebo jako od rovnoběžného promítání ke středovému. . .

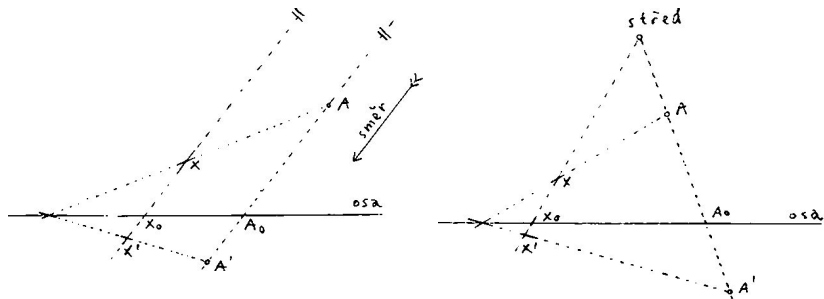
Posunutí vs. stejnolehlost:



- ▶  $X'X \parallel A'A \parallel \dots$  směr,  $X'X \cap A'A \cap \dots$  střed,
- ▶  $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'} = \dots$  vektor posunutí,  $\frac{\overrightarrow{SX'}}{\overrightarrow{SX}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \dots$  koef. stejnolehlosti,

„Posunutí = stejnolehlost se středem v nekonečnu.“

Osová afinita vs. osová kolineace:



▶  $X'X \parallel A'A \parallel \dots$  směr,

$X'X \cap A'A \cap \dots$  střed,

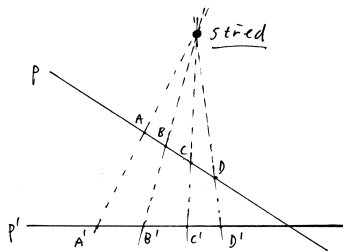
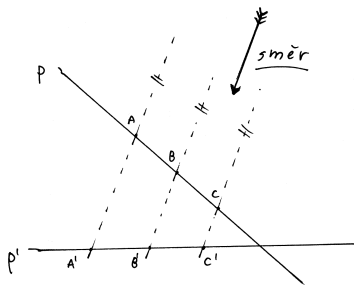
▶  $\frac{\overrightarrow{X'X_0}}{\overrightarrow{XX_0}} = \frac{\overrightarrow{A'A_0}}{\overrightarrow{AA_0}} = \dots$  modul,

???? = ???? = ... modul,<sup>74</sup>

„Osová afinita = osová kolineace se středem v nekonečnu.“

<sup>74</sup>kde ???? je nějak určeno body  $A, A', A_0$  a  $S$ .

Rovnoběžné vs. středové promítání:



- ▶  $A'A \parallel B'B \parallel \dots$  směr,
- ▶  $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{B'C'} = \frac{\overrightarrow{AC}}{BC} = \dots$  zákl. invariant,

- $A'A \cap B'B \cap \dots$  střed,
- ???? = ????? = ... zákl. invariant,<sup>75</sup>

„Rovnoběžné promítání = středové promítání se středem v nekonečnu.“

<sup>75</sup>kde ???? je nějak určeno body A, B, C a D.

### Definice

*Dělicí poměr* trojice kolineárních bodů  $(A, B, C)$  je reálné číslo  $d$  takové, že platí  $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{BC}$ ; značíme a zapisujeme takto:

$$d = (AB C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

*Dvojpoměr* čtveřice kolineárních bodů  $(A, B, C, D)$  je poměr dělicích poměrů  $(AB C) : (AB D)$ ; značíme a zapisujeme takto:

$$(AB CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

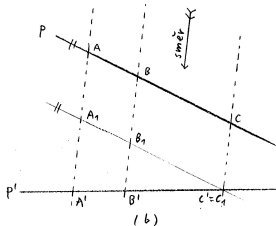
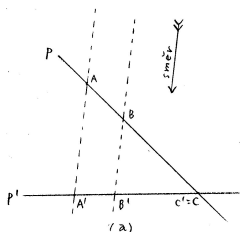
### Poznámky

Vzhledem k tomu, že  $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB D) = 1$ , platí  $\lim_{D \rightarrow \infty} (AB CD) = (AB C)$ .



## Věta

Při rovnoběžném promítání se zachovávají poměry trojic kolineárních bodů.<sup>76</sup>



## Důkaz.

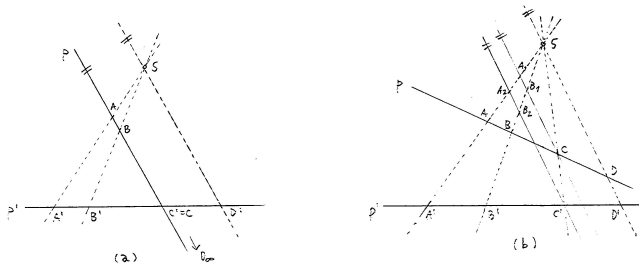
- (a) Spec. případ plyne z podobnosti trojúhelníků  $AA'C$  a  $BB'C'$  (s. 54).  
 (b) Obecný případ plyne z (a) a shodností protilehlých stran v rovnoběžnících.



<sup>76</sup>... pokud se různé body zobrazí na různé body.

## Věta (Pappova)

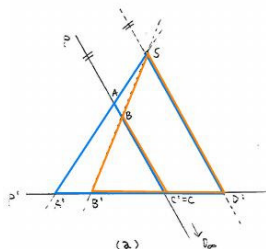
Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.<sup>77</sup>



## Důkaz.

- (a) Spec. případ ( $C = C'$  a  $SD' \parallel p$ ) plyne z podobnosti trojúhelníků (s. 54) a vztahu  $(ABC) = (ABC D_\infty)$  (s. 136).
- (b) Obecný případ plyne z (a) a podobnosti trojúhelníků. . . □

<sup>77</sup>... pokud se různé body zobrazí na různé body.



Z modré, resp. oranžové podobnosti plyne

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SD'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{SD'}} = \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}}.$$

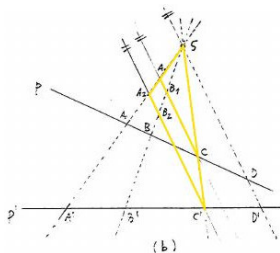
Po dělení

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'D'}} : \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}} : \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{B'D'}},$$

tudíž  $(ABC) = (A'B'C'D')$ .

Levá strana je však totéž, co  $(ABCD_\infty)$ , tedy

$$(ABCD_\infty) = (A'B'C'D').$$



Doplníme rovnoběžky s přímkou  $SD$  jdoucí bodem  $C$ , resp.  $C'$ .

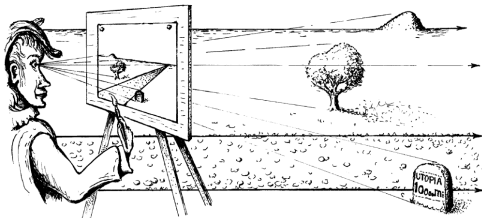
Z (a) plyne  $(A_1 B_1 C) = (AB CD)$ , resp.  $(A_2 B_2 C') = (A' B' C' D')$ .

Ze žluté podobnosti plyne  $(A_1 B_1 C) = (A_2 B_2 C')$ , a tedy

$$(AB CD) = (A' B' C' D').$$

Obecná afinní zobrazení fungují v celé rovině, resp. prostoru.

Při osově kolineaci či středovém promítání některé body nemají obraz, jiné vzor; resp. jsou „v nekonečnu“:



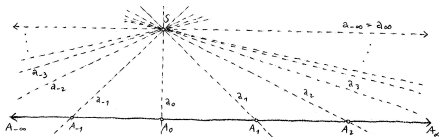
... to jsou tzv. *úběžníky*, *horizont* apod.

Pro větší pohodlí si náš eukleidovský prostor **rozšíříme**:

Eukleidovský prostor rozšířený o „body v nekonečnu“ je tzv. *projektivní* prostor.

Původní body jmenujeme *vlastní*, ty nové pak *nevlastní*.

Přesněji, body rozšířeného prostoru ( $A_i$ ) ztotožňujeme s přímkami ( $a_i$ ) procházejícími nějakým externím bodem ( $S$ ):



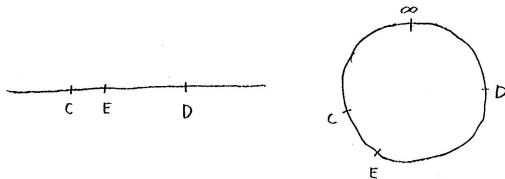
Vlastní body odpovídají různoběžkám, nevlastní body rovnoběžkám s původním (nerozšířeným) prostorem.

Tedy:

- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské přímky má **právě jeden** nevlastní bod,
- ▶ Projektivní rozšíření eukleidovské roviny má přímku nevlastních bodů.
- ▶ Každé dvě přímky v projektivní rovině se protínají.<sup>78</sup>
- ▶ Atd.

<sup>78</sup>Rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě, různoběžky ve vlastním.

- ▶ Projektivní přímka je uzavřená.
- ▶ Projektivní přímka nerozděluje projektivní rovinu na dvě nesouvislé části.<sup>79</sup>
- ▶ Uspořádání bodů na projektivní přímce nemá valného smyslu:



Eukleidovská vs. projektivní přímka

---

<sup>79</sup>Vzpomeňte na diskuzi kolem věty o vnějším úhlu v trojúhelníku (s. 11).

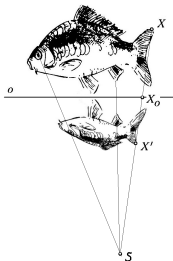
*Co to je?* Transformace **projektivní** roviny.

*Čím je určena?* Přímkou  $o$ , bodem  $S$  a nenulovým reálným číslem  $m$ .<sup>80</sup>

*Jak je určena?* Obraz  $A'$  lib. bodu  $A$  leží na přímce  $SA$ , a to tak, že

$$(A' A A_o S) = m,$$

kde  $A_o$  = průsečík  $AA'$  s osou  $oa$  ( $A' A A_o S$ ) = dvojpoměr.



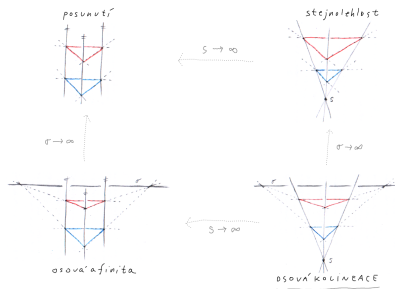
*Jaké má vlastnosti?* Transformace s přímkou pevných bodů,  
základní projektivní transformace v rovině, ...

<sup>80</sup>tzv. osa, střed a modul



Speciálními, resp. mezními případy osové kolineace jsou:

- ▶ *osová afinita*, pokud  $S$  je v nekonečnu,
- ▶ *stejnolehlost*, pokud  $o$  je v nekonečnu,
- ▶ *posunutí*, pokud  $S$  i  $o$  jsou v nekonečnu.

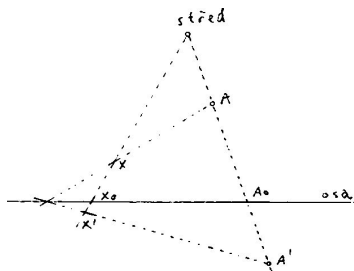


Pokud bychom připustili  $m = 0$ , dostaneme degenerované (neinjektivní) případy:

- ▶ *středové promítání* do přímky  $o$  z bodu  $S$ .
- ▶ *rovnoběžné promítání* do přímky  $o$ , pokud  $S$  je v nekonečnu.

Osová kolineace zachovává:

- (a) kolineárnost bodů,
- (b) dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



**Důkaz.**

Plyne z definice a z Pappovy věty...



Osová kolineace s osou  $o$ , středem  $S$  a modulem  $m$ :

- (d) zobrazuje přímku  $p$  do sebe, právě když  $p = o$  nebo  $p \ni S$ ,
- (e) je involutivní, právě když  $m = -1$ .

### Poznámky

- (f) nemá smysl (globálně) řešit zda je přímé/nepřímé,
- (g) nemá smysl (globálně) řešit změny obsahů.

## Definice

Obecné *projektivní* zobrazení je zobrazení s vlastnostmi (a) a (b) z předchozí strany.

Bijektivní projektivní zobrazení se nazývá *projektivita* nebo *kolineace*.

## Poznámky

Základní vlastnosti (a) a (b) nejsou zcela nezávislé.

Ve skutečnosti (v jistých případech) vlastnost (a) implikuje (b)...<sup>81</sup>

---

<sup>81</sup>... viz základní větu projektivní geometrie a její důsledky (za rok)!

Analogicky k předchozím případům máme:

### Věta

*Každá kolineace v (projektivní) rovině je složením nejvýše tří osových kolineací.*

### Důkaz.

Myšlenka důkazu je stále stejná, volnost v realizaci stále větší. . .



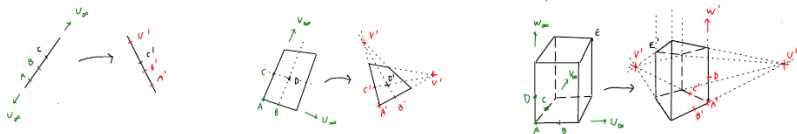
. . . také proto je osová kolineace základní kolineací v rovině.

Projektivní zobrazení mezi přímkami je zcela určeno podmínkou (b),

- ▶ tj. obrazy tří různých bodů,
- ▶ tedy např. obrazy dvou různých vlastních bodů a jedním úběžníkem...

Projektivní zobrazení mezi rovinami je zcela určeno

- ▶ obrazy čtyř bodů v „dostatečně obecné“ poloze,
- ▶ nebo obrazy tří vlastních bodů v obecné poloze a dvěma odpovídajícími úběžníky...



## Věta

*Prosté projektivní zobrazení prostoru dimenze  $n$  je jednoznačně určeno obrazy  $n + 1$  vlastních bodů v obecné poloze a  $n$  odpovídajícími úběžníky.*

## Důkaz.

Induktivní a konstruktivní — pomocí úběžníků a přenášení dvojpoměrů...<sup>82</sup> □

<sup>82</sup><https://ggbm.at/yWcCaQeA>

Každé afinní zobrazení je projektivní.

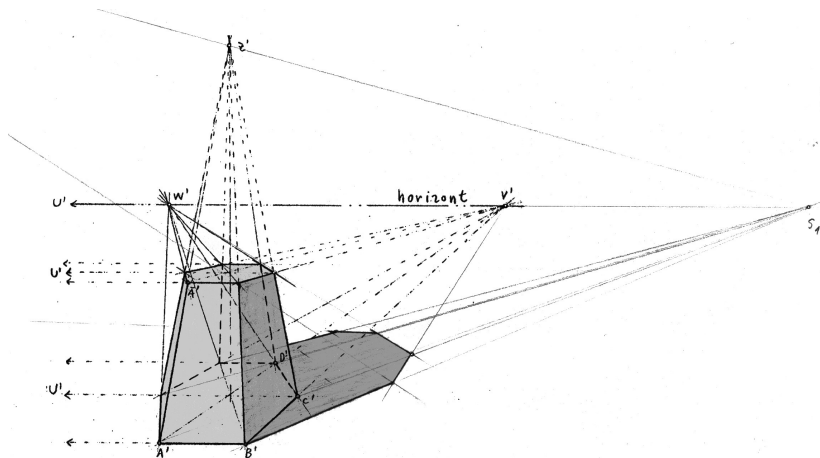
Projektivní zobrazení, které zobrazuje (ne)vlastní body na (ne)vlastní, je afinní.

3-rozměrnou analogií osové kolineace je kolineace s rovinou pevných bodů. . .

3-rozměrnou analogií středového promítání do přímky je  
středové promítání do roviny. . .

Obecné projektivní zobrazení:

- ▶ zobrazuje přímky na přímky,
- ▶ zachovává dvojpoměry vzdáleností čtveřic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** poměry vzdáleností trojic kolin. bodů,
- ▶ **nezachovává** rovnoběžnost,
- ▶ **nezachovává** obsahy, resp. objemy,
- ▶ **nezachovává** odchylky,
- ▶ **nemusí** být prosté (injektivní).

Projektivní obraz pravidelného šestibokého hranolu a jeho stín...<sup>83</sup>

---

<sup>83</sup><https://www.geogebra.org/m/sbeyg5zy>



Vše, co jsme kdy jmenovali základní transformací v rovině, mělo<sup>84</sup>

- ▶ *osu* = přímku pevných bodů,
- ▶ *střed* = takový bod, že každá jím jdoucí přímka je pevná.

Osa nebo střed mohou být jak vlastní, tak nevlastní (s. 145).

Z Desarguesovy věty (s. 154) vyplývá, že

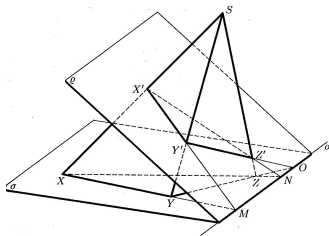
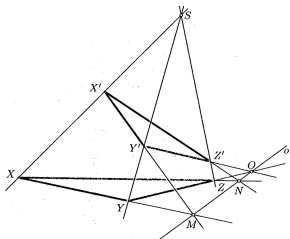
- ▶ *projektivní transformace v rovině má osu*  $\iff$  *má střed!*

---

<sup>84</sup><https://ggbm.at/az7e9qsC>

## Věta

Pro libovolné dva trojúhelníky  $XYZ$  a  $X'Y'Z'$  v projektivní rovině platí:  
 přímky  $XX'$ ,  $YY'$ ,  $ZZ'$  prochází jedním bodem  $\iff$  průsečíky přímek  $XY$   
 a  $X'Y'$ ,  $YZ$  a  $Y'Z'$ ,  $XZ$  a  $X'Z'$  leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.<sup>85</sup>

<sup>85</sup>Elementární zdůvodnění problematické; jiný přístup (a zobecnění) za rok...

střed $S$	osa $o$	$S \in o$	modul	druh
vlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(středové promítání do přímky) projektivní elace harmonická souměrnost <b>osová kolineace</b>
nevlastní	vlastní	ne ano ne ne	0 1 -1 jinak	(rovnoběžné promítání do přímky) elace šikmá, resp. osová souměrnost osová afinita
vlastní	nevlastní	ne ne ne ne	0 1 -1 jinak	(promítání do bodu) identita středová souměrnost stejnolehlost
nevlastní	nevlastní	ano	1	posunutí

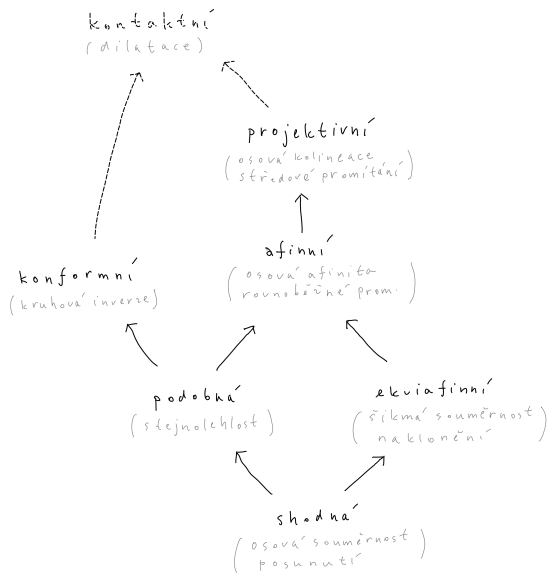
Transformace je involutivní  $\iff$  modul = -1.

(Degenerované případy  $\iff$  modul = 0.)

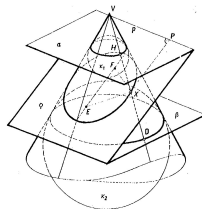
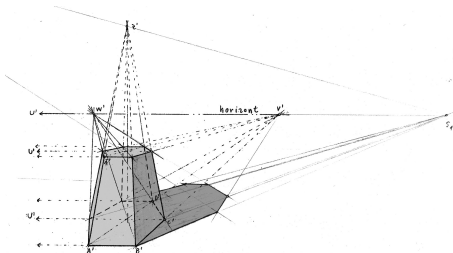
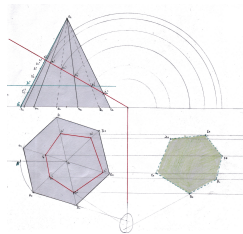
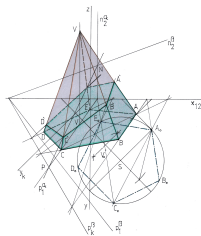
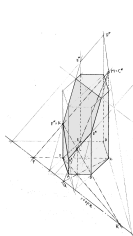
Pro afinní transformace: přímá  $\iff$  modul > 0, nepřímá  $\iff$  modul < 0.

	kolin.	vzdál.	děl. pom.	dvojpom.	rovnob.	obs.	odch.
projektivní	+	-	-	+	-	-	-
afinní	+	-	+	+	+	-	-
ekviafinní	+	-	+	+	+	+	-
podobná	+	-	+	+	+	-	+
shodná	+	+	+	+	+	+	+
konformní	-	-	-	-	-	-	+

- ▶ Projektivní zobrazení, které zobrazuje všechny vlastní body na vlastní (ekvivalentně, nevlastní body na nevlastní), je afinní.
- ▶ Afinní zobrazení, které zachovává poměry vzdáleností jakýchkoli (tedy i nekolineárních) trojic bodů, je podobné.
- ▶ Konformní zobrazení, které je projektivní, je podobné.
- ▶ Podobné zobrazení, které je ekviafinní, je shodné.



Mnoho základních zobrazení můžeme (resp. musíme) pozorovat při znázorňování původně stereometrických problémů:



Základy	4
Dotykové úlohy	78
Geometrická zobrazení	91
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Volně	161
Vázaně	164
Analyticky	167
Exoticky	169
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

Podle způsobu promítání dělíme na:

- ▶ středové,
- ▶ rovnoběžné,
- ▶ exotické.

Podle způsobu provedení dělíme na:

- ▶ volné,<sup>86</sup>
- ▶ vázané,<sup>87</sup>
- ▶ vychytané,<sup>88</sup>
- ▶ analytické,<sup>89</sup>
- ▶ exotické<sup>90</sup>.

---

<sup>86</sup>... takto jsme to dělali dosud,

<sup>87</sup>za chvíli,

<sup>88</sup>za chvíli,

<sup>89</sup>takto budeme dělat příští rok,

<sup>90</sup>pro zajímavost...



Středové promítání (projekce) je modelové *projektivní* zobrazení:

- (i) zobrazuje kolineární body na kolineární body,
- (ii) zachovává dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.<sup>91</sup>

Nevlastní body mohou mít vlastní obrazy (tzv. úběžníky) a naopak.

Rovnoběžné promítání je středové promítání s nevlastním středem.

Rovnoběžné promítání je *afinní* zobrazení, navíc tedy

- (iii) zachovává rovnoběžnost přímek,
- (iv) zachovává obyčejné poměry trojic kolineárních bodů.<sup>92</sup>

---

<sup>91</sup>... kdykoli to dává smysl (pokud se různé body zobrazí na různé)

<sup>92</sup>... kdykoli to dává smysl...

Volné středové/rovnoběžné promítání je určeno několika málo body a obecnými vlastnostmi projektivních/afinních zobrazení (i)–(iv):

### Věta

„Nepříliš degenerované“

(a) *afinní,*

(b) *projektivní*

*zobrazení prostoru dimenze  $n$  je jednoznačně určeno obrazy*

(a)  $n + 1$  *bodů v obecné poloze,*

(b)  $n + 1$  *bodů v obecné poloze a  $n$  odpovídajícími úběžníky.*

Základní konstrukce jsou:

(a) *rovnoběžky a přenášení poměrů,*

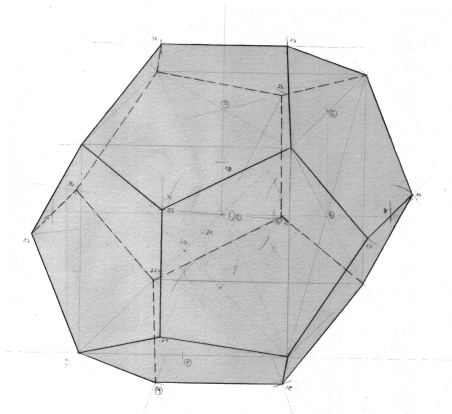
(b) *úběžníky a přenášení dvojpoměrů.*

### Poznámka

V předpokladu věty tušíme jistý zádrhel:

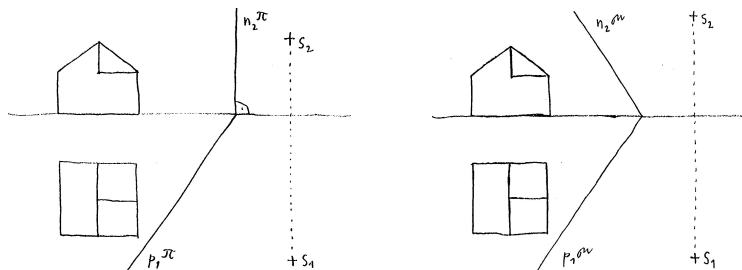
*Jak sestavit obraz bodu v „souřadné rovině“, která se zobrazuje do přímky?*

... pomocí vepsané krychle (podle s. 75):



Vázané promítání je určeno přesným vymezením průmětny a středu, resp. směru promítání vzhledem k zobrazovanému objektu.

Pro zadání si pomáháme s pomocnými *sdrúženými* průměty (nárys, půdorys):

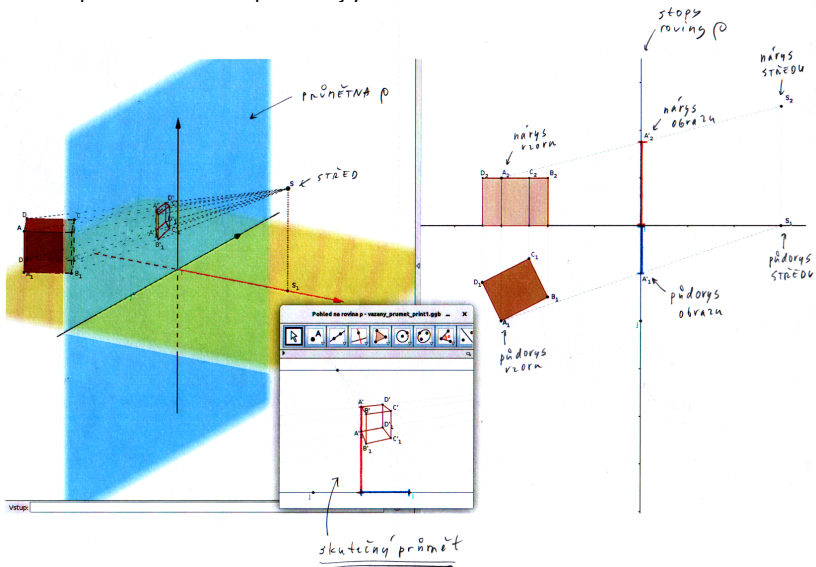


Na rozdíl od předchozí metody odpadají jakékoli omezující předpoklady!

Základní konstrukční dovednosti jsou:

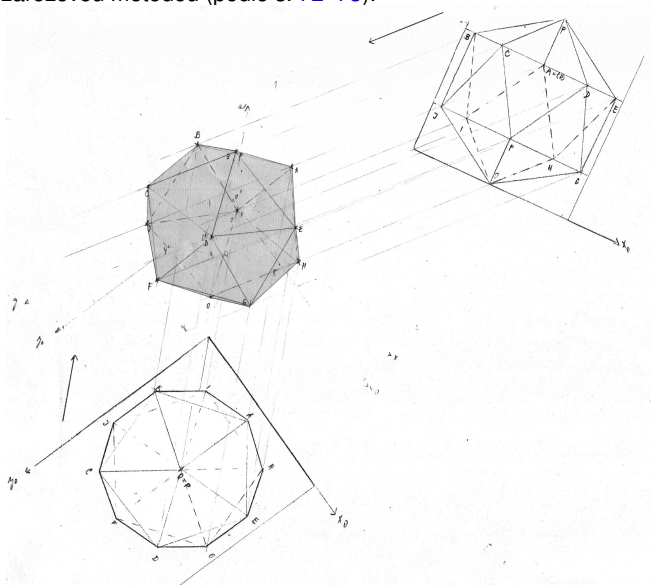
- ▶ průnik přímky a roviny,
- ▶ odměřování a přenášení vzdáleností. . .

... do speciálně zvolené průmětny  $\rho$ :

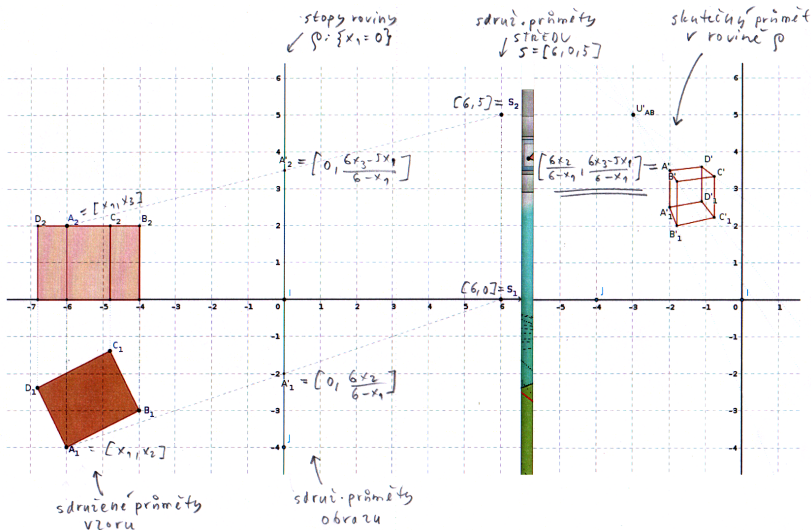


# Vychytaný průmět pravidelného dvacetistěnu

... tzv. zářezovou metodou (podle s. 72–73):



... vzhledem k naznačené souřadné soustavě:



Středové promítání ze středu  $S = [6, 0, 5]$  do roviny  $\rho : \{x_1 = 0\}$

- ▶ v afinních (kartézských) souřadnicích:

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[ 0, \frac{6x_2}{6 - x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1} \right],$$

- ▶ v *homogenních* (rozšířených) souřadnicích:

$$(\underline{x_0} : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\underline{6x_0 - x_1} : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1),$$

$$\text{tj. } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Všechno v jedné matici!

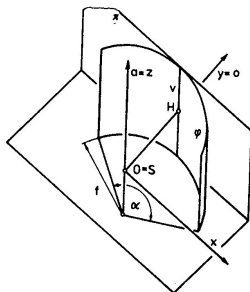
Obdobně to funguje pro lib. projektivní zobrazení, ...

... viz základní věta projektivní geometrie (za rok)!



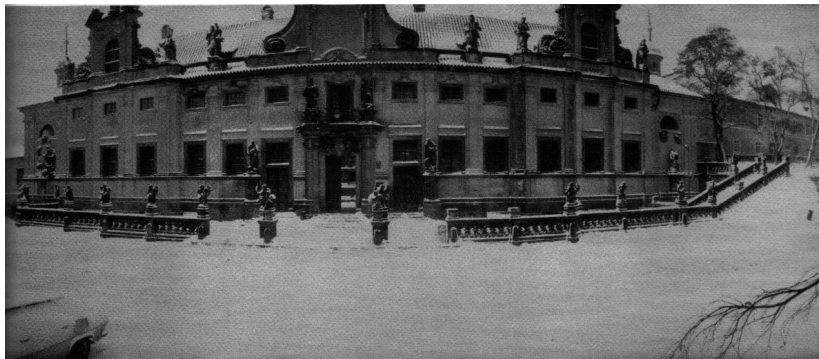
Dosud jsme uvažovali toliko projektivní zobrazení, tj. taková zobrazení, při nichž se přímka zobrazuje jako přímka (resp. bod).

Existuje řada dalších nápadů, viz např. *cylindrickou perspektivu*:



Ta funguje jako složení

- ▶ středového promítání na válcovou plochu
- ▶ a rozvinutí této plochy do roviny.



Některé přímky se zobrazují jako přímky, většina však ne...

Dosud jsme bod v prostoru reprezentovali

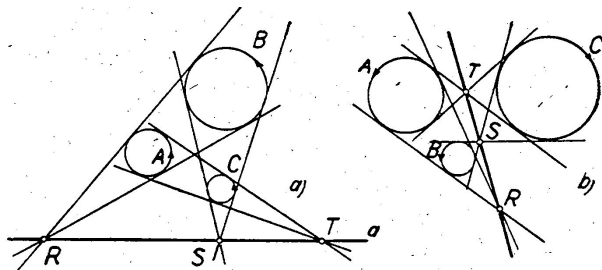
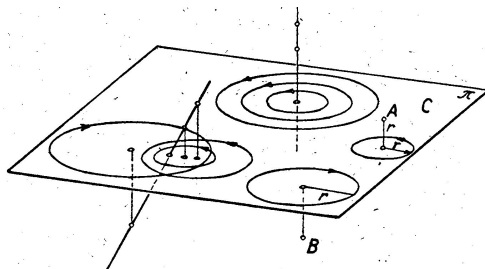
- ▶ souřadnicemi  $A = [x_1, x_2, x_3]$ ,
- ▶ sdruženými průměty, tj. půdorysem  $A_1 = [x_1, x_2]$  a nárysem  $A_2 = [x_1, x_3]$ ,
- ▶ volně, tj. průmětem a nějakým kontextem.<sup>94</sup>

Existují další nápady; bod v prostoru je jednoznačně určen např.

- ▶ půdorysem  $A_1 = [x_1, x_2]$  a kótou (= souřadnicí  $x_3$ )  $\rightsquigarrow$  mapy,
- ▶ půdorysem  $A_1 = [x_1, x_2]$  a cyklem (= kružnicí s poloměrem  $|x_3|$  a orientací podle znaménka  $x_3$ )  $\rightsquigarrow$  cyklografie...

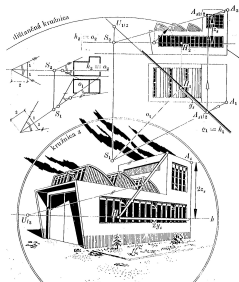
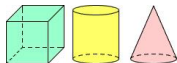
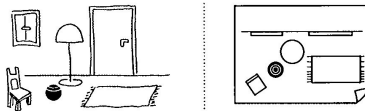
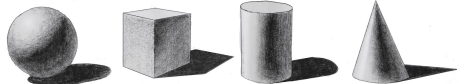
---

<sup>94</sup>vrchol hranolu apod.



<sup>95</sup>Co nám tohle jenom připomíná a k čemu by to mohlo být dobré? (viz s. 119)

Se zobrazováním prostoru do roviny mohou — ale nemusí — být problémy:



Základy	4
Dotykové úlohy	78
Geometrická zobrazení	91
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Klasická konstrukční geometrie	175
Zobrazení	177
Zdroje	179

## Úvod (s. 5–8)

- ▶ primitivní pojmy, vztahy (relace) a tvzení (axiómy, resp. postuláty)
- ▶ axiómy vyslovené (incidence, shodnost), nevyslovené (spojitost, uspořádání) a problematické (rovnoběžnost)

## Planimetrie (s. 9–64)

- ▶ základní poznatky (např. o vnějším úhlu v 3úh.)
- ▶ důsledky postulátu o rovnoběžkách (např. o součtu úhlů v 3úh., Eukl. věty o odvěsně/výšce)
- ▶ geometrická algebra (zlatý řez apod.)
- ▶ o kružnicích (obvodové úhly, mocnost)
- ▶ pravidelné mnohoúhelníky (3, 4, 5, 6, 15, ...)
- ▶ teorie podobnosti (poměry a úměrnosti, základní ekvivalence)

## Sestrojitelné veličiny (s. 25–31)

- ▶ úplná charakterizace (+ - · :  $\sqrt{\quad}$ )
- ▶ slavné problémy starověku (např. kvadratura kruhu)

## **Stereometrie** (s. 65–76)

- ▶ rozšíření slovníku a možných 3D vztahů (kolmost, rovnoběžnost)
- ▶ analogie, resp. rozdíly k 2D (objemy rovnoběžnostěnů, resp. jehlanů)
- ▶ pravidelné mnohostěny (4, 6, 8, 12, 20)

## **Dotykové úlohy** (s. 79–89)

- ▶ základní úlohy (tečny kružnic)
- ▶ základní nápady (mocnost, souměrnost, stejnoolehlost, dilatace, kruh. inverze)
- ▶ základní motivace (obecná Apollóniova úloha)

## **Užitek** (s. 19, 39, 50, 77, 90)

- ▶ kvadratura mnohoúhelníku
- ▶ kvadratické rovnice a jejich řešení
- ▶ pravidelný 5úhelník apod.
- ▶ specifické dotykové úlohy
- ▶ celkový přehled



## Taxonomie

- ▶ hlavní páteř (shodná, podobná, (ekvi)afinní, projektivní) (s. 109–151)
- ▶ další typy (konformní, kontaktní) (s. 94–108)
- ▶ příklady, obecné vlastnosti a hierarchie (s. 153–157)

## Obecný rámec (s. 132–151)

- ▶ projektivní rozšíření (o body v  $\infty$ )
- ▶ Pappova věta (o dvojpoměru)
- ▶ věta o určenosti (kolik bodů zadává proj. zobrazení?)

## Základní příklady (s. 155, 161)

- ▶ regulární: osová kolineace (a spec. případy), Desarguesova věta
- ▶ singulární: středové, resp. rovnoběžné promítání

**Zobrazování prostoru do roviny** (s. 160–172)

- ▶ podle promítání: středové (projektivní), rovnoběžné (afinní)
- ▶ podle zadání: volné (obrazy několika bodů), vázané (střed/směr promítání a rovina)
- ▶ základní úlohy (přenášení (dvoj)poměru kolin. bodů)
- ▶ vychytávky (otočení roviny, zářezová metoda apod.)

**Užitek** (s. 103–108, 131, 158, 173)

- ▶ obecná Apollóniova úloha
- ▶ obecné průměty pravidelných a jiných těles
- ▶ řezy hranolů, jehlanů a jejich skutečné velikosti
- ▶ celkový přehled

Základy	4
Dotykové úlohy	78
Geometrická zobrazení	91
Poznámky k zobrazování prostoru do roviny	159
Závěrečné shrnutí	174
Zdroje	179

- [A] B. Artmann, *Euclid: The Creation of Mathematics*, Springer, 1999
- [DV] L. Drs, J. Všetečka, *Objektivem počítače: geometrie speciálních fotografických technik*, SNTL, 1981
- [EB] *The Elements of Euclid*, obrázkové vydání od O. Byrneho, 1847,<sup>96</sup>
- [EJ] *Euclid's Elements*, interaktivní edice D. Joyce podle překladu T.L. Heath, 1908–1998,<sup>97</sup>
- [EV] *Eukleidés, Základy*, české vydání podle překladu F. Servíta, 1907–2012,<sup>98</sup>
- [H] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- [K] F. Kuřina, *Deset pohledů na geometrii*, ČSAV, 1996
- [M] V. Medek, *Deskriptívna geometria*, SNTL, 1962
- [P] J.I. Perelman, *Zajímavá geometrie*, Mladá Fronta, 1954

---

<sup>96</sup><http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>

<sup>97</sup><http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

<sup>98</sup>[https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides\\_Servit.pdf](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Eukleides_Servit.pdf)

[A], 1, 6, 9, 10, 22–24, 30, 33–36, 38, 40, 42, 54–56, 63, 67, 72–75, 117

[DV], 169, 170

[EB], 11–14, 17, 18, 47, 53, 57

[EJ], 32, 52, 59–61, 65, 79, 82

[EV], 15, 16

[H], 29, 41, 44, 49, 94, 96–100

[K], 90, 118, 123, 158

[M], 173

[P], 39

Escher, M.C., 114

Fryštáková, M., 50

Kutuzov, B.V., 172

Mišejková, B., 166

Nedvěďová, K., 19

Němcová, Ž., 158

Penrose, R., 141

Pokorný, A., 114

Sekora, O., 110

Vachutková, T., 163

Velebová, I., 158

<http://caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/>, 76

<http://divisbyzero.com/>, 50

<http://en.wikipedia.org/>, 173

<http://etc.usf.edu/clipart/>, 31, 66, 80

<http://mathworld.wolfram.com/>, 87

<http://missmcdonaldart.blogspot.cz/>, 173

<http://thedisorderofthings.files.wordpress.com/>, 173

<http://wellcomecollection.org/>, 173

<http://wikipedia.org/>, 58, 71

<http://www.daviddarling.info/encyclopedia/>, 122

<http://www.myddoa.com/feast-of-herod-donatello/>, 173