Vydavatelství Univerzity Palackého

J. Kuben

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Olomouc 1995

Předmluva

Tato skripta jsou určena zejména pro posluchače inženýrského studia, lze je však použít i v jiných typech studia, kde se přednáší tato látka v obdobném rozsahu. Skripta obsahují standardní partie teorie obyčejných diferenciálních rovnic, které tvoří nezbytnou část matematického vzdělání inženýra. Hlavní pozornost je věnována tzv. elementárním metodám řešení, tj. praktickým výpočetním algoritmům. Text si ale rovněž všímá přesného zavádění pojmů a správné formulace základních teoretických výsledků o těchto rovnicích. Důkazy nejsou vzhledem k rozsahu skript v naprosté většině prováděny. Na ukázku jsou uvedeny některé z nesčetných aplikací diferenciálních rovnic. V určitých částech text mírně přesahuje běžný kurs a aspoň pro orientaci se zmiňuje o dalších oblastech, kterými se zabývá vlastní teorie diferenciálních rovnic. Sem patří zvláště závěrečný oddíl, věnovaný rovnicím s nespojitou pravou stranou. Vzhledem k tomu bude možné skripta využít i pro eventuální přednášky vybraných partií z obyčejných diferenciálních rovnic v doktorandském studiu.

Pro hlubší zájemce o teorii obyčejných diferenciálních rovnic uvádím následující orientační (a velmi stručný) přehled doporučené literatury:
Mezi poměrně přístupné práce patří [17, 18, 20, 29]. Práce [21, 22] obsahují pěkný a přesný výklad tzv. elementárních metod včetně důkazů. Hlubokým zájemcům lze pak doporučit [5, 6, 14]. Jde však o velice náročné texty (zvláště [6] a [14]), které jsou určeny profesionálním matematikům s potřebným předběžným vzděláním. Ve všech uvedených pracích lze nalézt další literaturu o obyčejných diferenciálních rovnicích, která je nesmírně rozsáhlá.

Předkládaná skripta byla vysázena pomocí počítače PC užitím systému LaTeX. Obrázky ve druhém vydání byly nakresleny převážně pomocí programu METAFONT. I když tvorba zdrojového souboru je časově poměrně náročná, vzhled textu je odměnou za vynaloženou námahu. Autor doufá, že podoba skript usnadní čtenáři studium a ten ocení nejen vzhled skript ale snad i jejich obsah.

Na závěr bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Zdeňku Šmardovi, CSc. z FE VUT Brno a RNDr. Vladimíru Vetchému, CSc. z katedry matematiky VA Brno

za pečlivé pročtení prvního vydání skript a řadu připomínek, které zlepšily text a odstranily mnohé chyby a nepřesnosti. Ve druhém vydání byly navíc provedeny menší vzhledové úpravy a opraveny některé překlepy, nepřesnosti a chyby v zadáních příkladů a výsledcích.

Brno, 15. 4. 1995 Jaromír Kuben

Obsah

Seznam obrázků

Kapitola 1

Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

1.1 Úvod

Obyčejnými diferenciálními rovnicemi[1] rozumíme rovnice, v nichž se vyskytují neznámé funkce jedné proměnné, a to včetně svých derivací (alespoň nějaké derivace neznámé funkce se musí v rovnici vyskytnout; jinak by šlo o tzv. funkcionální rovnice). Úkolem je tyto funkce určit. Uvedeme několik příkladů takových rovnic.

1. $y' = y$
   Řešením je zřejmě např. funkce $y = e^x$ ale rovněž jakákoliv funkce tvaru $y = ce^x$, kde $c \in R$ je libovolná konstanta.

2. $y'' = -y$
   Řešením jsou například funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$ ale též funkce tvaru $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, kde c_1, $c_2 \in R$ jsou libovolné konstanty.

3. $2y'y^2 - (y')^3 - e^{3x} = 0$
   Řešením je např. funkce $y = e^x$.

4. $y''y^2 + y' + y^2 \sin x - \cos x = 0$
   Řešením je např. funkce $y = \sin x$.

Již z předchozích příkladů je vidět obrovskou různorodost těchto rovnic. Obyčejné diferenciální rovnice třídíme podle jejich *řádu*, což je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytuje. Tedy rovnice z 1. a 3. příkladu jsou prvního řádu, rovnice z 2. a 4. příkladu jsou druhého řádu.

[1] Diferenciální rovnice, v nichž neznámé funkce mají více proměnných, se nazývají parciální.

Řešením obyčejné diferenciální rovnice rozumíme funkci, která vyhovuje dané rovnici na nějakém intervalu. Z 1. a 2. příkladu je vidět, že takových řešení může být více, dokonce nekonečně mnoho. Jedno konkrétní řešení nazýváme *partikulární řešení*. Podaří-li se nám najít univerzální vzorec, ve kterém jsou zahrnuta všechna partikulární řešení, mluvíme o *obecném řešení*. Podrobněji, obecné řešení bude vzorec obsahující jednu nebo více libovolných konstant, jejichž konkrétními volbami dostaneme všechna možná partikulární řešení dané rovnice. Počet konstant odpovídá v podstatě řádu rovnice. Lze např. ukázat, že $y = ce^x$, $c \in R$, je obecné řešení výše uvedené rovnice $y' = y$.

Obyčejné diferenciální rovnice mají rozsáhlé aplikace. Některé si uvedeme v průběhu dalšího výkladu. S mnohými se setkáte v řadě dalších předmětů, jako mechanika, fyzika, pružnost, pevnost, základy elektrotechniky, předměty specializace atd. Bez nadsázky lze říci, že diferenciální rovnice patří k jedné z nejvýznamnějších oblastí, co se týká aplikací matematiky. S vývojem jejich teorie je spjata řada jmen významných matematiků minulosti i současnosti, včetně československých matematiků. Jelikož není naším úkolem dělat historický přehled, omezíme se na to, že v dalším výkladu uvedeme na vhodných místech aspoň jména se základními faktografickými údaji těch matematiků, kteří jsou spjati s počátky teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

1.2 Kvalitativní teorie diferenciálních rovnic 1. řádu

1.2.1 Základní pojmy

Nechť $F(x, y, z)$ je funkce tří proměnných, která je definovaná na otevřené množině $\Omega \subset R^3$. Pak rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu v implicitním tvaru* s neznámou $y(x)$.

Definice 1.1 Nechť $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J. Pak $h(x)$ se nazývá *řešení rovnice* (1.1) *na* J, jestliže $h(x)$ má derivaci, pro každé $x \in J$ je $(x, h(x), h'(x)) \in \Omega$ a platí

$$F[x, h(x), h'(x)] = 0, \quad x \in J.$$

Při vyšetřování vlastností obyčejných diferenciálních rovnic je důležitý případ, kdy lze z rovnice (1.1) osamostatnit y', tj. získat tzv. *explicitní tvar obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu*

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset R^2$.

Osamostatnění y' není někdy jednoznačné. Pak rovnici v implicitním tvaru odpovídá (lokálně) více rovnic v explicitním tvaru. Např. rovnice

$$y'^2 - x^2 = 0$$

je ekvivalentní dvěma rovnicím

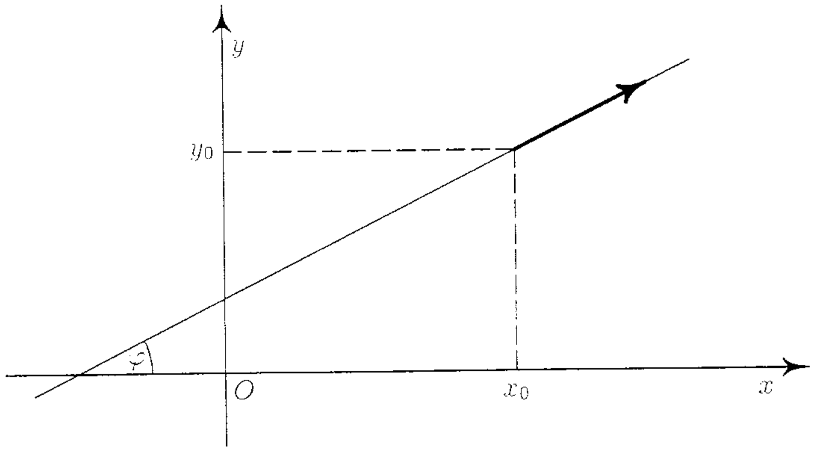
$$y' = x, \; y' = -x.$$

Ne vždy je prakticky (tj. pomocí elementárních funkcí) možné rovnici (1.1) rozřešit vzhledem k y'. Jako obecný nástroj zde slouží věta o implicitní funkci —viz např. [7]. V dalším budeme předpokládat, že rovnice má tvar (1.2).

Jestliže $y(x)$ je řešení rovnice (1.2), které v bodě x_o má hodnotu y_o, tj. $y(x_o) = y_o$ (říkáme, že řešení prochází bodem (x_o, y_o)), pak musí platit

$$y'(x_o) = f[x_o, y(x_o)] = f(x_o, y_o).$$

Jestliže tedy řešení prochází bodem (x_o, y_o), jsme schopni říci, i když nemáme vzorec $y(x)$, jaká je směrnice tečny (tj. derivace) k $y(x)$ v bodě (x_o, y_o). Je to totiž právě číslo $f(x_o, y_o)$. Z toho důvodu zavádíme následující pojmy.



Obr. 1.1: Lineární element diferenciální rovnice

Definice 1.2 Trojice čísel $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, $(x_o, y_o) \in \Omega$, se nazývá *lineární element* diferenciální rovnice (1.2). Množina všech lineárních elementů dané diferenciální rovnice tvoří její *směrové pole.*

Každý lineární element můžeme znázornit jako vázaný vektor (šipku) umístěný do bodu (x_o, y_o), přičemž přímka určená tímto vektorem má směrnici $f(x_o, y_o)$ — viz obr. 1.1, kde $\operatorname{tg} \varphi = f(x_o, y_o)$.

Tento vázaný vektor lze předem zkonstruovat v každém bodě $(x_o, y_o) \in \Omega$. Funkce $y(x)$ je pak řešením rovnice (1.2) právě tehdy, když má následující vlastnost:

V každém bodě, kterým $y(x)$ prochází, je příslušný vázaný vektor tečný ke grafu funkce $y(x)$.

Tuto vlastnost lze využít k vytvoření představy, jak asi řešení dané rovnice vypadá. Sestrojíme hustou síť bodů a v nich nakreslíme lineární elementy. Ty nám ukazují, jak asi řešení probíhají.

Příklad 1.1 Sestrojte směrové pole rovnice $y' = x^2+y^2$ a načrtněte tvar řešení.

Řešení: Určíme množiny bodů, které odpovídají stejným hodnotám směrnice k. Ty získáme řešením rovnice $x^2 + y^2 = k$. Zřejmě musí být $k \geq 0$.
Pro $k = 0$ dostaneme jediný bod $(0,0)$, v němž je tečna vodorovná, tj. je to osa x.
Pro $k = 1$ dostaneme body na kružnici $x^2+y^2 = 1$, v nichž tečny svírají s osou x úhel $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
Pro $k = 2$ dostaneme body na kružnici $x^2+y^2 = 2$, v nichž tečny svírají s osou x úhel $\operatorname{arctg} 2 \doteq 1,1071$.
Pro $k = \frac{1}{2}$ dostaneme body na kružnici $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$, v nichž tečny svírají s osou x úhel $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \doteq 0,4636$ atd.
Situace je znázorněna na obr. 1.2, v němž jsou rovněž načrtnuta tři řešení. Podrobněji je možné zjistit, že každé řešení je rostoucí a je definované pouze na ohraničeném otevřeném intervalu, v jehož krajních bodech má nevlastní limity.

Na závěr se ještě stručně zmíníme o tzv. *Eulerových*[2] *polygonech*. Nechť je $x_o < x_1 < \cdots < x_n$, $n \geq 1$. Pokusíme se přibližně najít řešení $y(x)$ na intervalu $\langle x_o, x_n \rangle$, přičemž předpokládáme, že $y(x_0) = y_0$. Sestrojíme přímku, která prochází bodem (x_0, y_0) a má směrnici $f(x_0, y_0)$. Ta protne přímku $x = x_1$ v bodě (x_1, y_1). Nyní sestrojíme přímku, která prochází bodem (x_1, y_1) a má směrnici $f(x_1, y_1)$. Ta protne přímku $x = x_2$ v bodě (x_2, y_2) atd. Lomená čára určená body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ se nazývá Eulerův polygon. Situace je zachycena na obr. 1.3.

V teorii diferenciálních rovnic jsou důležité následující tři otázky:

— zda má daná rovnice vůbec nějaké řešení,

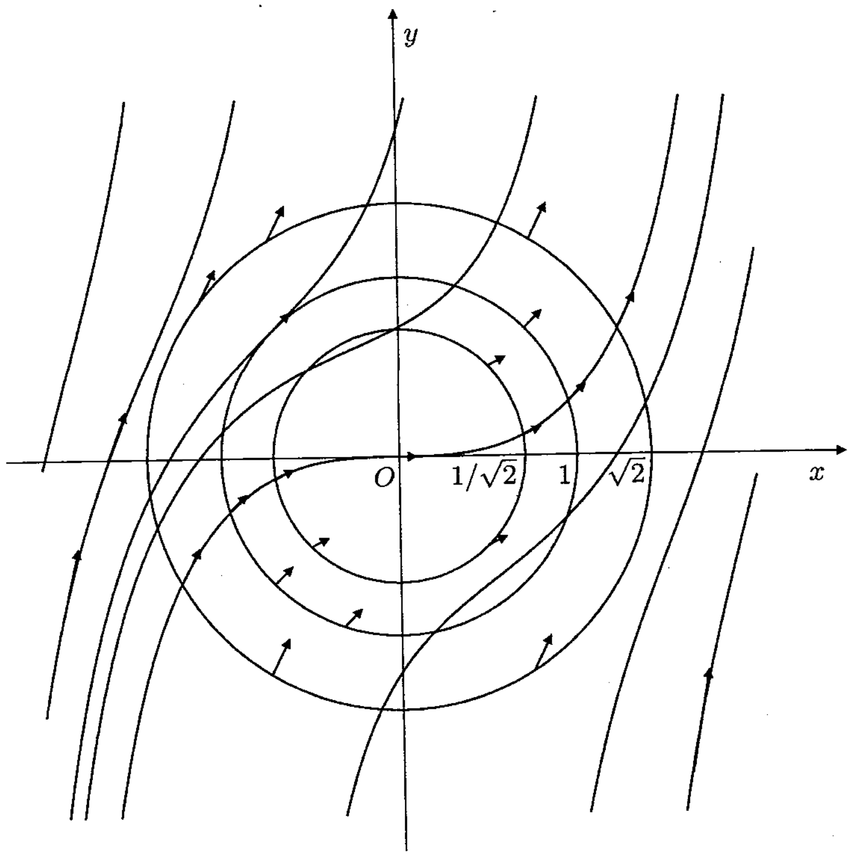
— pokud nějaké řešení má, kolik je jich celkem,

— jak lze řešení nalézt.

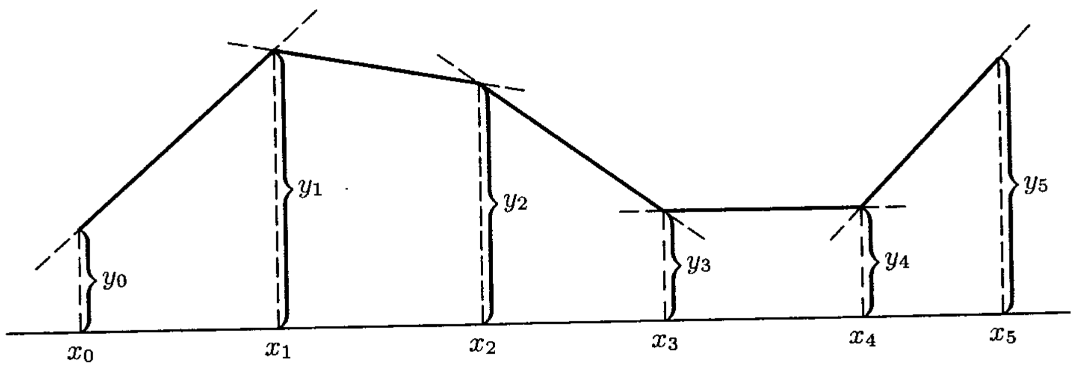
Odpověď na tyto otázky bude částečně zodpovězena v následujících odstavcích.

---

[2]**Leonard Euler** (1707– 1783) (čti ojler) — švýcarský matematik, fyzik, mechanik a astronom. Působil převážně v Petrohradě. Jeden z největších matematiků všech dob. Napsal kolem 850 prací (včetně mnohodílných monografií). Ovlivnil všechny základní matematické disciplíny . Od r. 1766 byl slepý (diktoval svým žákům).



Obr. 1.2: Směrové pole rovnice $y' = x^2 + y^2$



Obr. 1.3: Eulerův polygon

1.2.2 Existence a jednoznačnost řešení

Již z úvodních příkladů na str. 1 je zřejmé, že zcela běžné rovnice mají nekonečně mnoho řešení. Klást si proto otázku, zda řešení je jediné, není rozumné. Jednoznačnost je třeba chápat jiným způsobem a to tak, že na řešení budeme mít ještě další požadavky. Rovněž je třeba zpřesnit vlastnost mít řešení.

Definice 1.3 Nechť $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (1.2), které je definované na nějakém intervalu I obsahujícím bod x_0 a které splňuje tzv. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, se nazývá *Cauchyova*[3] *počáteční úloha.*

Bude nás zajímat, za jakých podmínek bude mít počáteční úloha řešení a kdy bude toto řešení jediné.

Věta 1.1 (Existenční) *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině Ω. Pak pro každé $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha*

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

alespoň jedno řešení.

Spojitost tedy zaručuje, že každým bodem prochází alespoň jedno řešení, definované na nějakém (obecně dostatečně krátkém) intervalu.Nezajímá nás zatím, jak moc lze tento interval „natáhnout". Toto řešení však nemusí být jediné, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.2 Uvažujme rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$. Ověřte, že tato rovnice má (mimo jiná) řešení $y \equiv 0$ a řešení tvaru

$$y_c = \begin{cases} (x-c)^2, & x \geq c, \\ 0, & x < c, \end{cases}$$

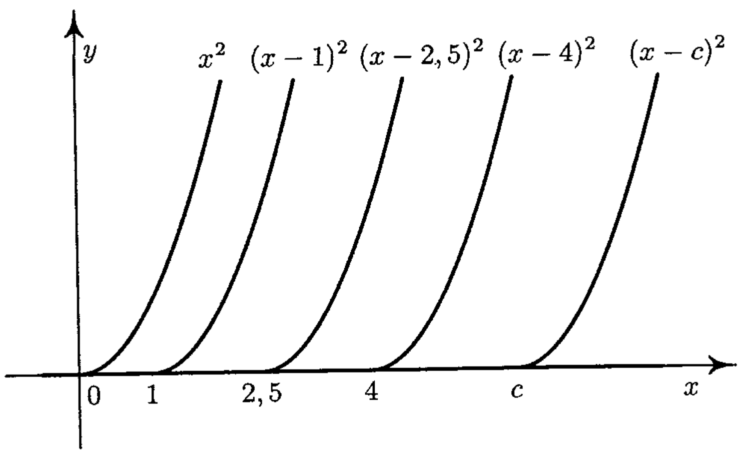
kde $c \in R_0^+$ je libovolné číslo.

Řešení: Skutečně. Funkce $y \equiv 0$ naši rovnici splňuje a totéž platí pro y_c, když $x < c$.
Dále pro $x \geq c$ je $y_c' = 2(x-c) = 2\sqrt{(x-c)^2} = 2\sqrt{y_c}$.
Tedy počáteční úloha

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \ y(0) = 0$$

má nekonečně mnoho řešení, a to $y \equiv 0$ a $y_c = \begin{cases} (x-c)^2, & x \geq c, \\ 0, & x < c, \end{cases}$, $c \geq 0$ — viz obr. 1.4.

[3] **Augustin Louis Cauchy** (1789–1857) (čti koši) — vynikající francouzský matematik. Napsal přes 700 prací. Položil základy soudobé matematiky, především analýzy.

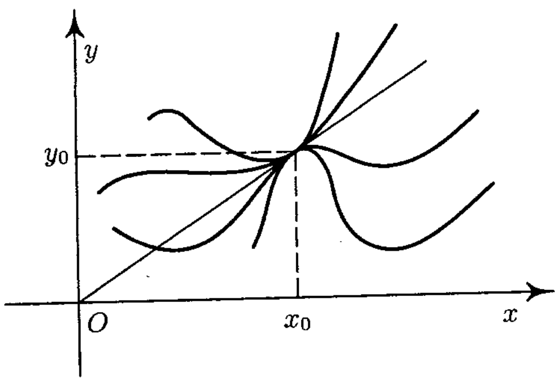


Obr. 1.4: Řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$

Je zřejmé, že pokud prochází daným bodem (x_0, y_0) více různých řešení, která se „rozvětvují" v daném bodě, mají všechna tato řešení v bodě (x_0, y_0) společnou tečnu — viz obr. 1.5.

Nezajímá nás, zda se řešení rozvětvuje někde „dál". To vystihuje následující definice.

Definice 1.4 Řekneme, že počáteční problém (1.3) *má jediné řešení,* jestliže pro každá dvě jeho řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$ existuje vhodné číslo $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $y_1(x) = y_2(x)$.



Obr. 1.5: Nejednoznačnost řešení

Tedy v dostatečně malém okolí bodu x_0 se musí řešení shodovat. Existuje řada podmínek, které zaručují jednoznačnost. Nejznámější je tzv. *Lipschitzova*[4] *podmínka* (lokální):

> Existují konstanta $K > 0$ a okolí O bodu (x_0, y_0), $O \subset \Omega$, takové, že pro každé dva body $(x, y_1) \in O$, $(x, y_2) \in O$ je
>
> $$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Aby byla tato podmínka splněna, stačí, aby existovala *ohraničená* (v okolí bodu (x_0, y_0)) parciální derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, což je splněno např. pokud je tato derivace *spojitá*. Tedy platí:

Věta 1.2 (O existenci a jednoznačnosti) *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset R^2$ a v každém bodě je splněna Lipschitzova podmínka. Pak pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha* (1.3) *právě jedno řešení.*

Důkaz: Nebudeme provádět všechny detaily, ale pouze naznačíme myšlenku konstrukce řešení. Ta totiž může sloužit jako základ numerických metod založených na tzv. *Banachově*[5] *větě o pevném bodu.*

Zintegrujeme-li rovnici (1.3) na intervalu $\langle x_0, x \rangle$, dostaneme

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\, ds$$

a po úpravě obdržíme, že řešení vyhovuje integrální rovnici

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\, ds.$$

Naopak lze ukázat, že libovolné řešení předchozí integrální rovnice je řešení úlohy (1.3). Řešení integrální rovnice je možné získat tzv. *metodou postupných aproximací*. Položme $y_0(x) = y_0$ pro $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, kde $\delta > 0$ je dostatečně malé číslo. Dále definujme:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_0(s)]\, ds, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_1(s)]\, ds, \\ &\vdots \end{aligned}$$

[4] **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832–1903) (čti lipšic) — význačný německý matematik. Zabýval se diferenciálními rovnicemi, teorií čísel, vícerozměrnou geometrií a dalšími oblastmi. Pracoval rovněž v hydrodynamice a analytické mechanice.

[5] **Stefan Banach** (1892–1945) — vynikající polský matematik. Jeden ze zakladatelů funkcionální analýzy. Patří k nejvýznamnějším matematikům tohoto století.

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_n(s)]\, ds,$$
$$\vdots$$

Lze dokázat, že posloupnost funkcí $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k (jedinému) řešení úlohy (1.3). Funkce $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, se nazývají postupné aproximace.

Definice 1.5 Řešení $y(x)$ rovnice (1.2), které má tu vlastnost, že v každém jeho bodě je porušena jednoznačnost, se nazývá *singulární*.

Nebudeme se detailně zabývat vyšetřováním tohoto pojmu — viz např. [23, str. 19] nebo [29, str. 128]. Všimněte si pouze, že řešení $y = 0$ rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ vyšetřované na str. 6 je singulární.

Cvičení

1. Znázorněte směrové pole následujících rovnic a načrtněte průběh některých řešení.

a) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ b) $y' = x + y^2$ c) $y' = x^2 + y$
d) $y' = \sin(x + y)$ e) $y' = |x| + |y|$ f) $y' = \dfrac{1}{x + y}$

2. Najděte prvé dva členy posloupnosti postupných aproximací následujících počátečních úloh.

a) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ b) $y' = x - y$, $y(1) = 0$
c) $y' = xy$, $y(1) = 2$ d) $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = -1$
e) $y' = \dfrac{x}{y}$, $y(1) = -1$

Výsledky:

2. a) $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$
b) $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, $y_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{5}{6}$
c) $y_0(x) = 2$, $y_1(x) = x^3 + 1$, $y_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}$
d) $y_0(x) = -1$, $y_1(x) = -1 - \ln x$, $y_2(x) = -1 - \ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x$
e) $y_0(x) = -1$, $y_1(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, $y_2(x) = -1 + \ln 2 - \ln(x^2 + 1)$

1.3 Elementární metody řešení

Jak jsme se již zmínili, je z hlediska uživatele (inženýra) nejdůležitější určit řešení dané rovnice. Ideální by bylo samozřejmě najít obecné řešení každé rovnice. To však bohužel není možné. Nejprve je třeba si uvědomit, co se obvykle rozumí slovy „najít řešení". Většinou si pod tím představujeme „konečný vzoreček" pro $y(x)$, tj. přesněji vyjádření $y(x)$ jako elementární funkce — viz [12], str. 11. Uvažujme nyní speciální rovnici tvaru

$$y' = f(x).$$

Zřejmě jde o nalezení neurčitého integrálu funkce $f(x)$. Z integrálního počtu je známo, že všechna řešení této úlohy mají tvar

$$y(x) = \int f(x)\,dx + c,$$

což je obecné řešení uvedené rovnice. Stejně tak je ovšem dobře známo, že i když $f(x)$ je velmi jednoduchá elementární funkce, nemusí být $\int f(x)\,dx$ elementární funkce. Z toho tedy vyplývá, že když už tak jednoduchou diferenciální rovnici nelze řešit ve třídě elementárních funkcí, tím spíše to nelze čekat v obecném případě u rovnice (1.2). Dokonce neuspějeme, když bychom připustili vyjádření obsahující elementární funkce a jejich neurčité integrály (tzv. *řešení pomocí kvadratur*).Tento negativní výsledek vyplývá z prací S. Liea[6]. Naštěstí to ovšem neznamená, že žádné konkrétní diferenciální rovnice nelze řešit v konečném tvaru. Naopak. Řadu jednoduchých rovnic, které jsou významné v aplikacích, lze řešit ve třídě elementárních funkcí nebo alespoň pomocí kvadratur. Neexistuje ovšem žádné kritérium, jak poznat, zda danou rovnici tímto způsobem řešit lze nebo ne. V dalším oddílu jsou uvedeny nejdůležitější typy rovnic, které lze v uvedeném smyslu vyřešit. Jde o tzv. *elementární metody řešení* obyčejných diferenciálních rovnic. Velmi podrobný přehled lze nalézt v [10].

Z předchozích odstavců vyplývá důležitost tzv. *kvalitativních metod* v teorii diferenciálních rovnic. Jde o zkoumání vlastností řešení dané rovnice, aniž máme explicitní vzorce řešení, což je, jak bylo naznačeno, nejčastější situace. Jde tedy o to, jak získat informace o řešeních rovnice pouze z vlastností pravých stran $f(x, y)$ rovnice $y' = f(x, y)$. I když teprve tady začíná vlastní teorie obyčejných diferenciálních rovnic, jsou bohužel hlubší poznatky z těchto partií zcela mimo rámec našich skript. Patří sem mimo jiné např. výsledky odstavce 1.2.2 týkající se existence a jednoznačnosti řešení. Nepatrnou ukázkou jsou rovněž tvrzení, která jsou uvedena bez důkazu na závěr příkladu 1.1. Např. to, že řešení jsou rostoucí, plyne z toho, že zřejmě až na bod $(0, 0)$ je vždy $y'(x) > 0$. Rovnice

[6] **Marius Sophus Lie** (1842–1899) (čti li) — norský matematik. Zabýval se teorií grup a diferenciální geometrií. Zavedl tzv. Lieovy grupy a jejich invarianty. Tento pojem je velmi významný v mnoha odvětvích soudobé matematiky a teoretické fyziky.

$y' = x^2 + y^2$, která je zde vyšetřována, je speciálním případem tzv. *Riccatiho*[7] *rovnice*. Z výsledků, které o ní dokázal J. Liouville[8], vyplývá, že v našem případě ji nelze řešit ve třídě elementárních funkcí — viz [29].

Dalším důsledkem je význam numerických metod. V praxi se nelze spokojit s tím, že řešení nelze získat explicitně, a nezbývá pak, než získat řešení přibližně. S problematikou numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic se setkáte v přednáškách z numerické matematiky — viz např. [8, 9, 19, 25].

V následujícím přehledu jsou všechny rovnice až na jednu uvedeny ve tvaru $y' = f(x, y)$. Je tedy třeba konkrétní rovnici na tento tvar upravit a pak zvažovat, zda je některého z uvedených typů. Tato fáze dělá studentům největší potíže. Je třeba procházet uvedené typy jeden po druhém, nejlépe zhruba v uvedeném pořadí, a porovnávat, zda jde o daný typ. Je možné, že konkrétní rovnice spadá současně do více typů. Pak dáme přednost tomu, který má jednodušší postup řešení. Rovněž je třeba upozornit, že následující výklad není vždy absolutně přesný a je především zaměřen na formalismus řešení uvedených typů rovnic.

1.3.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu nazýváme rovnice se *separovanými proměnnými*, jestliže má tvar

$$y' = f(x)g(y). \tag{1.4}$$

Předpokládejme, že f a g jsou spojité funkce na nějakých otevřených intervalech a $g(y) \neq 0$. Pak lze ukázat, že je zaručena existence a jednoznačnost řešení a že každé řešení dostaneme následujícím postupem:
Dosadíme $y' = \frac{dy}{dx}$ a dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Odseparujeme proměnné, tj. převedeme např. vše s y na levou stranu a vše s x na pravou stranu. Vyjde

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Získanou rovnost zintegrujeme. Dostaneme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

[7] **Jacopo Francesco Riccati** (1676–1754) (čti rikati) — italský matematik a mechanik. Zabýval se integrálními a diferenciálními rovnicemi mechaniky. Jeden z vícečlenné rodiny italských matematiků stejného příjmení.

[8] **Joseph Liouville** (1809–1882) (čti liuvil) — významný francouzský matematik. Zasáhl do téměř všech oblastí tehdejší matematiky.

Nechť $G(y)$ je primitivní funkce k $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$. Pak obecné řešení má tvar

$$G(y) = F(x) + c.$$

kde $c \in R$ je integrační konstanta. Přesné zdůvodnění uvedeného postupu je založeno na substituci v neurčitém integrálu a větě o implicitní funkci — viz [20, str. 8]. Řešení tedy dostaneme v implicitním tvaru a ne vždy se nám podaří osamostatnit neznámou funkci $y(x)$.

Dále si všimněme, že jestliže $g(y_0) = 0$ pro nějaké $y_0 \in R$, je $y(x) \equiv y_0$ konstantní řešení rovnice (1.4), neboť na levé straně je $y'(x) = (y_0)' \equiv 0$ a na pravé straně je $f(x)g[y(x)] = f(x)g(y_0) \equiv 0$. Poznamenejme, že toto řešení někdy může být singulární — viz např. [20, str. 9].

Poznámka 1.1 Je na čase, abychom se zmínili obecně o řešení počátečního problému (1.3). Jediný způsob, který se naučíme, bude ten, že nejprve najdeme obecné řešení. To bude u rovnic 1. řádu obsahovat jednu neznámou konstantu. Tu určíme tak, že do obecného řešení dosadíme počáteční podmínku. Postup bude ilustrován v následujícím příkladu.

Příklad 1.3 Řešte počáteční problém $y' = -2xy$, $y(0) = 2$.

Řešení: Jde o rovnici typu (1.4), kde $f(x) = -2x$, $g(y) = y$. Nejprve budeme muset najít obecné řešení. Protože v našem případě je $g(y) = y = 0$ právě pro $y = 0$, je jedním řešením $y \equiv 0$.

Pro $y \neq 0$ postupně dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + K$$

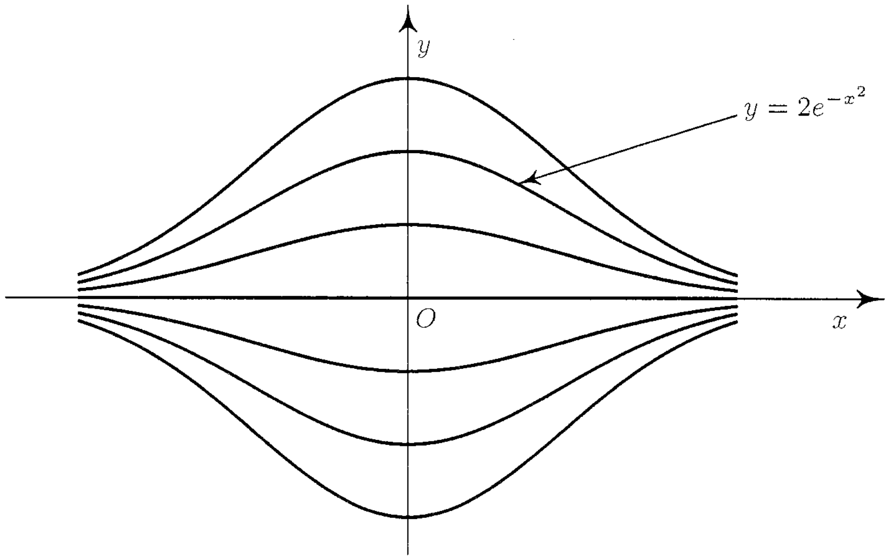
a po odlogaritmování

$$|y| = e^{-x^2}e^K.$$

Číslo e^K reprezentuje kladnou konstantu. Snadno se ověří, že označíme-li $e^K = C$ a připustíme-li, že $C \in R$ je libovolná (i nula a záporná), lze vynechat absolutní hodnotu. Tedy obecné řešení bude mít tvar

$$y = Ce^{-x^2}, \quad C \in R.$$

Všimněte si, že v tomto vzorci je zahrnuto i řešení $y \equiv 0$.



Obr. 1.6: Řešení rovnice $y' = -2xy$

Nyní najdeme řešení počátečního problému. Dosazením podmínky $y(0) = 2$ do obecného řešení dostaneme

$$2 = Ce^{-0^2} \quad \Longrightarrow \quad C = 2.$$

Tedy hledané partikulární řešení je $y = 2e^{-x^2}$. Situace je znázorněna na obr. 1.6.

Příklad 1.4 Najděte obecné řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ — viz přík. 1.2 na str. 6.

Řešení: Jde opět o rovnici tvaru (1.4), kde $f(x) = 1$, $g(y) = 2\sqrt{|y|}$. Přitom $g(y)$ je definovaná pro každé $y \in R$ a $g(y) = 2\sqrt{|y|} = 0$ právě tehdy, když $|y| = 0$, tj. když $y = 0$. Proto $y \equiv 0$ je řešení.

Pro $y \neq 0$ je

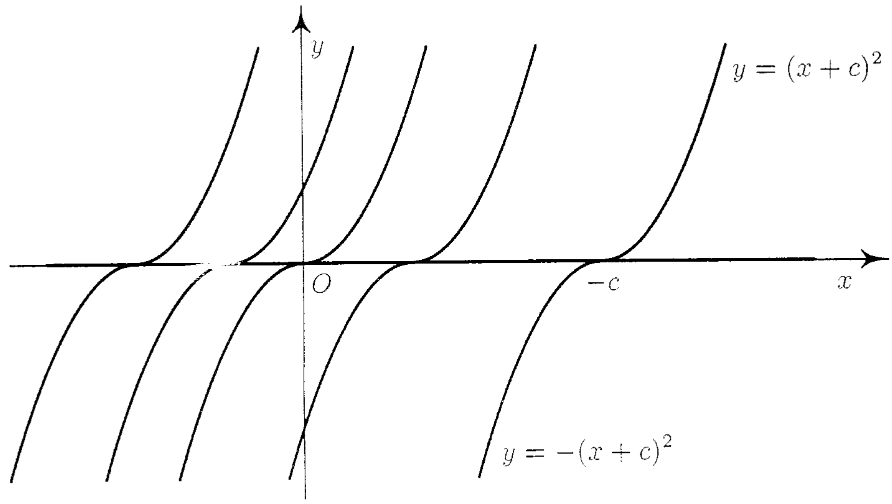
$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \int dx \tag{1.5}$$

Vypočteme nejprve integrál na levé straně. Pro $y > 0$ je:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \frac{1}{2}\int (y)^{-\frac{1}{2}}\, dy = \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} = \sqrt{|y|}.$$



Obr. 1.7: Obecné řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$

Pro $y < 0$ je (použijeme substituci):

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \frac{1}{2}\int(-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = \left|\begin{array}{rcl} y & = & -t \\ dy & = & -dt \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int(t)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$
$$= -\sqrt{t} = -\sqrt{-y} = -\sqrt{|y|}.$$

Tento výsledek můžeme zapsat jediným vzorcem $\sqrt{|y|}\operatorname{sgn} y$. Nyní z (1.5) dostaneme

$$\sqrt{|y|}\operatorname{sgn} y = x + c.$$

Protože pro $y \neq 0$ je $\sqrt{|y|} > 0$, musí mít $x + c$ stejné znaménko jako y. V horní polorovině $y > 0$ tedy dostaneme

$$\sqrt{y} = x + c, \quad x > -c, \quad \Longrightarrow \quad y = (x + c)^2, \quad x > -c,$$

a podobně v dolní polorovině $y < 0$ dostaneme

$$-\sqrt{-y} = x + c, \quad x < -c, \quad \Longrightarrow \quad y = -(x + c)^2, \quad x < -c.$$

Řešení je tedy tvořeno částmi parabol — viz obr. 1.7. Přitom $y \equiv 0$ je singulární řešení, jak již bylo dříve zjištěno v příkladu 1.2.

Poznámka 1.2 Rovnice, které se nějakou úpravou dají převést na rovnice tvaru (1.4), se nazývají *separovatelné*. Většina dalších rovnic bude právě tohoto typu.

1.3.2 Homogenní rovnice

Definice 1.6 Funkce $g(x, y)$ definovaná na $R^+ \times R^+$ se nazývá *homogenní (řádu nula)*, jestliže pro každé $t > 0$ platí

$$g(tx, ty) = g(x, y).$$

Je-li $g(x, y)$ homogenní, pak volbou $t = \frac{1}{x}$ dostaneme $g(x, y) = g(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y) = g(1, \frac{y}{x})$. Označíme-li $f(z) = g(1, z)$, docházíme k závěru, že každou homogenní funkci lze napsat ve tvaru $f(\frac{y}{x})$, kde f je vhodná funkce. Rovnici (1.2) nazýváme *homogenní*, jestliže její pravá strana je homogenní, tj. má-li (po úpravě) tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Tato rovnice se pak řeší zavedením nové neznámé funkce $u(x)$ substitucí $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Odtud máme $y(x) = xu(x)$ a tedy $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Po dosazení vyjde (u píšeme bez argumentu x)

$$u + xu' = f(u)$$

a po úpravě dostaneme

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, kterou už umíme řešit. Po vyřešení této rovnice se musíme vrátit k původní neznámé $y(x)$.

Poznámka 1.3 Z postupu je zřejmé, že musí být $x \neq 0$. Často se stává, že tato podmínka vznikne až uměle během úprav a po návratu k původní proměnné opět zmizí, takže řešení existují i pro $x = 0$. Zda tomu tak skutečně je, je třeba vždy konkrétně ověřit.

Příklad 1.5 Najděte obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$.

Řešení: Nejprve osamostatníme y'. Dostaneme

$$y' = -\frac{x + y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y' = -1 - \frac{y}{x}.$$

To je homogenní rovnice, kde $f(u) = -1 - u$. Zavedeme substituci $y = xu$, $y' = u + xu'$. Vyjde

$$u + xu' = -1 - u \quad \Longrightarrow \quad u' = -\frac{2u + 1}{x}.$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Při označení $u' = \frac{du}{dx}$ obdržíme postupně

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2u+1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{2u+1} = -\frac{dx}{x}, \quad 2u+1 \neq 0, \tag{1.7}$$

a po integraci

$$\int \frac{du}{2u+1} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Vypočteme substitucí integrál vlevo:

$$\int \frac{du}{2u+1} = \left| \begin{array}{rcl} 2u+1 & = & t \\ 2du & = & dt \\ du & = & \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|2u+1|.$$

Tedy

$$\frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|x| + \ln c.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$\sqrt{|2u+1|} = \frac{c}{|x|}.$$

Osamostatněním u vyjde postupně (přeznačíme $c^2 = K$)

$$|2u+1| = \frac{c^2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{x^2} - 1\right) = \frac{K - x^2}{2x^2}.$$

Nyní dosadíme $y = xu$ a přeznačíme $\frac{K}{2} = L$. Vyjde

$$y = x\frac{K - x^2}{2x^2} = \frac{K - x^2}{2x} = \frac{L}{x} - \frac{x}{2}.$$

Vyloučili jsme případ $2u + 1 = 0$. Rovnice (1.7) má konstantní řešení $u = -\frac{1}{2}$ a tedy původní rovnice má řešení $y = xu = x(-\frac{1}{2}) = -\frac{x}{2}$, což je zahrnuto v předchozím vzorci pro $L = 0$. Obecné řešení má tedy tvar

$$y = \frac{L}{x} - \frac{x}{2}, \quad x \neq 0, \ L \in R.$$

Výsledek je znázorněn na obr. 1.8.

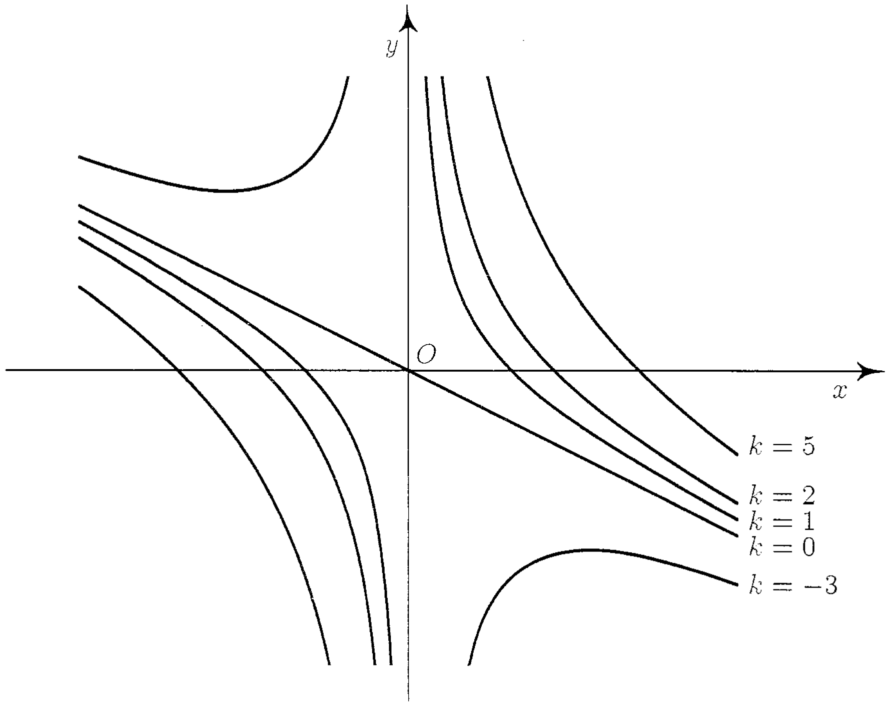
1.3.3 Rovnice tvaru $y' = f(ax + by + c)$

Jde o rovnice tvaru

$$y' = f(ax + by + c), \tag{1.8}$$

kde $a, b, c \in R$, $ab \neq 0$. Tyto rovnice nemají speciální název. Řešíme je jednoduchou substitucí

$$u(x) = ax + by(x) + c.$$



Obr. 1.8: Obecné řešení rovnice $x + y + xy' = 0$

Pro derivaci vyjde

$$u'(x) = a + by'(x) \implies y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Po dosazení vyjde

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

a po osamostatnění u' má rovnice tvar

$$u' = bf(u) + a,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Po jejím vyřešení se musíme vrátit k původní proměnné.

Příklad 1.6 Najděte obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{1}{x + y - 2}$.

Řešení: Zřejmě jde o rovnici typu (1.8), kde $f(z) = \frac{1}{z}$, $a = b = 1$, $c = -2$. Zavedeme substituci $u = x + y - 2$, tj. $u' = 1 + y'$, odkud máme $y' = u' - 1$. Po dosazení vyjde

$$u' - 1 = \frac{1}{u} \implies u' = \frac{1 + u}{u}, \quad u \neq 0. \tag{1.9}$$

Tato rovnice má separované proměnné, tj. postupně dostáváme

$$\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{udu}{1+u} = dx, \quad u+1 \neq 0,$$

a po integraci

$$\int \frac{udu}{1+u} = \int dx.$$

Je

$$\int \frac{u}{1+u}\, du = \int \frac{u+1-1}{1+u}\, du = \int (1 - \frac{1}{1+u})\, du = u - \ln|1+u|.$$

Tedy

$$u - \ln|1+u| = x + C$$

a po návratu k původní neznámé dostáváme

$$x + y - 2 - \ln|1 + x + y - 2| = x + C.$$

Označíme-li $C + 2 = K$, vyjde

$$y - K = \ln|x + y - 1|$$

a po odlogaritmování a přeznačení $e^{-K} = L$ máme

$$e^y L = x + y - 1.$$

Vyloučili jsme případ $u + 1 = 0$. Rovnice (1.9) má řešení $u = -1$ a tedy pro původní neznámou dostáváme

$$x + y - 2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 - x,$$

což je, jak se snadno přesvědčíme, rovněž řešení, které je zahrnuto v předchozím vzorci pro $L = 0$. Obecné řešení (v implicitním tvaru) je tedy

$$Le^y = x + y - 1, \quad L \in R.$$

1.3.4 Rovnice tvaru $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}), \tag{1.10}$$

kde $a_i, b_i, c_i \in R$, $i = 1, 2$. Budeme předpokládat, že

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pokud je totiž tento determinant roven nule, je možné rovnici převést na tvar (1.8). Vskutku. Pak je totiž jeden (nechť je to např. první) řádek násobkem druhého a tedy existuje vhodné $k \in R$ tak, že

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

a rovnici lze řešit substitucí $z(x) = a_2x + b_2y(x)$.

Pokud je determinant nenulový, provedeme posunutí souřadnic

$$\begin{aligned} x &= t + m, \\ y(x) &= u(t) + n, \end{aligned}$$

tak, aby pravá strana rovnice (1.10) měla tvar $f(\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u})$. Mění se tedy nezávisle proměnná x i závisle proměnná y. Po dosazení za x a y do čitatele a jmenovatele pravé strany (1.10) dostaneme vzhledem k žádanému tvaru, že má platit

$$a_i(t + m) + b_i(u + n) + c_i = a_it + b_iu, \quad i = 1, 2,$$

tj.

$$\begin{aligned} a_1m + b_1n + c_1 &= 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má právě jedno řešení, protože matice soustavy má hodnost 2, tj. je regulární. Označme dále

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \dot{u} = \frac{du}{dt}.$$

Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d(u + n)}{dt}\frac{d(x - m)}{dx} = \dot{u} \cdot 1 = \dot{u}.$$

Po dosazení přejde rovnice (1.10) v rovnici

$$\dot{u} = f\Big(\frac{a_1t + b_1u}{a_2t + b_2u}\Big),$$

což je homogenní diferenciální rovnice.

Příklad 1.7 Najděte obecné řešení rovnice $xy' + 2yy' - 6 + 3x + 3y - 3y' = 0$.

Řešení: Osamostatníme nejprve y'. Vyjde

$$y'(x + 2y - 3) = 6 - 3x - 3y$$

a tedy

$$y' = \frac{6-3x-3y}{x+2y-3}, \quad x+2y-3 \neq 0. \tag{1.11}$$

Jde o rovnici typu (1.10), kde $a_1 = -3$, $b_1 = -3$, $c_1 = 6$, $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = -3$, tedy $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Vyřešíme soustavu

$$\begin{aligned} -3m - 3n + 6 &= 0, \\ m + 2n - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Dostaneme $m = n = 1$. Označme

$$\begin{aligned} x &= t+1, \\ y &= u+1 \end{aligned}$$

a po dosazení do (1.11) a úpravě obdržíme homogenní rovnici

$$\dot{u} = \frac{-3t-3u}{t+2u} = \frac{-3-3\frac{u}{t}}{1+2\frac{u}{t}}.$$

Položíme $u(t) = tv(t)$. Pak $\dot{u} = v + t\dot{v}$ a dostáváme

$$v + t\dot{v} = \frac{-3-3v}{1+2v}, \quad 1+2v \neq 0.$$

Po osamostatnění $\dot{v}$ vyjde rovnice se separovanými proměnnými

$$\dot{v} = -\frac{1}{t}\,\frac{2v^2+4v+3}{1+2v}.$$

Nyní položíme $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$, odseparujeme neznámé a integrujeme. Dostaneme

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{t}\,\frac{2v^2+4v+3}{1+2v} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1+2v}{2v^2+4v+3}\,dv = -\int \frac{dt}{t}.$$

Integrál na levé straně je z racionální ryze lomené funkce, která má ve jmenovateli kvadratický trojčlen s komplexními kořeny. Je to tedy parciální zlomek, který je nutné před integrací upravit — viz [33].

$$\frac{2v+1}{2v^2+4v+3} = \frac{\frac{1}{2}(4v+4)-1}{2v^2+4v+3} = \frac{1}{2}\,\frac{4v+4}{2v^2+4v+3} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(v+1)^2+\frac{1}{2}}.$$

První zlomek vede na logaritmus, druhý na arkustangens. Celkově vyjde

$$\frac{1}{2}\ln|2v^2+4v+3| - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{v+1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\ln|t| + \ln C.$$

Nyní musíme dosadit původní proměnné, tj. $t = x - 1$, $v = \frac{u}{t} = \frac{y-1}{x-1}$. Vyjde

$$\frac{1}{2} \ln \left| 2\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2 + 4\frac{y-1}{x-1} + 3 \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}\frac{x+y-2}{x-1} = -\ln|x-1| + \ln C.$$

Po úpravě a odlogaritmování vyjde při označení $C^2 = K$

$$2y^2 + 3x^2 + 4xy - 10x - 8y + 9 = Ke^{\sqrt{2}\operatorname{arctg} \sqrt{2}\frac{x+y-2}{x-1}},$$

což je „obecné" řešení rovnice (1.11) v implicitním tvaru. Všimněte si, že tento vzorec nedává řešení procházející body tvaru $(1, y)$. Rovněž uvažovaná podmínka $x + 2y - 3 \neq 0$ vznikla až během úprav a v původní rovnici není. Chybějící řešení by bylo možné získat řešením rovnice

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + 2y - 3}{6 - 3x - 3y},$$

v níž je zaměněn význam x a y, tj. $x = x(y)$.

1.3.5 Lineární rovnice

Jde o velmi jednoduchou rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{1.12}$$

Vlastností této rovnice si všimneme mnohem podrobněji, než jsme to dělali u předchozích typů. Bude to proto, že tato rovnice má řadu důležitých vlastností, které budou analogicky platit u lineárních rovnic vyšších řádů a u lineárních systémů, se kterými se setkáme později.

Věta 1.3 *Nechť funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité na intervalu I. Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 \in R$ jsou libovolná čísla. Pak počáteční problém*

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

má právě jedno řešení a to existuje na celém intervalu I.

Důkaz: Rovnice (1.12) je speciálním případem rovnice (1.2), kde volíme $f(x, y) = a(x)y + b(x)$. Protože $\frac{\partial f}{\partial y} = a(x)$ je spojitá funkce na $I \times R$, má podle věty 1.2 počáteční problém právě jedno řešení. Lze ukázat, že toto řešení je možné prodloužit na celý interval I.

Definice 1.7 Rovnice (1.12) se nazývá *homogenní*, jestliže $b(x) \equiv 0$ na I. V opačném případě se nazývá *nehomogenní*.

Poznámka 1.4 Nezaměňujte homogenní lineární rovnici s rovnicí homogenní ve smyslu (1.6). Jde o dva zcela odlišné pojmy.

V dalším budeme předpokládat, že $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité, a všimneme si postupně vlastností řešení homogenní a nehomogenní rovnice.

Homogenní rovnice

Všimněme si, že rovnice

$$y' = a(x)y \tag{1.13}$$

má vždy tzv. *triviální řešení* $y \equiv 0$. Z předchozí věty plyne, že jestliže $y(x_0) = 0$, pak díky jednoznačnosti je nutně $y(x) = 0$ pro každé $x \in I$. Tedy netriviální řešení nikdy neprotíná osu x a vzhledem ke spojitosti je buď celé nad nebo celé pod osou x.

Další důležitá vlastnost je obsahem následující věty.

Věta 1.4 *Nechť* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *jsou řešení rovnice* (1.13) *a* $c \in R$. *Pak také* $y_1(x) + y_2(x)$ *a* $cy_1(x)$ *jsou řešení rovnice* (1.13).

Důkaz: Je $y_1' = a(x)y_1$, $y_2' = a(x)y_2$, a tedy

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = a(x)y_1 + a(x)y_2 = a(x)(y_1 + y_2)$$

a

$$(cy_1)' = cy_1' = ca(x)y_1 = a(x)(cy_1).$$

Tedy $y_1 + y_2$ i cy_1 splňují (1.13).

Obsah předchozí věty lze shrnout tak, že *součet dvou řešení a násobek řešení číslem jsou opět řešení*. Tento fakt znamená, že množina řešení rovnice (1.13) tvoří *vektorový prostor*. Z jednoznačnosti řešení počátečního problému pro rovnici (1.13) snadno plyne, že tento prostor má *dimenzi 1*. Platí tedy

Věta 1.5 *Nechť* $y_0(x)$ *je netriviální řešení rovnice* (1.13). *Pak obecné řešení této rovnice má tvar*

$$y(x) = cy_0(x), \quad c \in R.$$

Řešení rovnice (1.13) lze najít velmi snadno. Jde totiž o rovnici se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx.$$

Dále

$$\ln|y| = \int a(x)\,dx + \ln c$$

a po odlogaritmování vyjde

$$y = ce^{\int a(x)\,dx}.$$

Nehomogenní rovnice

Věta 1.6 *Nechť $y_1(x)$ je řešení rovnice $y' = a(x)y + b_1(x)$ a $y_2(x)$ je řešení rovnice $y' = a(x)y + b_2(x)$, $x \in I$, a c_1, $c_2 \in R$. Pak funkce $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ je řešením rovnice*

$$y' = a(x)y + c_1b_1(x) + c_2b_2(x).$$

Důkaz: Tvrzení je bezprostředním zobecněním věty 1.4 a i jeho důkaz je zcela analogický.

Výsledek obsažený v předchozí větě se nazývá *princip superpozice*.

Věta 1.7 *Nechť $y_0(x)$ je netriviální partikulární řešení rovnice* (1.13) *a $y_1(x)$ je partikulární řešení rovnice* (1.12). *Pak obecné řešení rovnice* (1.12) *má tvar*

$$y = cy_0(x) + y_1(x), \quad c \in R.$$

Důkaz: Z principu superpozice lehce plyne volbou $b_1(x) = b(x)$, $b_2(x) = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = c$, že $cy_0(x) + y_1(x)$ je řešení rovnice (1.12). Je-li naopak $\bar{y}(x)$ nějaké řešení rovnice (1.12), pak $\bar{y}(x) - y_1(x)$ je řešení rovnice (1.13). To plyne opět z principu superpozice volbou $b_1(x) = b_2(x) = b(x)$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Tedy podle věty 1.5 existuje c tak, že $\bar{y}(x) - y_1(x) = cy_0(x)$, tj. $\bar{y}(x) = cy_0(x) + y_1(x)$. Protože $\bar{y}(x)$ bylo libovolné, dává uvedený vzorec skutečně obecné řešení.

Z předchozí věty vyplývá důležitý princip. Označme

OŘHLDR .... obecné řešení homogenní lineární dif. rovnice
PŘHLDR .... partikulární řešení homogenní lineární dif. rovnice
OŘNLDR .... obecné řešení nehomogenní lineární dif. rovnice
PŘNLDR .... partikulární řešení nehomogenní lineární dif. rovnice

Pak

$$\boxed{\text{OŘNLDR}=\text{OŘHLDR}+\text{PŘNLDR}}$$

Co se týká praktického řešení, vyplývá z předchozího vztahu, že stačí najít obecné řešení homogenní rovnice, což již umíme, neboť jde o rovnici se separovanými proměnnými, a partikulární řešení nehomogenní rovnice, což zatím neumíme. K řešení druhé úlohy poslouží následující metoda.

Variace konstanty

Je to postup sloužící k nalezení partikulárního řešení rovnice (1.12). Je třeba již *mít* obecné řešení $cy_0(x)$ homogenní rovnice (1.13). Pokusíme se nahradit konstantu c vhodnou funkcí $k(x)$ (odtud název variace konstanty) a najít řešení ve tvaru

$$y = k(x)y_0(x).$$

Vypočteme $y' = k'(x)y_0(x) + k(x)y_0'(x)$ a po dosazení do (1.12) dostaneme

$$k'(x)y_0(x) + k(x)y_0'(x) = a(x)k(x)y_0(x) + b(x).$$

Protože $y_0'(x) = a(x)y_0(x)$ (je to totiž řešení (1.13)), musí platit

$$k'(x)y_0(x) = b(x).$$

Jelikož $y_0(x) \neq 0$, máme

$$k'(x) = \frac{b(x)}{y_0(x)}$$

a po integraci

$$k(x) = \int \frac{b(x)}{y_0(x)}\,dx.$$

Zjistili jsme tedy, že takovou funkci $k(x)$ lze vždy najít.

Postup nalezení obecného řešení demonstrujeme na následujícím příkladu. Není rozumné pokoušet se pamatovat si výsledný vztah pro $k(x)$. Ten vždy odvodíme pro konkrétní rovnici.

Příklad 1.8 Najděte obecné řešení rovnice $y' = 2y + x$.

Řešení: Jde o lineární rovnici s $a(x) = 2$, $b(x) = x$.

I. Vyřešíme homogenní rovnici

$$y' = 2y.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými, tedy

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx,$$

tedy

$$\ln|y| = 2x + \ln c$$

a po odlogaritmování dostáváme obecné řešení homogenní rovnice

$$y = ce^{2x}.$$

II. Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y = k(x)e^{2x}$. Je $y' = k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x}$. Dosadíme a dostaneme

$$k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x} = 2k(x)e^{2x} + x$$

a odtud po osamostatnění $k'(x)$

$$k'(x) = xe^{-2x}.$$

Metodou per partes vypočítáme

$$k(x) = \int xe^{-2x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-2x} & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$
$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

Integrační konstantu jsme volili nulovou.
Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar

$$y = k(x)e^{2x} = \left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak

$$y = ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Průběh řešení je znázorněn na obrázku 1.9.

1.3.6 Bernoulliova[9] rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r. \tag{1.14}$$

kde $r \in R$. Zajímavé jsou případy, kdy $r \neq 1$ (jinak by šlo o homogenní lineární rovnici) a $r \neq 0$ (jinak by šlo o nehomogenní lineární rovnici). Existuje více metod řešení. Ukážeme si způsob, který připomíná variaci konstant. Přitom předpokládáme, že $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité na nějakém intervalu I.

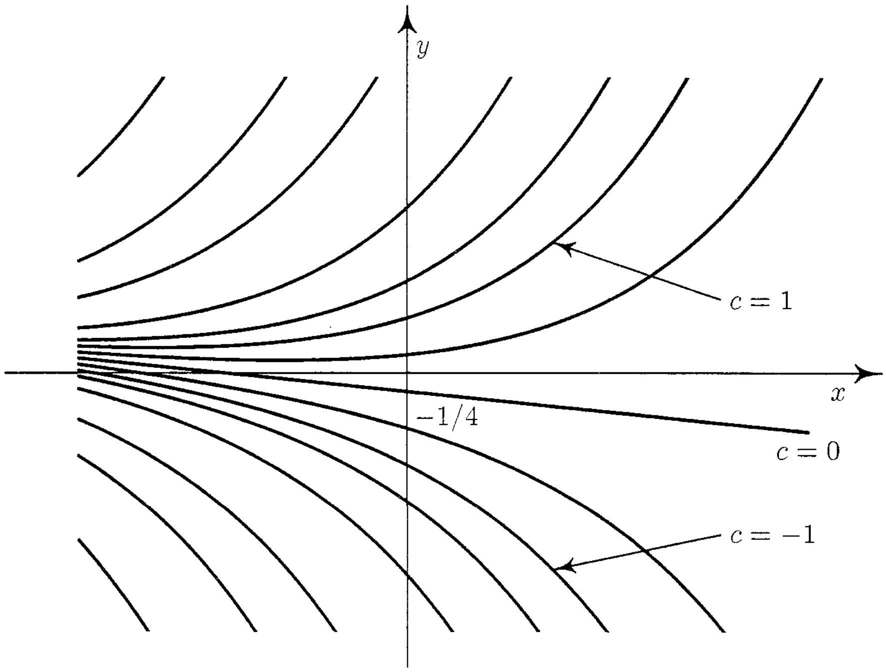
Nechť $cy_0(x)$ je obecné řešení homogenní lineární rovnice $y' = a(x)y$. Pak řešení rovnice (1.14) budeme hledat ve tvaru

$$y = k(x)y_0(x),$$

kde k(x) je vhodná funkce. Po zderivování a dosazení vyjde

$$k'(x)y_0(x) + k(x)y_0'(x) = a(x)k(x)y_0(x) + b(x)k^r(x)y_0^r(x),$$

[9] **Johann Bernoulli** (1667–1748) (čti bernuli) — významný švýcarský matematik. Pracoval v matematické analýze, teorii diferenciálních rovnic, teorii čísel, variačním počtu, mechanice atd. Jeden z rozsáhlé rodiny významných matematiků téhož jména (přes 10 osob).



Obr. 1.9: Obecné řešení rovnice $y' = 2y + x$

tj. po úpravě

$$k'(x) = b(x)k^r(x)y_0^{r-1}(x),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro $k(x)$, kterou již umíme vyřešit. Všimněte si, že pro $r \geq 0$ má rovnice řešení $y \equiv 0$.

Příklad 1.9 Najděte obecné řešení rovnice $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, $y \geq 0$, $x \neq 0$.

Řešení: Jde o rovnici (1.14), kde $a(x) = \frac{4}{x}$, $b(x) = x$, $r = \frac{1}{2}$. Najdeme nejprve obecné řešení rovnice

$$y' = \frac{4}{x}y.$$

Dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = 4\ln|x| + \ln c$$

a po odlogaritmování

$$y = cx^4.$$

Řešení naší rovnice tedy budeme hledat ve tvaru

$$y = k(x)x^4.$$

Po dosazení dostaneme (proměnnou x u k vynecháváme)

$$k'x^4 + 4kx^3 = \frac{4}{x}kx^4 + x\sqrt{kx^4},$$

$$k' = \frac{\sqrt{k}}{x}.$$

Řešením této rovnice vyjde

$$\frac{dk}{dx} = \frac{\sqrt{k}}{x} \implies \int \frac{dk}{\sqrt{k}} = \int \frac{dx}{x}.$$

Tedy

$$\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln|x| + c \implies k(x) = \left(\ln\sqrt{|x|} + L\right)^2,$$

kde $L = \frac{c}{2}$.
Obecné řešení má tedy tvar

$$y = x^4\left(\ln\sqrt{|x|} + L\right)^2, \quad L \in R.$$

Dále je řešením funkce $y \equiv 0$.

1.3.7 Exaktní rovnice a integrační faktor

Rovnice, kterými jsme se dosud zabývali, měly tvar (1.2). Někdy se ovšem zadávají diferenciální rovnice i v jiné podobě — pomocí diferenciálů. Tvar takové rovnice je

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{1.15}$$

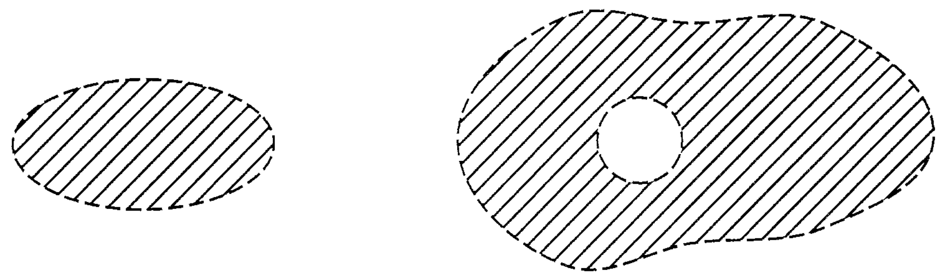
kde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou nějaké funkce. Pro $Q(x,y) \neq 0$ je možné rovnici převést na tvar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

což je rovnice typu (1.2) pro neznámou funkci $y(x)$, a pro $P(x,y) \neq 0$ je možné ji převést na tvar

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

což je opět rovnice typu (1.2), ale pro neznámou funkci $x(y)$. Případ, kdy P i Q jsou současně v nějakém bodě nulové, nebudeme uvažovat. Vlastnosti těchto rovnic úzce souvisejí s autonomními rovinnými systémy diferenciálních rovnic prvního řádu — viz [14, str. 52]. My si všimneme pouze speciálního případu rovnice (1.15).



jednoduše souvislá oblast

oblast, která není jednoduše souvislá

Obr. 1.10: Příklady oblastí

Definice 1.8 Rovnice (1.15) se nazývá *exaktní*, jestliže výraz na levé straně je totálním diferenciálem, tj. jestliže existuje funkce $F(x, y)$ tak, že

$$dF(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Funkce $F(x, y)$ se pak nazývá *kmenová*.

Je otázkou, jak se ověří, že nějaký výraz představuje totální diferenciál. Odpověď na tuto důležitou otázku, která rovněž souvisí s nezávislostí křivkového integrálu na integrační cestě, je obsažena v následující větě.

Věta 1.8 *Nechť $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ jsou spojité v jednoduše souvislé oblasti Ω a mají zde spojité parciální derivace $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

i) Výraz $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ je totální diferenciál.

ii) Platí $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $(x, y) \in \Omega$.

Poznámka 1.5 *Oblastí* Ω rozumíme otevřenou souvislou množinu Ω, tj. otevřenou množinu, jejíž libovolné dva body lze spojit křivkou ležící celou v Ω. Oblast Ω se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže s každou jednoduchou uzavřenou křivkou C ležící v Ω leží v Ω i vnitřek křivky C. Tedy nepřesně řečeno souvislost otevřené množiny znamená, že je „z jednoho kusu“, a jednoduše souvislá oblast „nemá otvory“ — viz obr. 1.10.

U exaktní rovnice je možné napsat snadno vzorec obecného řešení.

Věta 1.9 *Nechť rovnice* (1.15) *je exaktní a $F(x, y)$ je příslušná kmenová funkce. Pak výraz*

$$F(x, y) = c, \quad c \in R$$

je obecným řešením této rovnice v implicitním tvaru.

Podmínka *ii*) z věty 1.8 nám dává efektivní kritérium, jak poznat, že rovnice (1.15) je exaktní. Abychom však mohli použít větu 1.9, je třeba si říci, jak najdeme příslušnou kmenovou funkci. Výsledek nebudeme formulovat do věty, ale popíšeme odpovídající postup. Protože

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy$$

a

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

musí platit

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),$$

resp. ve stručnější symbolice

$$F_x = P, \quad F_y = Q. \tag{1.16}$$

Integrací těchto rovnic lze F najít. Zvolíme libovolnou z těchto rovnic, např. první. Dostáváme

$$F_x = P \quad \Longrightarrow \quad F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y).$$

Přitom integrál $\int P(x,y)\,dx$ chápeme jako závislý na parametru y. Dále je třeba si uvědomit, že integrační „konstanta" C nemusí být obecně číslo, ale funkce závislá na druhé proměnné, tj. v našem případě na y (zkoušku správnosti totiž děláme parciálním derivováním podle x, při němž sebesložitější funkce závislá jen na y se derivuje na nulu).

Zbývá určit funkci $C(y)$. To uděláme dosazením do zbývající, tj. v našem případě do druhé rovnice v (1.16). Uvědomme si při tom, že $\int P(x,y)\,dx$ již bude nějaká konkrétní funkce. Dostaneme

$$\frac{\partial \left(\int P(x,y)\,dx + C(y)\right)}{\partial y} = Q(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \int P(x,y)\,dx}{\partial y} + C'(y) = Q(x,y).$$

Ve vzniklé rovnici se musí *vyrušit* neznámá, která není proměnnou funkce C, tj. v našem případě x. Pokud se tak nestane, jsou dvě možnosti — buď jsme udělali početní chybu nebo jsme zapomněli ověřit, zda rovnice (1.15) je skutečně exaktní (všimněte si, že část postupu až po toto místo lze udělat s libovolnou rovnicí tvaru (1.15), ne jen exaktní; že postup k ničemu nevede, bohužel zjistíme až v tomto okamžiku).

Tedy pro neznámou funkci $C(y)$ dostane obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými (obsahující dokonce jen nezávisle proměnnou y)

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial \int P(x,y)\,dx}{\partial y}.$$

Postup ukážeme na příkladu.

Příklad 1.10 Najděte obecné řešení rovnice

$$\left(\frac{1}{y}+2x\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}+1\right)dy=0.$$

Řešení: Zřejmě musí být $y \neq 0$. Tím nám z celé roviny zůstanou dvě otevřené poloroviny $y>0$ a $y<0$, které jsou očividně jednoduše souvislé; rovnici uvažujeme v každé polorovině zvlášť. Ověříme nyní, zda jde o exaktní rovnici. Máme

$$P(x,y)=\frac{1}{y}+2x \implies P_y=-\frac{1}{y^2},$$
$$Q(x,y)=-\frac{x}{y^2}-1 \implies Q_x=-\frac{1}{y^2}.$$

Protože $P_y = Q_x$, je rovnice exaktní. Nyní určíme kmenovou funkci $F(x,y)$. Musí platit:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{y}+2x, \\ F_y &= -\frac{x}{y^2}-1. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Z první rovnice dostaneme postupně

$$F(x,y)=\int\left(\frac{1}{y}+2x\right)dx=\frac{x}{y}+x^2+C(y).$$

Tedy z dílčího výsledku vychází

$$F_y=-\frac{x}{y^2}+C'(y)$$

a po dosazení do druhé rovnice v (1.17) dostáváme

$$-\frac{x}{y^2}+C'(y)=-\frac{x}{y^2}-1 \implies C'(y)=-1 \implies C(y)=-\int dy=-y,$$

kde v posledním integrálu jsme volili nulovou integrační konstantu. Celkově je

$$F(x,y)=\frac{x}{y}+x^2-y$$

a obecné řešení naší rovnice má tvar

$$\frac{x}{y}+x^2-y=c,\quad c\in R.$$

Integrační faktor

Všimněme si rovnice

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Zde

$$P = x,\ Q = y \implies P_y = 0,\ Q_x = 0 \implies P_y = Q_x$$

a jde tedy o exaktní rovnici. Vynásobíme-li tuto rovnici x, dostaneme rovnici

$$x^2\,dx + xy\,dy = 0.$$

Nyní je

$$P = x^2,\ Q = xy \implies P_y = 0,\ Q_x = y \implies P_y \neq Q_x$$

a rovnice již není exaktní. Obě rovnice jsou z našeho hlediska zcela rovnocenné (pro $x \neq 0$), avšak zatímco jedna je exaktní, druhá není. Příklad ukazuje, že vlastnost „být exaktní" je nesmírně citlivá a dá se snadno porušit např. pouhým vynásobením nějakou funkcí. Současně ovšem vzniká opačná otázka: Nebylo by možné rovnici, která není exaktní, vynásobit nějakou funkcí tak, aby nová rovnice již byla exaktní? Funkce, která má tuto vlastnost, se nazývá *integrační faktor*. Pokusme se zjistit, jak by takový integrační faktor $M(x,y)$ měl vypadat. Uvažujme rovnici (1.15), která není exaktní, tj. $P_y \neq Q_x$. Chceme najít funkci $M(x,y)$ tak, aby rovnice

$$P(x,y)M(x,y)\,dx + Q(x,y)M(x,y)\,dy = 0$$

byla exaktní. Za předpokladu existence potřebných derivací dostáváme, že musí platit

$$\frac{\partial P(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)M(x,y)}{\partial x},$$

což po provedení derivací a vynechání argumentů x a y dává

$$\frac{\partial P}{\partial y}M + P\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}M + Q\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{1.18}$$

To je tzv. *parciální lineární diferenciální rovnice prvního řádu* pro neznámou funkci $M(x,y)$. Z teorie těchto rovnic vyplývá, že za předpokladů spojitosti P, Q, P_y a Q_x a podmínky $|P| + |Q| > 0$ existuje (alespoň lokálně) její řešení — viz např. [14, str. 280] nebo [17, str. 239]. Bohužel řešení této rovnice je v podstatě ekvivalentní řešení rovnice (1.15). Obecně tedy integrační faktor efektivně nedokážeme najít. V některých speciálních případech to však lze, jak si nyní ukážeme.

Předpokládejme, že integrační faktor $M(x,y)$ *závisí jen na jedné proměnné*. Uvažujme nejprve případ $M = M(x)$. Pak $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0$ a z rovnice (1.18) vyjde po úpravě

$$Q\,\frac{\partial M}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) M,$$

tj.

$$\frac{\frac{dM}{dx}}{M} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \tag{1.19}$$

Protože levá strana této rovnice závisí jen na x, je možné najít integrační faktor závislý jen na x v případě, že $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ je funkcí pouze x. Pak je (1.19) rovnicí se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $M(x)$.

Podobně když $M = M(y)$ a tedy $\frac{\partial M}{\partial x} \equiv 0$, vyjde z (1.18) analogicky

$$\frac{\frac{dM}{dy}}{M} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}, \tag{1.20}$$

což vyžaduje, aby výraz $\frac{Q_x - P_y}{P}$ byl funkcí pouze y. Pak je (1.20) rovnicí se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $M(y)$.

Další speciální případy lze nalézt např. v [15, str. 13] nebo rovněž ve cvičení 9 na str. 35.

Příklad 1.11 Najděte obecné řešení rovnice $(2xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

Řešení: Máme $P = 2xy^2 + y$, $Q = -x$ a

$$P_y = 4xy + 1, \; Q_x = -1 \quad \Longrightarrow \quad P_y \neq Q_x$$

a rovnice tedy není exaktní. Pokusíme se najít integrační faktor.

Předpokládejme nejprve, že $M = M(x)$. Pak pravá strana (1.19) má obsahovat jen x, což dává v našem případě

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4xy + 2}{-x}.$$

Integrační faktor tohoto tvaru tedy nelze nalézt.

Nechť nyní $M = M(y)$. Pak pravá strana v (1.20) musí obsahovat jen y, což dává pro naši rovnici

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-4xy - 2}{2xy^2 + y} = \frac{-2(2xy + 1)}{y(2xy + 1)} = -\frac{2}{y},$$

a je tedy možné integrační faktor tohoto tvaru najít. Z (1.20) dostáváme

$$\frac{\frac{dM}{dy}}{M} = -\frac{2}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dM}{M} = -\frac{2}{y}\,dy$$

a po integraci

$$\int \frac{dM}{M} = -2\int \frac{dy}{y} \quad \Longrightarrow \quad \ln|M| = -2\ln|y| + \ln c.$$

Po odlogaritmování vyjde

$$M(y) = \frac{c}{y^2}.$$

Zvolme např. $c = 1$. Pak integrační faktor je

$$M(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Po vynásobení zadané rovnice integračním faktorem dostaneme

$$\left(2x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0.$$

Zde $P = 2x + \frac{1}{y}$, $Q = -\frac{x}{y^2}$ a tedy

$$P_y = -\frac{1}{y^2}, \; Q_x = -\frac{1}{y^2} \quad \Longrightarrow \quad P_y = Q_x$$

a jde skutečně o exaktní rovnici. Najdeme kmenovou funkci $F(x, y)$. Pro ni máme

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + \frac{1}{y}, \\ F_y &= -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Integrací např. první rovnice vychází

$$F(x, y) = \int \left(2x + \frac{1}{y}\right) dx = x^2 + \frac{x}{y} + C(y).$$

Dosadíme-li tento dílčí výsledek do druhé rovnice, dostaneme

$$0 - \frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} \quad \Longrightarrow \quad C'(y) = 0.$$

Po integraci je

$$C(y) = \int 0\,dy = K, \quad K \in R.$$

V tomto případě tedy $C(y)$ je vlastně přímo konstanta. Volíme-li např. $K = 0$, vychází

$$F(x, y) = x^2 + \frac{x}{y}$$

a obecné řešení má (implicitní) tvar

$$x^2 + \frac{x}{y} = L, \quad L \in R.$$

Poznámka 1.6 Všimněte si, že rovnici z předchozího příkladu je možné upravit na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2y^2,$$

což je Bernoulliova rovnice pro $y(x)$.

Cvičení

V následujících příkladech najděte obecné řešení daných rovnic; pokud je zadána počáteční podmínka, najděte příslušné partikulární řešení.

1. Rovnice se separovanými proměnnými.

a) $x + yy' = 0$ b) $\frac{y}{y'} - x = 0$

c) $y + xy + xy' - xyy' = 0$ d) $y' \sin x = y \ln y, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

e) $2(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0$ f) $xy^2 + x + yy' - x^2yy' = 0$

g) $xyy' = 1 - x^2$ h) $\sqrt{1 - y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0$

2. Homogenní rovnice.

a) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ b) $y'(3x^2 - y^2) = 2xy$

c) $y' = \frac{x + y}{x - y}$ d) $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$

e) $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y(1) = -1$ f) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. Rovnice tvaru $y' = f(ax + by + c)$.

a) $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$ b) $y' = 3x - 2y + 5$

c) $y' = \cos(x - y)$ d) $y' = \frac{1}{x + 2y}, \quad y(1) = 0$

4. Rovnice tvaru $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$.

a) $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$ b) $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$

c) $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$ d) $-2x+3y-7+4xy'-5yy'+13y'=0$

5. Lineární rovnice.

a) $y'+2y=4x$ b) $y'+2xy=xe^{-x^2}$

c) $x^2y'+y-2xy=x^2$ d) $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$

e) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$ f) $xy'+y-e^x=0,\ \ y(0)=2$

g) $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x,\ \ y(1)=0$ h) $y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x},\ \ y(0)=0$

6. Bernoulliova rovnice.

a) $y'+2xy=2x^3y^3$ b) $xy'+y=y^2\ln x$

c) $2xyy'-y^2=x^2$ d) $x^2y^2y'+xy^3=1$

7. Exaktní rovnice.

a) $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$ b) $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}-\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx=0$

c) $e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0$

d) $(1+x\sqrt{x^2+y^2})\,dx+(\sqrt{x^2+y^2}-1)y\,dy=0$

8. Integrační faktor.

a) $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0$ b) $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$

c) $\dfrac{y}{x}\,dx+(y^3-\ln x)\,dy=0$ d) $(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0$

9. Najděte podmínky, za nichž má rovnice $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ integrační faktor ve tvaru

a) $M=M(x+y)$ b) $M=M(x\cdot y)$

10. Různé.

a) $x^2y'+3-2xy=0$ b) $\dfrac{xy'-y}{x}=\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

c) $y'=\dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ d) $y'=e^{2x}-e^xy$

e) $8y + 10x + 5yy' + 7xy' = 0$

f) $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$

g) $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$

h) $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$

i) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$

j) $y' = (x+y)^2$

Výsledky:
1.a) $x^2 + y^2 = C$, b) $y = Cx$, c) $\ln|xy| + x - y = C$, $y = 0$, d) $y = 1$, e) $2e^{y^2} = e^x + 1$, f) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$, g) $x^2 + y^2 = \ln|x| + C$, h) $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$. **2.**a) $y^2 = x^2(C + \ln x^2)$, b) $y^2 - x^2 = Cy^3$, $y = 0$, c) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C + \ln\sqrt{x^2+y^2}$, d) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, e) $y = -x$, f) $x^2 = C^2 + 2Cy$. **3.**a) $-5x + 10y + 7\ln|10x + 5y + 9| = C$, b) $-6x + 4y - 7 = Ce^{-2x}$, c) $x + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2} = C$, $y = x$, d) $(x + 2y + 2)^2 = 9e^{2y}$. **4.**a) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$, b) $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$, c) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$, d) $(y-2x-9)^2(y-x-3) = C$. **5.**a) $Ce^{-2x} + 2x - 1$, b) $e - x^2(C + \frac{x^2}{2})$, c) $Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$, d) $e^x(\ln|x| + \frac{x^2}{2}) + Ce^x$, e) $(x + C)(1 + x^2)$, f) $\frac{e^x - 1}{x}$, g) $\frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$, h) $\frac{x}{\cos x}$. **6.**a) $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$, b) $y(1 + \ln x + Cx) = 1$, c) $x^2 - y^2 = Cx$, d) $y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}$. **7.**a) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$, b) $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$, c) $xe^y - y^2 = C$, d) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$. **8.**a) $x - \frac{y}{x} = C$, b) $x^2 + \frac{2x}{y} = C$, c) $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C$, d) $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$. **9.**a) Výraz $\frac{Q_x - P_y}{P - Q}$ musí být funkcí $x + y$, b) Výraz $\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$ musí být funkcí xy. **10.**a) $y = Cx^2 + \frac{1}{x}$, b) $\sin\frac{y}{x} = Cx$, c) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$, d) $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$, e) $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$, f) $y = \frac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$, g) $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$, h) $x^y = C$, i) $(x^2 + y^2)e^x = C$, j) $y = -x + \operatorname{tg}(x + C)$.

1.4 Ukázky aplikací rovnic prvního řádu

Jak jsme se již zmínili v úvodu, diferenciální rovnice mají řadu aplikací. V současnosti to již není jen ve fyzice a technických disciplínách, ale i v biologii, ekologii a chemii a pronikají též do ekonomie a dalších společenských věd. Ukážeme si formou příkladů některé aplikace. Řadu dalších lze nalézt v početné literatuře, z níž uvádíme jako malou ukázku např. [5, 11, 15, 23, 28].

Příklad 1.12 (Rozpad radioaktivního materiálu) Je známo, že rychlost rozpadu rádia je přímo úměrná okamžitému množství rádia. Poločas rozpadu izotopu rádia $^{222}_{88}\boldsymbol{Ra}$ je 1590 let, tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu. Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25%.

Řešení: Nechť $y(t)$ je množství rádia v čase t. Pak pro rychlost rozpadu platí

$$y' = ky.$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Nechť v čase $t = 0$ je množství rádia rovno y_0. Pak

$$y(0) = y_0, \quad y(1590) = \frac{1}{2}\, y_0$$

a máme určit t_1 tak, aby

$$y(t_1) = \frac{3}{4}\, y_0.$$

Diferenciální rovnice pro $y(t)$ je homogenní lineární rovnice, tj. rovnice se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = k\,dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = kt + \ln c$$

a po odlogaritmování

$$y = ce^{kt}.$$

Z počáteční podmínky v $t = 0$ určíme

$$y_0 = y(0) = ce^{k\cdot 0} = c$$

a hledané partikulární řešení je

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu $t = 1590$, dostaneme

$$\frac{1}{2}\, y_0 = y(1590) = y_0 e^{1590k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{1590k}.$$

Logaritmováním dostaneme

$$-\ln 2 = 1590k \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Konečně pro t_1 máme

$$\frac{3}{4}\, y_0 = y(t_1) = y_0 e^{kt_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{4} = e^{kt_1}.$$

Odtud vypočteme

$$\ln\frac{3}{4} = kt_1 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\ln\frac{3}{4}}{k} \doteq 660.$$

Ke snížení o 25% tedy dojde asi za 660 let.

Příklad 1.13 (Rychlost chemické reakce) Uvažujme dvě chemikálie A a B, které navzájem reagují. Předpokládejme, že při vytváření nového produktu se kombinuje jedna molekula z A s jednou molekulou z B. Určete rychlost chemické reakce, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací reagujících látek.

Řešení: Nechť $x(t)$ resp. $y(t)$ je koncentrace (v molekulách na litr) v čase t látky A resp. látky B. Nechť $a = x(0) > 0$, $b = y(0) > 0$ jsou počáteční koncentrace. Protože se spolu kombinuje po jedné molekule, klesají obě koncentrace touž rychlostí, tj.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

Úbytek $z(t)$ koncentrace látky A resp. B v čase t je pak dán vztahem

$$z(t) = a - x(t) \text{ resp. } z(t) = b - y(t). \tag{1.21}$$

Odtud máme

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}.$$

Výraz $\frac{dz}{dt}$ nazýváme *rychlost reakce*. Zadání nám říká, že platí

$$\frac{dz}{dt} = kxy,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti (kterou lze experimentálně určit). Dosadíme-li za x a y z (1.21), dostaneme pro $z(t)$ diferenciální rovnici

$$z' = k(a - z)(b - z), \quad z(0) = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy

$$\frac{dz}{dt} = k(z - a)(z - b) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = k\,dt$$

a po integraci

$$\int \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = k \int dt.$$

Integrál na levé straně je z racionální lomené funkce. Po jednoduchém rozkladu na parciální zlomky vyjde pro $a \neq b$

$$\int \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = \int \left(\frac{\frac{1}{a-b}}{z - a} - \frac{\frac{1}{a-b}}{z - b} \right) dz = \frac{1}{a - b}(\ln|z - a| - \ln|z - b|).$$

Tedy

$$\frac{1}{a - b} \ln \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = kt + \ln c.$$

Po odlogaritmování vyjde

$$\frac{z-a}{z-b} = c^{a-b} e^{k(a-b)t}.$$

Z počáteční podmínky $z(0) = 0$ dostaneme

$$\frac{0-a}{0-b} = c^{a-b} e^{0} \implies \frac{a}{b} = c^{a-b} \implies c = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$$

Po dosazení a osamostatnění z postupně máme

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{a}{b} e^{k(a-b)t} \implies bz - ab = aze^{k(a-b)t} - abe^{k(a-b)t},$$

tj.

$$z(t) = ab\,\frac{e^{k(a-b)t} - 1}{ae^{k(a-b)t} - b}.$$

Rychlost reakce je tudíž

$$\frac{dz}{dt} = ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t} - b) - (e^{k(a-b)t} - 1)ak(a-b)e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t} - b)^2} =$$

$$= ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t} - b - ae^{k(a-b)t} + a)}{(ae^{k(a-b)t} - b)^2} =$$

$$= kab(a-b)^2\frac{e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t} - b)^2}.$$

Pro $a = b$ je

$$\int \frac{dz}{(z-a)^2} = \int (z-a)^{-2}\,dz = -\frac{1}{z-a},$$

takže

$$-\frac{1}{z-a} = kt + c.$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$$-\frac{1}{0-a} = 0 + c \implies c = \frac{1}{a}$$

a tedy

$$-\frac{1}{z-a} = kt + \frac{1}{a} \implies z - a = -\frac{a}{akt+1},$$

takže

$$z(t) = a - \frac{a}{akt+1} = \frac{a^2kt}{akt+1}.$$

Pak rychlost reakce je

$$\frac{dz}{dt} = a^2k\frac{1(akt+1) - tak}{(akt+1)^2} = \frac{a^2k}{(akt+1)^2}.$$

Příklad 1.14 (Smíchávání) Velká nádrž obsahuje 100 hl slané vody, v níž je rozpuštěno 50 kg soli. Do nádrže vtéká rychlostí 6 hl/min slaná voda obsahující 2 kg soli na jeden hl. Směs, která je promícháváním neustále udržována homogenní, vytéká z nádrže rychlostí 4 hl/min. Určete výsledné množství soli v nádrži po uplynutí t min.

Řešení: Označme $y(t)$ množství soli v kg, které je v nádrži v čase t, $t \geq 0$. Nádrž obsahuje v čase t zřejmě $100 + (6-4)t$ hl vody. Koncentrace v tomto okamžiku bude

$$\frac{y(t)}{100+2t} \text{ kg/hl.}$$

Nechť $t_0 \geq 0$ je pevné a $t > t_0$. Pak během časového intervalu $\langle t_0, t\rangle$ přibude v nádrži

$$6 \cdot 2 \cdot (t - t_0) = \int_{t_0}^{t} 6 \cdot 2 \, ds$$

kg soli a ubude

$$\int_{t_0}^{t} 4 \cdot \frac{y(s)}{100+2s} \, ds$$

kg soli. Tedy musí platit

$$y(t) = y(t_0) + 12(t - t_0) - 4\int_{t_0}^{t} \frac{y(s)}{100+2s} \, ds.$$

Když tuto rovnost zderivujeme podle t (s použitím věty o derivování integrálu jako funkce horní meze), dostaneme

$$y'(t) = 12 - \frac{4y(t)}{100+2t}\,. \tag{1.22}$$

což je hledaná diferenciální rovnice. Tuto rovnici nyní vyřešíme. Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

I. Homogenní rovnice je

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4y}{100+2t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{4\,dt}{100+2t}$$

a po integraci

$$\int \frac{dy}{y} = -4\int \frac{dt}{100+2t}.$$

Protože

$$\int \frac{dt}{100+2t} = \left| \begin{array}{rcl} 2t+100 & = & u \\ 2\,dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}\,du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|100+2t|,$$

vyjde po integraci

$$\ln|y| = -2\ln|100+2t| + \ln c,$$

tj.

$$y = \frac{c}{(100+2t)^2}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$y(t) = \frac{K(t)}{(100+2t)^2}.$$

Je

$$y'(t) = \frac{K'(t)(100+2t)^2 - K(t)\cdot 2(100+2t)2}{(100+2t)^4}.$$

Po dosazení do rovnice (1.22) vyjde

$$\frac{K'(t)(100+2t)^2 - 4(100+2t)K(t)}{(100+2t)^4} = 12 - \frac{4K(t)}{(100+2t)^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{K'(t)}{(100+2t)^2} = 12.$$

Tedy

$$K(t) = 12\int(100+2t)^2\,dt = \left|\begin{array}{lcl} 100+2t & = & u \\ 2\,dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}\,du \end{array}\right| = 6\int u^2\,du = 2u^3 =$$

$$= 2(100+2t)^3.$$

Partikulární řešení tudíž je

$$y = \frac{2(100+2t)^3}{(100+2t)^2} = 2(100+2t),$$

takže obecné řešení rovnice (1.22) je

$$y(t) = \frac{c}{(100+2t)^2} + 2(100+2t).$$

Protože $y(0) = 50$, dostaneme pro c rovnici

$$50 = \frac{c}{100^2} + 200 \quad\Longrightarrow\quad c = -150\cdot 100^2 = -15\cdot 10^5.$$

Množství soli je tedy dáno funkcí

$$y(t) = 2(100+2t) - \frac{15\cdot 10^5}{(100+2t)^2}.$$

Příklad 1.15 (Složitý úrok) Nechť částka A_0 je investována při úrokové míře $k\%$ za rok, přičemž úrok je připisován spojitě. Ukažte, že hodnota investic $A(t)$ po t letech je řešením lineární homogenní rovnice

$$\frac{dA}{dt} = \frac{k}{100}A, \quad A(0) = A_0. \tag{1.23}$$

Řešení: Předpokládejme, že úrok je získáván s mírou $k\%$ za rok a je připisován n krát za rok. Pak množství $A_n(t)$, které je součtem úroku a jistiny, je na konci t let dáno vztahem

$$A_n(t) = A_0\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^{nt} = A_0\left[\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^n\right]^t.$$

Nyní je přirozené definovat

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_n(t).$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \alpha \in R,$$

vyjde

$$A(t) = A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^n\right]^t = A_0\left(e^{\frac{k}{100}}\right)^t = A_0e^{\frac{k}{100}t}.$$

To je ale právě řešení počáteční úlohy (1.23), jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

Příklad 1.16 (Elektrický obvod) Ideální napěťový zdroj o konstantním napětí U napájí sériovou kombinaci rezistoru o odporu R ohmů a induktoru o indukčnosti L henry — viz obr. 1.11. Sestavte a vyřešte diferenciální rovnici pro proud $i(t)$ odebíraný ze zdroje.

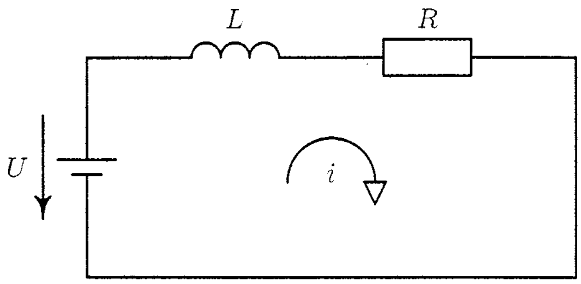
Řešení: Podle druhého Kirchhoffova zákona je algebraický součet všech napětí v uzavřeném obvodu roven nule. Označme $i(t)$, $t \geq 0$, proud v ampérech, který obvodem prochází. Pak $L\frac{di}{dt}$ je napětí na induktoru a Ri je napětí na rezistoru. Tedy

$$L\frac{di}{dt} + Ri - U = 0,$$

tj.

$$i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{U}{L}, \quad i(0) = i_0, \tag{1.24}$$

kde i_0 je velikost proudu na počátku. Jde o nehomogenní lineární rovnici prvního řádu.



Obr. 1.11: Elektrický obvod

I. Pro homogenní rovnici máme

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i \quad \Longrightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int dt,$$

tj.

$$\ln|i| = -\frac{R}{L}t + \ln c \quad \Longrightarrow \quad i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$i(t) = K(t)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Po dosazení dostaneme

$$K'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - K(t)e^{-\frac{R}{L}t}\frac{R}{L} + \frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L},$$

tj.

$$K'(t) = \frac{U}{L}e^{\frac{R}{L}t}.$$

Odtud

$$K(t) = \frac{U}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,dt = \left| \begin{array}{lcl} \frac{R}{L}t & = & s \\ \frac{R}{L}\,dt & = & ds \\ dt & = & \frac{L}{R}\,ds \end{array} \right| = \frac{U}{R}\int e^{s}\,ds = \frac{U}{R}e^{s} = \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t},$$

takže partikulární řešení je

$$i(t) = \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}.$$

Obecné řešení rovnice (1.24) pak je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

Z počáteční podmínky dostáváme

$$i_0 = c + \frac{U}{R} \quad \Longrightarrow \quad c = i_0 - \frac{U}{R}.$$

Průběh proudu je tudíž popsán funkcí

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

Příklad 1.17 (Siločáry) Nechť $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ je nenulové rovinné silové pole, které je definované na otevřené množině Ω. Odvoďte diferenciální rovnici pro siločáry, víte-li, že tečna k siločáře je v každém bodě souhlasně kolineární s vektorem síly v tomto bodě.

Řešení: Nechť C je siločára, která má parametrické rovnice $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in J$, kde J je interval. Pak její tečný vektor v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $t_0 \in J$, je $\vec{t}(x_0, y_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$. Víme, že má platit $\vec{t}(x_0, y_0) = \lambda \vec{F}(x_0, y_0)$, kde $\lambda \geq 0$. Tedy

$$(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) = \lambda(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)).$$

Protože $\vec{F} \neq \vec{0}$, nejsou P a Q současně nulové. Nechť např. $P(x_0, y_0) \neq 0$. Pak i $\varphi'(t_0) \neq 0$ a C je v okolí bodu x_0 grafem funkce proměnné x, tj. $y(x)$. Podle věty o derivaci funkce dané parametricky — viz např. [12, str. 110] — je

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\lambda Q(x_0, y_0)}{\lambda P(x_0, y_0)} = \frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}.$$

Odtud dostáváme, že $y(x)$ vyhovuje rovnici

$$Q(x, y)\,dx - P(x, y)\,dy = 0.$$

Analogicky se zváží případ $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Předchozí rovnice se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Cvičení

1. Uvažujme homogenní chemickou reakci, v níž působí jedna látka. Nechť na počátku reakce, tj. pro $t = 0$, je koncentrace rovna $a > 0$. Je-li $a - x(t)$ koncentrace v čase t, je podle Wilhelmyho zákonu rychlost reakce rovna

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Určete $x(t)$.

$[x(t) = a(1 - e^{-kt})]$

2. Uvažujme dvě chemikálie A a B, které navzájem reagují. Předpokládejme, že při vytváření nového produktu se váže jedna molekula z A se dvěma molekulami z B. Určete rychlost chemické reakce, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžité koncentrace látky A a druhé mocniny okamžité koncentrace látky B — viz příklad 1.13.

Nápověda: Je $\frac{dy}{dt} = 2\,\frac{dx}{dt}$.

$$\Big[z' = k(a - z)(b - 2z)^2, \quad z(0) = 0:$$

$$\frac{1}{(2a-b)^2}\ln\left|\frac{b-2z}{a-z}\right| + \frac{1}{(2a-b)(b-2z)} + \frac{\ln\frac{a}{b}}{(2a-b)^2} + \frac{1}{b^2 - 2ab} = kt \text{ pro } 2a \neq b,$$

$$\frac{1}{8(a-z)^2} - \frac{1}{8a^2} = kt \text{ pro } 2a = b\Big]$$

3. Najděte řešení počáteční úlohy $Li' + Ri = U$, $i(0) = i_0$, kde $L > 0$, $R \geq 0$, U a i_0 jsou dané konstanty. Je to rovnice pro proud $i = i(t)$ v ampérech v obvodu obsahujícím induktor o indukčnosti L (v henry), rezistor o odporu R (v ohmech) a ideální zdroj o napětí U (ve voltech). Nechť L, U a i_0 jsou konstanty a R je parametr, kterým se proud reguluje; tedy $i = i(t, R)$. Dokažte, že

$$\lim_{R \to 0^+} i(t, R) = i(t, 0) = \frac{Ut}{L} + i_0$$

pro každé t.

4. Předpokládejme, že radioaktivní izotop stroncia $^{90}\boldsymbol{Sr}$ se rozpadá exponenciálně podle rovnice $y' = -ay$, $a > 0$. Určete konstantu a a čas, za který se sníží množství stroncia ze 100% na 10%, víte-li, že poločas rozpadu je 28.1 roku.

$\left[a = \frac{\ln 2}{28.1} = 0.025;\ t \doteq 93,3 \text{ roku}\right]$

5. Velká nádrž obsahuje 100 hl vody, v níž je rozpuštěno 50 kg soli. Do ní přitéká rychlostí 3 hl/min roztok obsahující 2 kg soli v jednom hl. Směs je mícháním udržována homogenní a vytéká stejnou rychlostí z nádrže. Jak mnoho soli je v nádrži po 30 min.?

$[117,5 \text{ kg}]$

6. Nádrž obsahuje 50 hl vody, v níž je rozpuštěno 20 kg soli. Do nádrže je přidávána čistá sůl rychlostí 1 kg/min. Směs je udržována homogenní a vytéká z nádrže rychlostí 2 hl/min. Jak mnoho soli je v nádrži po 10 min.? Jaká je v té

době koncentrace?

[19, 7 kg; 0, 66 kg/hl]

7. Velká nádrž A obsahuje na počátku 60 hl vody a 40 hl alkoholu. Do nádrže přitéká voda rychlostí 3 hl/min a alkohol rychlostí 1 hl/min. Směs, která je důkladně promíchávaná, teče do druhé nádrže B rychlostí 3 hl/min. Nádrž B obsahovala na počátku 100 hl vody. Směs je v nádrži B mícháním udržovaná homogenní a vytéká z ní rychlostí 2 hl/min. Jak mnoho alkoholu je v každé nádrži po 50 min.? Která nádrž nakonec (tj. pro velká t) obsahuje více alkoholu?

[A: 41, 9 hl; B: 33, 1 hl; B]

Kapitola 2

Obyčejné diferenciální rovnice vyšších řádů

2.1 Kvalitativní teorie

Doposud jsme se zabývali diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Nyní si všimneme i rovnic vyšších řádů. Protože řada pojmů a výsledků bude obdobná jako u rovnic prvního řádu, budeme v této části poněkud stručnější.

Nechť $n \in N$ a $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je funkce $n+2$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset R^{n+2}$. Pak rovnice

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu v implicitním tvaru* s neznámou $y(x)$.

Definice 2.1 Nechť $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J. Pak $h(x)$ se nazývá *řešení* rovnice (2.1) na J, jestliže $h(x)$ má derivace až do řádu n, pro každé $x \in J$ je $\left(x, h(x), h'(x), \dots, h^{(n)}(x)\right) \in \Omega$ a platí

$$F\left[x, h(x), h'(x), \dots, h^{(n)}(x)\right] = 0, \quad x \in J.$$

Je-li možné z rovnice (2.1) osamostatnit nejvyšší derivaci neznámé, tj. je-li možné ji upravit na tvar

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{2.2}$$

kde $f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ je nějaká funkce $n+1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset R^{n+1}$, mluvíme o *obyčejné diferenciální rovnici n-tého řádu v explicitním tvaru*. Tento tvar je pro vyšetřování vlastností řešení vhodnější.

Poznámka 2.1 Uvědomte si, že (2.2) je speciální případ (2.1), kde

$$F(x, z_0, \ldots, z_{n-1}, z_n) = z_n - f(x, z_0, \ldots, z_{n-1}).$$

U rovnic prvního řádu bylo velmi užitečným pojmem směrové pole. I u rovnic n-tého řádu by bylo možné udělat analogii. Ta je však v prostoru dimenze $n+1$, což při našem elementárním přístupu nemá názorný efekt, a proto se touto otázkou nebudeme zabývat.

Naopak důležitou roli bude opět hrát počáteční úloha.

Definice 2.2 Nechť je dána $(n+1)$-tice $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $y(x)$ rovnice (2.2), které je definované na nějakém intervalu I obsahujícím x_0 a takové, že

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá *Cauchyova počáteční úloha*.

V daném bodě x_0 tedy předepisujeme hodnotu řešení a jeho derivací až do řádu $n-1$ včetně.

Např. pro rovnici druhého řádu

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.3}$$

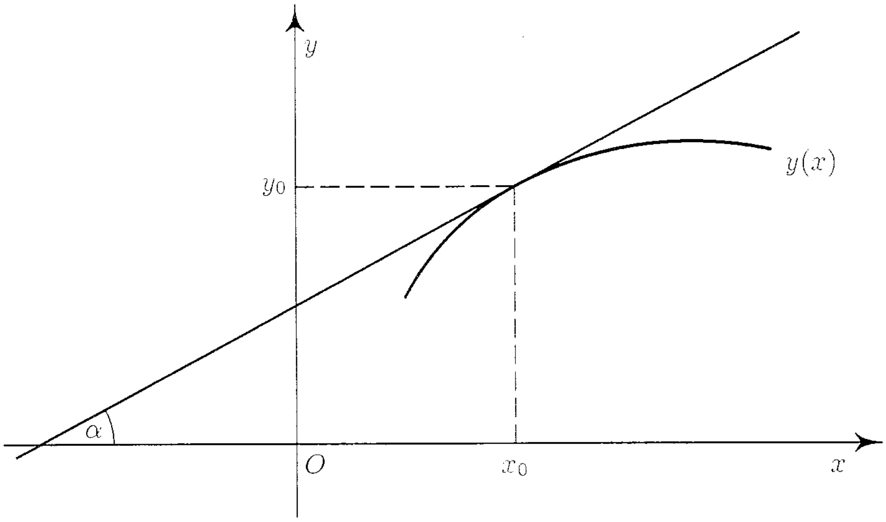
hledáme řešení $y(x)$ splňující podmínky $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, kde (x_0, y_0, y_1) je daná trojice čísel.

Geometricky je $y(x_0) = y_0$ zadaná funkční hodnota a $y'(x_0) = y_1$ směrnice tečny ke grafu funkce $y(x)$ v bodě $[x_0, y(x_0)] = (x_0, y_0)$. Požadujeme tedy na rozdíl od rovnic prvního řádu, aby hledané řešení nejen procházelo daným bodem, ale mělo i předepsanou tečnu — viz obr. 2.1, kde $\operatorname{tg}\alpha = y_1$. Pro obecné n je vlastně zadán úsek Taylorova rozvoje funkce $y(x)$ v bodě x_0.

Pro $n = 2$ si rovněž ukážeme jednu z možných fyzikálních interpretací. Jestliže $y(x)$ vyjadřuje závislost dráhy y na čase x, pak $y'(x)$ je okamžitá rychlost v čase x a $y''(x)$ je okamžité zrychlení v čase x. Fyzikálně řečeno tedy podmínka $y(x_0) = y_0$ zadává počáteční polohu a podmínka $y'(x_0) = y_1$ počáteční okamžitou rychlost (vždy v čase x_0). S rovnicí (2.3) se v aplikacích setkáváme velice často, neboť jde o matematický zápis druhého Newtonova zákona. Speciálního případu této rovnice si podrobněji všimneme později — viz str. 77.

Bude nás opět zajímat, zda počáteční úloha má řešení a zda je toto řešení jediné. Přitom jednoznačnost chápeme analogicky jako u rovnic prvního řádu — viz definice 1.4.

Zformulujeme nejprve, co budeme chápat slovy, že funkce $f(x, z_0, \ldots, z_{n-1})$ *splňuje v bodě* $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \Omega$ *lokálně Lipschitzovu podmínku*:



Obr. 2.1: Počáteční úloha pro rovnici druhého řádu

Existuje konstanta $K > 0$ a okolí O bodu $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$, $O \subset \Omega$, tak, že pro každé dva body $(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in O$, $(x_0, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in O$ platí

$$|f(x_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) - f(x_0, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})| \leq K(|a_0 - b_0| + \dots + |a_{n-1} - b_{n-1}|).$$

Přitom okolím bodu $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ rozumíme libovolnou otevřenou kouli v R^{n+1} se středem v tomto bodě. Lipschitzova podmínka je např. splněna, existují-li *lokálně ohraničené* parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}$ v Ω, což je splněno např., jsou-li tyto derivace *spojité* v Ω.

Věta 2.1 (O existenci a jednoznačnosti) *Nechť $f(x, z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset R^{n+1}$. Pak pro každé $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ má počáteční úloha*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

alespoň jedno řešení.

Je-li navíc v každém bodě Ω splněna lokálně Lipschitzova podmínka, je toto řešení jediné.

S rovnicí (2.2) se ještě setkáme ve 3. kapitole, kde si všimneme její souvislosti se systémem diferenciálních rovnic.

2.2 Lineární rovnice n-tého řádu

2.2.1 Úvodní poznámky

Tak jako u rovnic prvního řádu i u rovnic vyšších řádů nás budou především zajímat otázky nalezení (obecného) řešení. Je ovšem přirozené čekat, že potíže spojené s touto úlohou u rovnic prvního řádu — viz str. 10 — se zde ještě zvýší. Zatímco u rovnic prvního řádu jsme byli schopni uvést alespoň některé typy rovnic, které je možné řešit pomocí kvadratur, je u rovnic n-tého řádu, kde $n \geq 2$, škála podobných rovnic podstatně chudší. Mezi takové rovnice patří např.

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.4}$$

kde obecné řešení dostaneme n-násobnou integrací, tj.

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{\int\Bigg(\cdots\Bigg(\int\Bigg(\int}_{n\text{-krát}} f(x)\,dx + c_1\Bigg)\,dx + c_2\Bigg)\cdots\Bigg)\,dx + c_n = \\ &= d_1 + d_2 x + \cdots d_{n-1}x^{n-1} + \underbrace{\int\cdots\Bigg(\int}_{n\text{-krát}} f(x)\,dx\Bigg)\cdots\,dx. \end{aligned}$$

Příklad 2.1 Najděte obecné řešení rovnice $y''' = \sin x$.

Řešení: Trojnásobnou integrací postupně dostáváme

$$\begin{aligned} y''(x) &= \int \sin x\,dx = -\cos x + c_1, \\ y'(x) &= \int(-\cos x + c_1)\,dx = -\sin x + c_1 x + c_2, \\ y(x) &= \int(-\sin x + c_1 x + c_2)\,dx = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

Označíme-li $d_3 = \frac{c_1}{2}$, $d_2 = c_2$, $d_1 = c_3$, má obecné řešení tvar

$$y = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + \cos x.$$

Jiným takovým typem je rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)}).$$

Tu substitucí $z(x) = y^{(n-1)}(x)$ převedeme na rovnici prvního řádu

$$z' = f(x, z).$$

Pokud tuto rovnici dokážeme vyřešit, dostaneme $y(x)$ ze $z(x)$ pomocí $(n-1)$-násobné integrace, neboť jde o rovnici typu (2.4).

Příklad 2.2 Najděte obecné řešení rovnice $y'' = (y')^2$.

Řešení: Položíme $z(x) = y'(x)$. Po dosazení dostaneme

$$z' = z^2,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými. Pro $z \neq 0$ je

$$\frac{dz}{dx} = z^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{z^2} = dx \quad \Longrightarrow \quad \int z^{-2}\,dz = \int dx.$$

Po integraci vyjde

$$\frac{z^{-1}}{-1} = x + c \quad \Longrightarrow \quad z = -\frac{1}{x+c}, \quad c \in R.$$

Kromě toho má rovnice řešení $z \equiv 0$. Pro $y(x)$ máme tedy rovnici

$$y' = -\frac{1}{x+c},$$

jejíž integrací dostaneme

$$y = -\int \frac{dx}{x+c} \quad \Longrightarrow \quad y = -\ln|x+c| + d.$$

Dále řešení $z \equiv 0$ odpovídá

$$y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = k, \quad k \in R.$$

Celkově má tedy naše rovnice řešení

$$y = -\ln|x+c| + d, \; x \neq -c, \text{ kde } c, d \in R \quad \text{a} \quad y = k, \; k \in R.$$

Některé další typy rovnic lze nalézt např. v [10].

V tomto oddíle se budeme zabývat tzv. *lineárními rovnicemi*, a to podrobněji, než jsme dosud zkoumali předchozí rovnice (i když většinu tvrzení opět nebudeme dokazovat). Otázkou je, proč zrovna tyto rovnice si zasluhují takovou pozornost. Důvody jsou dva. Jednak je poměrně snadné uvést řadu jejich vlastností. Zkoumat ovšem něco jen proto, že je to celkem snadné, by mohlo být samoúčelné, pokud by příslušné výsledky nebyly k něčemu užitečné. A tomu tak v tomto případě skutečně je. Druhým důvodem totiž je, že lineárními rovnicemi lze přibližně nahradit (aspoň lokálně) nelineární rovnice. Pokusíme se naznačit, v čem tzv. *linearizace* spočívá. Uvažujme rovnici

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.5}$$

Příslušnou funkci $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ nahradíme při *pevném* x Taylorovým rozvojem stupně jedna v okolí nějakého bodu $(y_0, y_1, \dots, y_n)$; jde tedy vlastně o náhradu totálním diferenciálem. Platí

$$\begin{aligned} F(x, z_0, z_1, \dots, z_n) &= F(x, y_0, y_1, \dots, y_n) + dF(x, y_0, y_1, \dots, y_n) + \\ &\quad + R(x, z_0, z_1, \dots, z_n), \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde zbytek $R(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je pro $(z_0, \dots, z_n)$ „blízké" $(y_0, \dots, y_n)$ „malý". Přitom platí

$$dF(x, y_0, \dots, y_n) = \frac{\partial F(x, y_0, \dots, y_n)}{\partial z_0}(z_0 - y_0) + \dots + \frac{\partial F(x, y_0, \dots, y_n)}{\partial z_n}(z_n - y_n).$$

Nechť $h(x)$, $x \in J$, je řešení rovnice (2.5). Protože čísla $y_0, \dots, y_n$ mohou ve (2.6) záviset na x (rozvoj jsme dělali vždy při pevném x), lze v (2.6) volit za střed rozvoje $\big(h(x), h'(x), \dots, h^{(n)}(x)\big)$. Pak vzhledem k tomu, že $h(x)$ splňuje (2.5), má (2.6) s tímto středem tvar

$$\begin{aligned} F(x, z_0, \dots, z_n) &= \frac{\partial F}{\partial z_0}\Big(z_0 - h(x)\Big) + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_n}\Big(z_n - h^{(n)}(x)\Big) + \\ &\quad + R(x, z_0, \dots, z_n), \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{\partial F\big(x, h(x), h'(x), \dots, h^{(n)}(x)\big)}{\partial z_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Po dosazení (2.7) do (2.5) dostáváme

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}\Big(y - h(x)\Big) + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_n}\Big(y^{(n)} - h^{(n)}(x)\Big) + R\Big(x, y, y', \dots, y^{(n)}\Big) = 0.$$

Připomeňme, že tato rovnice má řešení $y = h(x)$, tedy je

$$R\Big(x, h(x), h'(x), \dots, h^{(n)}(x)\Big) \equiv 0, \quad x \in J. \tag{2.8}$$

Zaveďme nyní novou neznámou $u(x) = y(x) - h(x)$. Pak

$$u'(x) = y'(x) - h'(x), \dots, u^{(n)}(x) = y^{(n)}(x) - h^{(n)}(x)$$

a předchozí rovnice nabývá tvar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial z_0}u + \frac{\partial F}{\partial z_1}u' + \dots + \frac{\partial F}{\partial z_n}u^{(n)} + \\ &\quad + R\Big(x, u + h(x), u' + h'(x), \dots, u^{(n)} + h^{(n)}(x)\Big) = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tato rovnice má vzhledem k (2.8) řešení $u(x) \equiv 0$.

Uvažujme nyní, co by se stalo, kdybychom v takto upravené rovnici zanedbali výraz $R\left(x, u + h(x), u' + h'(x), \ldots, u^{(n)} + h^{(n)}(x)\right)$, který je pro $u(x)$ „blízké" nule „malý". Rovnice (2.9) pak přejde v rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial z_0}u + \frac{\partial F}{\partial z_1}u' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial z_n}u^{(n)} = 0, \tag{2.10}$$

kde $\frac{\partial F}{\partial z_i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, jsou konkrétní funkce proměnné x nezávisející na u.

Jak dále uvidíme, rovnice (2.10) je právě zmíněná lineární rovnice. Říkáme, že rovnice (2.10) vznikla z rovnice (2.5) *linearizací* v okolí jejího řešení $h(x)$. Je-li $y(x)$ řešení (2.5), vyjadřuje $u(x)$ odchylku $y(x)$ od pevného řešení $h(x)$, a tedy rovnice (2.9) je diferenciální rovnicí pro tuto odchylku.

Otázkou nyní je, jaký je vztah mezi řešeními rovnic (2.9) a (2.10). Lze ukázat, že pokud $R\left(x, u + h(x), u' + h'(x), \ldots, u^{(n)} + h^{(n)}(x)\right)$, je „malé", tj. pokud u je „blízké" nule, jsou řešení (2.9) a (2.10) „přibližně" stejná. Jinými slovy řešení rovnic (2.9) a (2.10), která jsou „blízká nule", jsou přibližně stejná. To vyplývá z významné skupiny tzv. *vět o spojité závislosti na počátečních podmínkách a parametrech* — viz např. práce [6, str. 93], [14, str. 224,231], [18, str. 178], [29, str. 326] a pod.

Princip linearizace je velmi významný a v inženýrské praxi často využívaný. Mnohdy je však používán velmi nepřesně, což může vést k naprosto nesprávným závěrům. Je třeba mít na paměti, že zdaleka ne všechna řešení rovnic (2.9) a (2.10) jsou „přibližně stejná", ale pouze ta, která jsou „dostatečně blízká nule". Kardinální otázkou je, co znamená pro konkrétní rovnici být „dostatečně blízký nule" a být „přibližně stejný".

Dále není obvykle možné uvažovat řešení na příliš dlouhém intervalu — zhruba řečeno, čím delší interval uvažujeme, tím bližší nule musí řešení být. Rozhodně by se každý, kdo chce linearizaci používat, měl důkladně seznámit s výše zmíněnými větami, aby přesně věděl, co lze od této metody očekávat a co ne. Linearizací lze získat ve speciálnějších případech i podrobnější informace, např. o chování v okolí stacionárních řešení a pod. — viz např. [3, str. 409], [6, str. 144], [17, str.217], [29, str. 87] a pod. Celá tato problematika je bohužel mimo rámec těchto skript.

Inženýři se mnohdy domnívají, že není nutné studovat nelineární rovnice, protože je stačí linearizovat a řešení lineárních rovnic vzít za přibližné řešení původních nelineárních rovnic. To je naprosto mylná představa. Existují vlastnosti, které se u lineárních rovnic vůbec nevyskytují, a je tedy naprosto nemožné posuzovat tyto vlastnosti u nelineárních rovnic na základě jejich linearizací. Stačí připomenout např. otázku nelineárních kmitů. Zatímco autonomní nelineární rovnice druhého řádu může mít jediné periodické řešení, homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má buď všechna řešení periodická, nebo žádné. Že se takové rovnice v praxi vyskytují, dokazuje např. tzv. *van der*

Polova rovnice

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu \in R,$$

popisující kmity elektronického oscilátoru nebo její zobecnění, tzv. *Liénardova rovnice*

$$y'' + f(y)y' + g(y) = 0,$$

která se objevuje v akustice a v poslední době v biologii ve spojitosti s otázkami modelování biologických systémů. Zájemce o vlastnosti těchto rovnic odkazujeme např. na [14, str. 295] nebo [20, str. 86].

2.2.2 Vlastnosti lineárních rovnic

Rovnici tvaru

$$b_n(x)y^{(n)}(x) + b_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + b_1(x)y'(x) + b_0(x)y = g(x),$$

kde $b_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ a $g(x)$ jsou funkce, nazýváme *lineární diferenciální rovnice n-tého řádu*. Budeme předpokládat, že $b_n(x) \neq 0$. Pak je možné rovnici vydělit tímto koeficientem a při označení $a_i(x) = \frac{b_i(x)}{b_n(x)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, a $f(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$ nabude rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{2.11}$$

V dalším se budeme zabývat rovnicemi právě tohoto tvaru.

Rovnice (2.11) se nazývá *homogenní*, jestliže $f(x) \equiv 0$, a *nehomogenní* v opačném případě.

Platí následující výsledek týkající se počáteční úlohy.

Věta 2.2 *Nechť funkce $a_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, a $f(x)$ jsou spojité na intervalu J. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in R$ jsou libovolná čísla. Pak rovnice* (2.11) *má právě jedno řešení $y(x)$ splňující počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Toto řešení existuje na celém intervalu J.

Pro další výklad bude výhodné zavést následující označení:

$$\mathscr{L}(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Zobrazení $\mathscr{L}$ přiřazující funkci y novou funkci, danou levou stranou rovnice (2.11), budeme nazývat operátor. Pak (2.11) má tvar

$$\mathscr{L}(y) = f(x).$$

Podobně jako v odstavci 1.3.5 se dokáže tzv. *princip superpozice.*

Věta 2.3 *Nechť $y_1(x)$ je řešení rovnice $\mathscr{L}(y) = f_1(x)$ a $y_2(x)$ je řešení rovnice $\mathscr{L}(y) = f_2(x)$ (tedy levé strany obou rovnic jsou stejné). Pak pro libovolná α, $\beta \in R$ je funkce $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ řešením rovnice*

$$\mathscr{L}(y) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Dále si všimneme samostatně homogenní a nehomogenní rovnice. Uvidíme, že řada vlastností je analogická jako u rovnic prvního řádu. Důkazy proto vesměs neuvádíme.

2.2.3 Homogenní rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{2.12}$$

Z principu superpozice vyplývá následující významný výsledek.

Věta 2.4 *Jsou-li $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice* (2.12) *a $c \in R$, pak také funkce $y_1(x) + y_2(x)$ a $cy_1(x)$ jsou řešení rovnice* (2.12). *Tedy řešení rovnice* (2.12) *tvoří vektorový prostor. Jeho dimenze je n.*

Poznámka 2.2 Chápeme-li operátor $\mathscr{L}$ jako zobrazení z vektorového prostoru funkcí majících spojitou n-tou derivaci na J do vektorového prostoru funkcí spojitých na J, snadno se ověří — viz následující příklad — že jde o *lineární operátor*. Funkce $y(x)$ je řešením (2.12) právě tehdy, když $\mathscr{L}(y) = 0$, tedy když $y(x)$ je prvkem jádra operátoru $\mathscr{L}$. Předchozí věta pak říká, že defekt $\mathscr{L}$ (tj. dimenze jádra) je roven číslu n.

Příklad 2.3 Ověřte, že operátor $\mathscr{L}(y) = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$ je lineární.

Řešení: Je

$\mathscr{L}(y_1+y_2) = (y_1+y_2)'' + a_1(x)(y_1+y_2)' + a_0(x)(y_1+y_2) = y_1'' + y_2'' + a_1(x)y_1' +$
$+ a_1(x)y_2' + a_0(x)y_1 + a_0(x)y_2 = y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 + y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 =$
$= \mathscr{L}(y_1) + \mathscr{L}(y_2).$

Tedy $\mathscr{L}$ je aditivní. Dále pro $\alpha \in R$ je

$\mathscr{L}(\alpha y) = (\alpha y)'' + a_1(x)(\alpha y)' + a_0(x)\alpha y = \alpha(y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y) = \alpha\mathscr{L}(y).$

Operátor $\mathscr{L}$ je tedy i homogenní, tj. celkově je lineární.

V každém vektorovém prostoru konečné dimenze existuje báze. Libovolný prvek tohoto prostoru je pak lineární kombinací prvků této báze. Vybereme tedy n lineárně nezávislých řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ rovnice (2.12). Pak každé řešení rovnice (2.12) má tvar

$$y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x). \tag{2.13}$$

kde $c_1, \dots, c_n$ jsou libovolná reálná čísla. Vzorec (2.13) tedy dává *obecné řešení* rovnice (2.12). Bázi $y_1(x), \dots, y_n(x)$ nazýváme *fundamentální systém* rovnice (2.12).

Všimneme si nyní toho, jak lze posoudit nezávislost řešení rovnice (2.12). Z n-tice řešení vytvoříme determinant

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Tento determinant se nazývá Wrońského[10] determinant neboli *wronskián*. Lze ukázat, že wronskián je řešením jisté lineární rovnice prvního řádu. V důsledku toho platí:

Věta 2.5 *Buď je $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$ na J, nebo je $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ na J.*

Tento výsledek dává smysl následujícímu tvrzení.

Věta 2.6 *Množina n řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice (2.12) je lineárně nezávislá právě tehdy, když $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ na J.*

Stačí tedy ověřit pro konkrétní $x_0 \in J$, zda je $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)]$ roven nule nebo ne. Na konkrétní volbě x_0 nezáleží. Wronskián je totiž buď pořád nulový nebo pořád nenulový.

Poznámka 2.3 Předchozí kritérium nezávislosti neplatí obecně pro n-tici funkcí, která *není* řešením nějaké rovnice. Obecně lze tvrdit, že z uvažované podmínky $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ na J plyne nezávislost funkcí $y_1, \dots, y_n$. Opak však obecně neplatí. Pokuste se najít takový příklad.

Vzorec (2.13) nám udává obecné řešení rovnice (2.12). Problémem však zůstává, jak najít nějaký fundamentální systém. Ukazuje se opět bohužel, že i když jsou koeficienty elementárními funkcemi, nemusí existovat fundamentální systém složený z elementárních funkcí. Explicitně najít fundamentální systém lze jen někdy. Nejvýznamnější je případ, kdy koeficienty $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou konstantní; tímto případem se budeme v další části zabývat. O rovnici (2.12) s nekonstantními koeficienty existuje velice rozsáhlá literatura. Vynikajících výsledků dosáhl v této oblasti brněnský matematik Borůvka[11] a jeho žáci — viz např. [1] a [16].

[10] **Jozef Maria Wrońśki-Hoene** (1776–1853) (čti vroňski-hőne) — polský matematik a filosof. Zabýval se základy matematiky a teorií algebraických a diferenciálních rovnic.

[11] **Otakar Borůvka** (1899) — významný český matematik, akademik ČSAV. Pracoval v oblasti projektivní diferenciální geometrie, teorie grup a od začátku 50. let se zabývá obyčejnými diferenciálními rovnicemi.

2.2.4 Snížení řádu lineární rovnice

Známe-li jedno řešení $y_0(x)$ rovnice (2.12), lze snížit její řád, tj. převést ji na rovnici $(n-1)$-ního řádu. Předpokládejme, že $y_0(x) \neq 0$ pro $x \in I$, kde $I \subset J$ je interval. Hledejme řešení (2.12) ve tvaru

$$y(x) = y_0(x)u(x).$$

Lze ověřit, že po výpočtu derivací a dosazení do (2.12) vyjde

$$y_0(x)u^{(n)} + b_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)u' + \\ + \left[y_0^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_0^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y_0(x)\right]u = 0.$$

Přitom $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, jsou funkce vyjádřené pomocí funkcí $y_0(x)$ a $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$. Protože výraz v hranaté závorce je nulový, a $y_0(x) \neq 0$, dostáváme pro u rovnici

$$u^{(n)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_0(x)}u^{(n-1)} + \cdots + \frac{b_1(x)}{y_0(x)}u' = 0.$$

Nyní můžeme položit $u'(x) = v(x)$. Pro $v(x)$ pak máme rovnici $(n-1)$-ního řádu

$$v^{(n-1)} + \frac{b_{n-1}(x)}{y_0(x)}v^{(n-2)} + \cdots + \frac{b_1(x)}{y_0(x)}v = 0. \tag{2.14}$$

Obvykle postupujeme tak, že řešení (2.12) hledáme ve tvaru

$$y(x) = y_0(x)\int v(x)\,dx.$$

Po dosazení se výrazy s integrálem zruší a zůstane přímo rovnice (2.14). Lze ověřit, že je-li $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ fundamentální systém rovnice (2.14), je

$$y_0(x),\ y_0(x)\int v_1(x)\,dx, \ldots, y_0(x)\int v_{n-1}(x)\,dx$$

fundamentální systém (2.12) — viz [14, str. 103].

Příklad 2.4 Najděte obecné řešení rovnice $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0$, $x > 0$, víte-li, že má řešení $y_0(x) = x^2$.

Řešení: Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x^2\int v\,dx$. Pak

$$y' = 2x\int v\,dx + x^2 v \quad \Longrightarrow \quad y'' = 2\int v\,dx + 2xv + 2xv + x^2v'$$

a po dosazení máme

$$2\int v\,dx + 4xv + x^2v' + 2\int v\,dx + xv - 4\int v\,dx = 0,$$

tj. po úpravě

$$v' + \frac{5}{x}v = 0.$$

To je lineární homogenní rovnice prvního řádu, tj. rovnice se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{5}{x}v \quad\Longrightarrow\quad \frac{dv}{v} = -\frac{5}{x}\,dx \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{5}{x}\,dx,$$

takže

$$\ln|v| = -5\ln|x| + \ln c \quad\Longrightarrow\quad v(x) = \frac{c}{x^5}.$$

Volme např. $c = -4$. Pak $v(x) = \frac{-4}{x^5}$ a druhé řešení rovnice je

$$y_1(x) = x^2\int\frac{-4}{x^5}\,dx = -4x^2\cdot\frac{x^{-4}}{-4} = \frac{1}{x^2}.$$

Obecné řešení má tudíž tvar

$$y(x) = c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \quad x > 0.$$

Všimněte si, že výsledek platí i pro $x < 0$.

Poznámka 2.4 *i)* Zcela analogicky lze postupovat v případě nehomogenní rovnice, známe-li řešení příslušné homogenní rovnice. Nově vzniklá rovnice nižšího řádu je opět nehomogenní.
ii) Podobně, známe-li k nezávislých řešení rovnice (2.12), $1 \le k < n$, lze (2.12) za jistých předpokladů převést na rovnici řádu $n - k$. Detaily lze nalézt např. v [6, str. 49] nebo [14, str. 348].

2.2.5 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Půjde nám o nalezení fundamentálního systému rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{2.15}$$

kde $a_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Vyjdeme z příkladu pro rovnici druhého řádu

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0.$$

Pokusme se najít řešení této rovnice ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, kde λ je vhodné číslo. Vypočteme

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

a po dosazení obdržíme

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Protože $e^{\lambda x} \neq 0$, musí λ splňovat rovnici

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

To je (algebraická) kvadratická rovnice, kterou umíme snadno vyřešit. Ukazuje se, že i v obecném případě rovnice (2.15) je situace obdobná.

K rovnici (2.15) přiřadíme algebraickou rovnici

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{2.16}$$

Tato rovnice se nazývá *charakteristická rovnice* diferenciální rovnice (2.15). Levou stranou této rovnice je polynom stupně n. Z algebry je známo — viz např. [13, str. 64] — že tato rovnice má v *komplexním oboru* právě n kořenů, z nichž některé mohou být stejné (tzv. vícenásobné kořeny). Přitom komplexní kořeny se vyskytují vždy po dvojicích (tzv. komplexně sdružené kořeny), které mají stejnou násobnost. Reálné kořeny mohou ale nemusí existovat. Nyní platí:

Nechť $\lambda \in R$ je k-násobný reálný kořen rovnice (2.16), $k \geq 1$. Pak funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda x},\ y_2(x) = xe^{\lambda x}, \ldots, y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

jsou řešeními rovnice (2.15).

Nechť $\alpha \pm \beta i \in C$ je komplexně sdružená dvojice k-násobných komplexních kořenů rovnice (2.16), $k \geq 1$, α, $\beta \in R$, $\beta \neq 0$. Pak funkce

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_3(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_{2k-1}(x) &= x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ y_2(x) &= e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_4(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{2k}(x) &= x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

jsou řešeními rovnice (2.15).

Sestrojíme nyní popsaným způsobem ke každému kořenu rovnice (2.16) odpovídající řetězec řešení. Celkem budeme mít (po přečíslování) n řešení rovnice (2.15)

$$y_1(x), \ldots, y_n(x).$$

Věta 2.7 *Množina řešení zkonstruovaná popsaným způsobem tvoří fundamentální systém rovnice* (2.15).

Poznámka 2.5 Máme tedy zdánlivě efektivní postup, jak najít potřebný fundamentální systém. Zdánlivost spočívá v tom, že obecně neumíme určit kořeny algebraické rovnice (2.16) stupně $n \geq 5$. Přitom pro $n = 3$ a $n = 4$ je to velmi komplikované — viz např. [13, str. 67]. Použití numerických metod je zde problematické — počítat násobné kořeny numericky (tj. i určit jejich násobnost) lze těžko, což nám vadí. Násobné kořeny totiž často výrazně ovlivňují chování řešení rovnice (2.15).

Nyní si na příkladech ukážeme použití vyložené teorie.

Příklad 2.5 Najděte obecné řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$.

Řešení: Napíšeme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Oba kořeny jsou reálné a jednoduché, tedy ke každému přísluší jedno řešení. Proto funkce

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{a} \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

tvoří fundamentální systém. Obecné řešení je pak

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Vypočítáme pro zajímavost wronskián. Vyjde

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-x} - 2e^{-x} = -5e^{-x} \neq 0$$

pro každé $x \in R$, což potvrzuje to, co jsme si o wronskiánu řekli.

Příklad 2.6 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

K této dvojici komplexně sdružených kořenů ($\alpha = 2$, $\beta = 3$) přísluší řešení

$$y_1(x) = e^{2x}\cos 3x \quad \text{a} \quad y_2(x) = e^{2x}\sin 3x.$$

Obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 e^{2x}\sin 3x.$$

Příklad 2.7 Najděte obecné řešení rovnice $y^{(5)} + 2y^{(4)} + y''' = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0.$$

Po úpravě je

$$\lambda^3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda^3(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Tato rovnice má trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = 0$ a dvojnásobný kořen $\lambda_{4,5} = -1$. Trojnásobnému kořenu odpovídá trojice řešení

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = xe^{0x} = x, \quad y_3(x) = x^2e^{0x} = x^2$$

a dvojnásobnému kořenu odpovídá dvojice řešení

$$y_4(x) = e^{-x}, \quad y_5(x) = xe^{-x}.$$

Obecné řešení je

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x}.$$

Příklad 2.8 Najděte obecné řešení rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Tu lze upravit na tvar

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má komplexní kořeny $\pm i$, tedy naše charakteristická rovnice má dvojnásobnou dvojici komplexně sdružených kořenů $\pm i$. Fundamentální systém je tvořen čtveřicí funkcí

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{0x}\cos 1x = \cos x, & y_3(x) &= xe^{0x}\cos 1x = x\cos x,\\ y_2(x) &= e^{0x}\sin 1x = \sin x, & y_4(x) &= xe^{0x}\sin 1x = x\sin x, \end{aligned}$$

a obecné řešení je

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x.$$

Poznámka 2.6 U komplexních kořenů obvykle volíme $\beta > 0$. To není nutné. Např. v předchozím příkladu by $\beta = -1$ dalo $y_1(x) = \cos(-x) = \cos x$ a $y_2(x) = \sin(-x) = -\sin x$. Tedy až na přeznačení konstant (c_2 a c_4 by byly opačné) se nic nestane.

Poznámka 2.7 Z předchozího vyplývá, že řešení rovnice (2.15) je lineární kombinací funkcí tvaru

$$x^k e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{resp.} \quad x^k e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde k je celé nezáporné číslo. Takové funkce se nazývají *kvazipolynomy*. K těmto funkcím vždy existuje Laplaceův obraz, který je racionální ryze lomenou funkcí — viz např. [30]. Tyto rovnice lze tedy snadno řešit užitím Laplaceovy transformace.

2.2.6 Nehomogenní rovnice, variace konstant

Jde o rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x). \tag{2.17}$$

Z principu superpozice vyplývá následující věta, jejíž důkaz je obdobný jako u věty 1.7.

Věta 2.8 *Nechť $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ je fundamentální systém homogenní rovnice* (2.12) *a $y_0(x)$ je partikulární řešení rovnice* (2.17). *Pak obecné řešení rovnice* (2.17) *má tvar*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_0(x), \quad c_1, \ldots, c_n \in R.$$

Jinými slovy obecné řešení nehomogenní rovnice je rovno součtu obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Tento princip jsme již použili u lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu — viz str. 23. Připomeňme si jeho symbolickou podobu:

$$\boxed{\text{OŘNLDR=OŘHLDR+PŘNLDR}}$$

Obecné řešení homogenní rovnice umíme (u rovnic s konstantními koeficienty) najít. Ukážeme si nyní postupně dva způsoby, jak najít partikulární řešení $y_0(x)$ nehomogenní rovnice. V tomto oddíle si všimneme univerzální metody, která je platná i pro rovnice s nekonstantními koeficienty. Předpokládá ovšem, že *známe fundamentální systém* příslušné homogenní rovnice (který však u rovnice s nekonstantními koeficienty neumíme najít).

Variace konstant

Myšlenka metody je obdobná jako u rovnice prvního řádu, tj. v obecném řešení homogenní rovnice se snažíme zaměnit konstanty $c_1, \ldots, c_n$ vhodnými funkcemi
$K_1(x), \ldots, K_n(x)$ a hledat řešení $y_0(x)$ nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y_0(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x) + \cdots + K_n(x)y_n(x).$$

Odvození si ukážeme pro jednoduchost na rovnici druhého řádu

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{2.18}$$

Nechť $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice, tj.

$$y_i'' + a_1(x)y_i' + a_0(x)y_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.19}$$

Hledejme řešení ve tvaru

$$y_0(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

Vypočteme první derivaci (pro stručnost nepíšeme argument x). Vyjde

$$y_0' = K_1'y_1 + K_1y_1' + K_2'y_2 + K_2y_2'.$$

Při výpočtu druhé derivace bychom dostali druhé derivace neznámých funkcí. Požadujme proto, aby

$$K_1'y_1 + K_2'y_2 = 0.$$

Že takovou podmínku můžeme splnit, uvidíme níže. Pak máme

$$y_0' = K_1y_1' + K_2y_2' \quad \Longrightarrow \quad y_0'' = K_1'y_1' + K_1y_1'' + K_2'y_2' + K_2y_2''.$$

Po dosazení do (2.18) a úpravě vyjde

$$K_1'y_1' + K_1y_1'' + K_2'y_2' + K_2y_2'' + a_1(K_1y_1' + K_2y_2') + a_0(K_1y_1 + K_2y_2) = f(x).$$

$$K_1'y_1' + K_2'y_2' + K_1(y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1) + K_2(y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2) = f(x).$$

Vezmeme-li v úvahu (2.19), dostaneme

$$K_1'y_1' + K_2'y_2' = f(x).$$

Celkově tedy máme pro derivace neznámých funkcí K_1' a K_2' soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} K_1'y_1 + K_2'y_2 &= 0, \\ K_1'y_1' + K_2'y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Determinant matice soustavy je wronskián

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

který je nenulový, a proto má naše soustava jediné řešení (které můžeme získat např. Cramerovým pravidlem). Z K_1' a K_2' dostaneme K_1 a K_2 integrací. To ovšem nemusí být možné ve třídě elementárních funkcí. Až na tento problém je však celý algoritmus metody variace konstant efektivní.

V obecném případě dostaneme pro $K_1', \dots, K_n'$ soustavu rovnic

$$\begin{array}{llll} K_1'y_1 & + \cdots + & K_n'y_n & = & 0, \\ K_1'y_1' & + \cdots + & K_n'y_n' & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_1'y_1^{(n-2)} & + \cdots + & K_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\ K_1'y_1^{(n-1)} & + \cdots + & K_n'y_n^{(n-1)} & = & f(x), \end{array} \tag{2.20}$$

pro niž platí totéž, co pro předchozí speciální případ rovnice druhého řádu.

Příklad 2.9 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Řešení: I. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Kořen je dvojnásobný $\lambda_{1,2} = 1$. Fundamentální systém tedy je

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x$$

a obecné řešení homogenní rovnice je

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x.$$

II. Použijeme variaci konstant a řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_0(x) = K_1(x)e^x + K_2(x)xe^x.$$

Systém (2.20) má tvar

$$\begin{aligned} K_1'e^x + K_2'xe^x &= 0, \\ K_1'e^x + K_2'(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Po vykrácení e^x vyjde

$$\begin{aligned} K_1' + K_2' x &= 0, \\ K_1' + K_2'(1+x) &= \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$K_2' = \frac{1}{x^2+1}.$$

Z první rovnice pak máme

$$K_1' = -xK_2' = -x\frac{1}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}.$$

Tedy (volíme nulové integrační konstanty)

$$K_1(x) = \int \frac{-x}{x^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{rcl} x^2+1 & = & t \\ 2x\,dx & = & dt \\ x\,dx & = & \frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| =$$

$$= -\ln\sqrt{x^2+1},$$

$$K_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice tudíž je

$$y_0(x) = -e^x \ln\sqrt{x^2+1} + xe^x \operatorname{arctg} x$$

a obecné řešení má pak tvar

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \ln\sqrt{x^2+1} + xe^x \operatorname{arctg} x, \quad c_1, c_2 \in R.$$

2.2.7 Metoda neurčitých koeficientů

Tato metoda je použitelná pouze pro rovnice s konstantními koeficienty. Navíc pravá strana $f(x)$ musí mít speciální tvar, uvedený níže. Vzhledem k tomu, že takové rovnice se v aplikacích velmi často vyskytují a tata metoda je obvykle výrazně rychlejší než variace konstant, dáváme jí u těchto rovnic přednost.

Uvažujme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{2.21}$$

jejíž lineární části přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{2.22}$$

Probereme postupně typy pravých stran $f(x)$ od nejjednodušších k nejsložitějším.

1. $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n.

Předpokládejme, že číslo 0 je k-násobným kořenem charakteristické rovnice (2.22). Přitom $k = 0$ znamená, že tato rovnice nemá kořen 0.
Pak rovnice (2.21) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x),$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

Příklad 2.10 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y = x$.

Řešení: I. Homogenní rovnice je

$$y'' - y = 0,$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Ta má dva jednoduché reálné kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$, a tudíž obecné řešení homogenní rovnice je

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

II. Pravá strana nehomogenní rovnice je polynom $P(x) = x$ stupně $n = 1$. Tedy $Q(x)$ bude obecný polynom stupně 1, tj. $Q(x) = ax + b$. Charakteristická rovnice nemá kořen 0, proto $k = 0$. Tudíž

$$y_0(x) = x^0(ax + b) = ax + b.$$

Odtud

$$y_0' = a \quad\Longrightarrow\quad y_0'' = 0$$

a po dosazení vyjde

$$0 - (ax + b) = x \quad\Longrightarrow\quad -ax - b = x.$$

Z algebry je známo, že k tomu, aby se dva polynomy rovnaly pro každé $x \in R$, je nutné a stačí, aby měly stejný stupeň a stejné koeficienty u týchž mocnin x. Porovnáváním dostáváme obecně soustavu lineárních rovnic. V našem případě je to:

$$\begin{aligned} x^1 &: \quad -a = 1 \quad\Longrightarrow\quad a = -1, \\ x^0 &: \quad -b = 0 \quad\Longrightarrow\quad b = 0. \end{aligned}$$

Partikulární řešení je

$$y_0(x) = -x$$

a obecné řešení nehomogenní rovnice je pak

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x.$$

Příklad 2.11 Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' = x$.

Řešení: I. Homogenní rovnice je

$$y'' - y' = 0,$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Ta má dva jednoduché reálné kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ a obecné řešení homogenní rovnice tedy je

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^x = c_1 + c_2 e^x.$$

II. Analogicky jako v příkladu 2.10 je $Q(x) = ax + b$. Avšak charakteristická rovnice má jednoduchý kořen 0, proto $k = 1$. Tedy

$$y_0(x) = x^1(ax + b) = ax^2 + bx.$$

Odtud

$$y_0' = 2ax + b \quad \Longrightarrow \quad y_0'' = 2a$$

a po dosazení vyjde

$$2a - (2ax + b) = x \quad \Longrightarrow \quad -2ax + 2a - b = x.$$

Porovnáním vyjde

$$\begin{aligned} x^1 &: \quad -2a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = -\tfrac{1}{2}, \\ x^0 &: \quad 2a - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 2a = -1. \end{aligned}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je

$$y_0(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

a její obecné řešení je

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

---

2. $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha \in R$.

Předpokládejme, že číslo α je k-násobným kořenem charakteristické rovnice (2.22); $k = 0$, nemá-li tento kořen.
Pak rovnice (2.21) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k Q_n(x) e^{\alpha x},$$

kde $Q_n(x)$ je vhodný polynom stupně n s neznámými koeficienty.

Příklad 2.12 Najděte obecné řešení rovnice $y''' - 2y'' = 3e^{2x}$.

Řešení: I. Homogenní rovnice je

$$y''' - 2y'' = 0,$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \implies \lambda^2(\lambda - 2) = 0.$$

Ta má tři reálné kořeny $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{2x} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}.$$

II. Pravá strana $f(x) = 3e^{2x}$ je typu polynom krát exponenciála; přitom polynom $P(x) = 3$ je stupně $n = 0$ a $\alpha = 2$. Tudíž $Q(x) = a$ (konstanta). Dále číslo 2 je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, tedy $k = 1$. Proto

$$y_0(x) = x^1 a e^{2x} = a x e^{2x}.$$

Odtud

$$y_0' = ae^{2x} + 2axe^{2x} \implies y_0'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x} \implies$$

$$\implies y_0''' = 8ae^{2x} + 4ae^{2x} + 8axe^{2x} = 12ae^{2x} + 8axe^{2x}$$

a po dosazení vyjde

$$12ae^{2x} + 8axe^{2x} - 2(4ae^{2x} + 4axe^{2x}) = 3e^{2x} \implies 4ae^{2x} = 3e^{2x}.$$

Protože $e^{2x} \neq 0$, dostaneme po krácení, že

$$4a = 3 \implies a = \frac{3}{4}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice je

$$y_0(x) = \frac{3}{4} x e^{2x}$$

a její obecné řešení je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x}.$$

3. $\boldsymbol{f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x}$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m, $Q_n(x)$ je polynom stupně n a $\alpha, \beta \in R$.
Předpokládejme, že číslo $\alpha + \beta i$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice (2.22); $k = 0$, nemá-li tento kořen.
Pak rovnice (2.21) má partikulární řešení tvaru

$$y_0(x) = x^k \left[R_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + S_s(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right],$$

kde $s = \max\{m, n\}$ (je-li $P_m(x) \equiv 0$, je $s = n$, je-li $Q_n(x) \equiv 0$, je $s = m$) a $R_s(x)$ a $S_s(x)$ jsou vhodné polynomy stupně s s neznámými koeficienty.

Poznámka 2.8 *i)* I když je $P_m(x)$ nebo $Q_n(x)$ nulový, tj. pravá strana obsahuje jen kosinus nebo jen sinus, je nutné do řešení zahrnout $R_s(x)$ i $S_s(x)$, tj. část s kosinem i sinem.

ii) Všimněte si, že typ **3** v sobě zahrnuje pro $\beta = 0$ typ **2** ($\cos 0x = 1$, $\sin 0x = 0$). Dále typ **2** v sobě pro $\alpha = 0$ zahrnuje typ **1** ($e^{0x} = 1$).

iii) Ve všech typech nesmíme zapomínat na faktor x^k: jeho opomenutí způsobí, že při porovnávání koeficientů dostaneme sporný systém lineárních rovnic.

iv) Všimněte si, že u této metody lze najít partikulární řešení jako první, tj. i když neznáme obecné řešení homogenní rovnice; zda je číslo $\alpha + \beta i$ kořenem charakteristické rovnice, ověříme dosazením.

v) Lze dokázat, že dva kvazipolynomy — viz poznámka 2.7 — se rovnají právě tehdy, když obsahují tytéž členy s týmiž koeficienty; jde o zobecnění věty o rovnosti dvou polynomů. Důkaz viz např. [20, str. 38]. V našem případě tedy budeme porovnávat koeficienty u $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$, $x\sin x$ atd.

vi) Z předchozích výsledků vyplývá, že všechna řešení nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty mající na pravé straně kvazipolynom jsou opět kvazipolynomy. Tedy na její řešení lze použít Laplaceovu transformaci — viz poznámka 2.7.

Příklad 2.13 Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 4y = e^x \cos 2x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Řešení: I. Homogenní rovnice je

$$y'' + 4y = 0,$$

její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 e^{0x} \cos 2x + c_2 e^{0x} \sin 2x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

II. Pravá strana $f(x) = e^x \cos 2x$ je třetího typu; přitom $P(x) = 1$, $m = 0$, $Q(x) \equiv 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Tudíž $s = 0$, $R(x) = a$, $S(x) = b$. Dále číslo $1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice, tedy $k = 0$. Proto

$$y_0(x) = x^0(ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x) = ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x.$$

Odtud

$$\begin{aligned}
y_0' &= ae^x \cos 2x - 2ae^x \sin 2x + be^x \sin 2x + 2be^x \cos 2x = \\
&= (a + 2b)e^x \cos 2x + (b - 2a)e^x \sin 2x, \\
y_0'' &= (a + 2b)e^x \cos 2x - 2(a + 2b)e^x \sin 2x + (b - 2a)e^x \sin 2x + \\
&\quad + 2(b - 2a)e^x \cos 2x = (4b - 3a)e^x \cos 2x - (4a + 3b)e^x \sin 2x
\end{aligned}$$

a po dosazení vyjde

$$(4b - 3a)e^x \cos 2x - (4a + 3b)e^x \sin 2x + \\ + 4ae^x \cos 2x + 4be^x \sin 2x = e^x \cos 2x,$$

tj.

$$(a + 4b)e^x \cos 2x + (-4a + b)e^x \sin 2x = e^x \cos 2x.$$

Porovnáním vyjde:

$$\begin{aligned} e^x \cos 2x &: \quad a + 4b = 1, \\ e^x \sin 2x &: \quad -4a + b = 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má jediné řešení $a = \frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$. Partikulární řešení je

$$y_0(x) = \frac{1}{17}e^x \cos 2x + \frac{4}{17}e^x \sin 2x$$

a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{17}e^x \cos 2x + \frac{4}{17}e^x \sin 2x.$$

Nyní dosadíme počáteční podmínky. Dostaneme

$$y(x) = c_1 + \frac{1}{17} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{16}{17}.$$

Dále vypočítáme

$$\begin{aligned} y'(x) \quad = \quad & -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + \frac{1}{17}e^x \cos 2x - \frac{2}{17}e^x \sin 2x + \\ & + \frac{4}{17}e^x \sin 2x + \frac{8}{17}e^x \cos 2x. \end{aligned}$$

Po dosazení dostaneme

$$y'(0) = 2c_2 + \frac{1}{17} + \frac{8}{17} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 = -\frac{9}{34}.$$

Hledané partikulární řešení je

$$y(x) = \frac{16}{17} \cos 2x - \frac{9}{34} \sin 2x + \frac{1}{17}e^x \cos 2x + \frac{4}{17}e^x \sin 2x.$$

Příklad 2.14 Najděte obecné řešení rovnice $y''' + 2y'' + y' = x^2 + \sin x$.

Řešení: I. Homogenní rovnice je

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$. Tudíž obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}.$$

II. K určení partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme princip superpozice — viz věta 2.3. Položme $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin x$.

První část pravé strany $f_1(x) = x^2$ je typu **1**, kde $n = 2$, tedy bude $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Protože charakteristická rovnice má jednoduchý kořen 0, je $k = 1$. Pak

$$y_1(x) = x^1(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Odtud

$$y_1' = 3ax^2 + 2bx + c \quad\Longrightarrow\quad y_1'' = 6ax + 2b \quad\Longrightarrow\quad y_1''' = 6a$$

a po dosazení máme

$$6a + 12ax + 4b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2,$$

tj.

$$3ax^2 + (12a + 2b)x + 6a + 4b + c = x^2.$$

Porovnáním vyjde

$$\begin{array}{lll} x^2: & 3a = 1 \quad\Longrightarrow & a = \frac{1}{3}, \\ x^1: & 12a + 2b = 0 \quad\Longrightarrow & b = -2, \\ x^0: & 6a + 4b + c = 0 \quad\Longrightarrow & c = 6. \end{array}$$

Partikulární řešení je

$$y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x.$$

Druhá část pravé strany $f_2(x) = \sin x$ je typu **3**, kde $P(x) \equiv 0$, $Q(x) = 1$, $n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, a tedy $s = 0$, $R(x) = a$, $S(x) = b$. Protože číslo $0 + 1i = i$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Pak

$$y_2(x) = x^0(a\cos x + b\sin x) = a\cos x + b\sin x.$$

Odtud

$$y_2' = -a\sin x + b\cos x \quad\Longrightarrow\quad y_2'' = -a\cos x - b\sin x \quad\Longrightarrow\quad y_1''' = a\sin x - b\cos x$$

a po dosazení vyjde

$$a\sin x - b\cos x - 2a\cos x - 2b\sin x - a\sin x + b\cos x = \sin x.$$

$$-2a\cos x - 2b\sin x = \sin x.$$

Porovnáním vyjde:

$$\begin{array}{lll} \cos x: & -2a = 0 & \Longrightarrow \quad a = 0, \\ \sin x: & -2b = 1 & \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{2}. \end{array}$$

Partikulární řešení je

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x.$$

Partikulární řešení celé naší rovnice je pak

$$y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x$$

a obecné řešení je

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x - \frac{1}{2}\sin x.$$

Poznámka 2.9 Vraťme se k fyzikální interpretaci rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

kde $f(x)$ je kvazipolynom. Pokud vyjde $k > 0$, tj. je třeba zvýšit stupeň uvažovaných polynomů, jde o tzv. *rezonanci*. Homogenní rovnice popisuje tzv. vlastní kmity soustavy, kdežto nehomogenní rovnice popisuje tzv. nucené kmity soustavy. Prakticky řečeno, o rezonanci jde, pokud pravá strana nehomogenní rovnice je řešením homogenní rovnice.

2.2.8 Eulerova rovnice

Jde o lineární rovnici s nekonstantními koeficienty tvaru

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \quad x > 0, \tag{2.23}$$

kde a_i, $i = 0, \ldots, n-1$, jsou reálná čísla.

Tuto rovnici lze zavedením nové nezávisle proměnné t vztahem $x = e^t$, tj. $t = \ln x$, převést na lineární rovnici s konstantními koeficienty. Označme $y(x) = y(e^t) = u(t)$, tj. $y(x) = u(\ln x)$. Pro derivaci dostáváme podle pravidel pro derivování složené funkce

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{u} \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\dot{u} \cdot \frac{1}{x})}{dx} = \frac{d\dot{u}}{dx} \cdot \frac{1}{x} + \dot{u}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d\dot{u}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \dot{u} = \ddot{u}\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,\dot{u}$$

atd.

Např. pro rovnici druhého řádu

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \tag{2.24}$$

vychází

$$x^2 \left(\ddot{u}\,\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,\dot{u} \right) + a_1 x \dot{u}\,\frac{1}{x} + a_0 u = f(e^t),$$

tj.

$$\ddot{u} + (a_1 - 1)\dot{u} + a_0 u = f(e^t), \tag{2.25}$$

což je skutečně rovnice s konstantními koeficienty. Tento výsledek platí pro libovolné n.

Obecně dostaneme rovnici

$$u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 = f(e^t), \tag{2.26}$$

kde $b_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Je-li $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ fundamentální systém rovnice (2.26), lze snadno ověřit, že $u_1(\ln x), \ldots, u_n(\ln x)$ je fundamentální systém rovnice (2.23).

Výpočet vyšších derivací y je poměrně pracný. Je však možné získat charakteristickou rovnici příslušnou ke (2.26) přímo z koeficientů a_i rovnice (2.23). Např. pro rovnici (2.25) je charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Skutečně obecně platí — viz [14, str. 130], že

$$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda - n + 1) +$$
$$+ a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda - n + 2) + \cdots + a_2\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0.$$

Použití si ukážeme na příkladu.

Příklad 2.15 Najděte obecné řešení rovnice $x^3 y''' + x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0$.

Řešení: Položme $x = e^t$. Po transformaci vznikne lineární homogenní rovnice, jíž přísluší charakteristická rovnice

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) + 3\lambda - 8 = 0,$$

tj.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0.$$

Transformovaná rovnice je tedy

$$\dddot{u} - 2\ddot{u} + 4\dot{u} - 8u = 0.$$

Tu jsme však ani nepotřebovali vypisovat.

Charakteristická rovnice má celočíselný kořen $\lambda_1 = 2$ (ten lze najít postupem uvedeným např. v [13. str. 68]). Po vydělení kořenovým činitelem $\lambda - 2$ dostaneme rovnici $\lambda^2 + 4 = 0$, která má kořeny $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Transformovaná rovnice má tudíž fundamentální systém

$$u_1(t) = e^{2t}, \quad u_2(t) = \cos 2t, \quad u_3(t) = \sin 2t,$$

a tedy původní rovnice má fundamentální systém

$$\begin{aligned} &y_1(x) = u_1(\ln x) = e^{2\ln x} = x^2, \quad y_2(x) = u_2(\ln x) = \cos 2\ln x, \\ &y_3(x) = u_3(\ln x) = \sin 2\ln x. \end{aligned}$$

Obecné řešení naší rovnice je

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 \cos 2\ln x + c_3 \sin 2\ln x.$$

Poznámka 2.10 Analogicky lze zřejmě postupovat i pro $x < 0$, pouze se zvolí substituce $x = -e^t$. Ne vždy je nutné provádět to prakticky. Např. v předchozím příkladu stačí upravit výsledek na tvar

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 \cos \ln x^2 + c_3 \sin \ln x^2,$$

který je definovaný pro každé $x \neq 0$.

Cvičení

1. Najděte obecné řešení rovnic vyšších řádů.

a) $y''' = \dfrac{1}{x}$	b) $y^{(7)} = e^{2x}$	c) $x^2 y''' = (y'')^2$
d) $y''' = (y'')^3$	e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$	f) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

2. Najděte obecné řešení následujících rovnic, znáte-li jedno resp. dvě partikulární řešení.

a) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

b) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

c) $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{4}{x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^2$

d) $4xy'' + 2y' + y = 0, \quad y_1(x) = \cos\sqrt{x}$

e) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0, \quad y_1(x) = e^x$

f) $x^3 y''' - 3x^2 y'' - 6xy' - 6y = 0, \quad y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^2$

V následujících příkladech najděte obecné řešení, a pokud jsou dány počáteční podmínky, i příslušné partikulární řešení.

3. a) $y'' + 2y' - 3y = 0$
   b) $y'' + 4y = 0$
   c) $y'' - 6y' + 9y = 0$
   d) $3y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = -1$
   e) $2y'' + y' - y = 0$
   f) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -1$
   g) $y'' - 4y' + 13y = 0$
   h) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi) = -1, \ y'(\pi) = 5$
   i) $y'' - 6y' = 0$
   j) $y'' = 0, \quad y(2) = 3, \ y'(2) = -1$

4. a) $y''' + 9y' = 0$
   b) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$
   c) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
   d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
   e) $64y^{(8)} + 48y^{(6)} + 12y^{(4)} + y'' = 0$
   f) $y^{(5)} - y' = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0, \ y'''(0) = 1, \ y^{(4)}(0) = 2$

5. Variace konstant

   a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$
   b) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
   c) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$
   d) $y''' + 2y'' = \dfrac{2 - 2x}{x^3}$

6. Speciální pravé strany

   a) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
   b) $y'' - 2y' - 2y = 2x$
   c) $y'' + 4y' - 5y = 1$
   d) $2y'' - 5y' = 5x^2 - 2x - 1$
   e) $2y'' + y' - y = 2e^x$
   f) $y'' - y = e^{-x}$
   g) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$
   h) $y'' - 7y' - 6y = \sin x$
   i) $y'' + y = \cos x$
   j) $y'' - 3y' - 2y = \sin 2x + \cos 2x$
   k) $y'' + 4y' + 4 = xe^{2x}$
   l) $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$
   m) $y'' + y = x \sin x$
   n) $y'' - 3y' - 2y = x - e^{-2x} + 1$
   o) $y'' + y = 5 - 3\cos 2x + e^x$
   p) $y'' - y' = 2(1 - x), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$
   q) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 2y''' = 8x - 12$
   r) $y''' - 3y' - 2y = \sin x + 2\cos x$
   s) $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$
   t) $y''' - 2y'' - y' = -2xe^{-2x}, \quad y(0) = 2,$
   $y'(0) = 1, \ y''(0) = 0$

7. Eulerova rovnice

   a) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$
   b) $x^2y'' + xy' - y = x$
   c) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{2}{x}$
   d) $x^2y'' - 2xy' - 2y + x - 2x^3 = 0$
   e) $x^3y''' + xy' - y = 0$
   f) $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' - 5x^2y'' - xy' + y = \ln^2 x - 4$

Výsledky:

1. a) $x^2 \ln|x| + c_1 + c_2x + c_3x^2$. b) $\frac{e^{2x}}{128} + c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 + c_7x^6$, c) $c_1 \frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 - c_1^2(x + c_1)\ln|x + c_1|$. d) $\frac{1}{3}\sqrt{(c_1 - 2x)^3} + c_2x + c_3$. e) $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^5$. f) $-\frac{x}{c_1} + \frac{c_1^2+1}{c_1^2}\ln|1 + c_1x| + c_2$. **2.** a) $c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x}$. b) $\frac{1}{\sqrt{x}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. c) $c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2}$. d) $c_1 \cos\sqrt{x} + c_2 \sin\sqrt{x}$. e) $c_1e^x + c_2x^2$.

f) $c_1x+c_2x^2+c_3x^3$. **3.** a) $c_1e^x+c_2e^{-3x}$, b) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$, c) $c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$, d) $c_1+c_2e^{-\frac{4}{3}x}$; $-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}x}$. e) $c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{1}{2}x}$, f) $c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$; $2e^{-x}+xe^{-x}$, g) $c_1e^{2x}\cos 3x+c_2e^{2x}\sin 3x$, h) $c_1e^{-2x}\cos x+c_2e^{-2x}\sin x$; $e^{2(\pi-x)}(\cos x-3\sin x)$, i) $c_1+c_2e^{6x}$, j) c_1+c_2x; $5-x$. **4.** a) $c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+c_3$, b) $c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+$ $+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$, c) $(c_1+c_2x)e^{2x}+(c_3+c_4x)e^{-2x}$. d) $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$, e) $(c_1+c_2x+c_3x^2)\cos\frac{x}{2}+(c_4+c_5x+c_6x^2)\sin\frac{x}{2}+c_7+c_8x$, f) $c_1e^x+c_2e^{-x}+$ $+c_3\cos x+c_4\sin x+c_5$; $e^x+\cos x-2$. **5.** a) $c_1e^x+c_2xe^x+xe^x\ln|x|$, b) $c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\cos 2x\ln|\sin x|-(x+\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x)\sin 2x$, c) $c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+$ $+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$. d) $c_1+c_2x+c_3e^{-2x}+\ln|x|$. **6.** a) $(c_1+c_2x)e^{3x}+$ $+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$. b) $e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+x+1$. c) $c_1e^x+c_2e^{-5x}-\frac{1}{5}$, d) $c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$. e) $c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$, f) $c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{x}{2}e^{-x}$, g) $(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{3}{2}x^2e^{2x}$. h) $c_1e^{6x}+c_2e^x+\frac{5}{74}\sin x+\frac{7}{74}\cos x$, i) $c_1\cos x+c_2\sin x+$ $+\frac{1}{2}x\sin x$. j) $c_1e^x+c_2e^{2x}-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x$. k) $(c_1+c_2x)e^{-2x}+(\frac{x}{16}-\frac{1}{32})e^{2x}$, l) $c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{20}e^{2x}(\sin 2x+2\cos 2x)$. m) $\left(c_1-\frac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(c_2+\frac{x}{4}\right)\sin x$, n) $c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$. o) $c_1\cos x+c_2\sin x+5+\cos 2x+\frac{1}{2}e^x$, p) $c_1+c_2e^x+x^2$; e^x+x^2. q) $c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^x+c_5e^{2x}+\frac{1}{6}x^4$, r) $c_1e^{2x}+$ $+(c_2+c_3x)e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$. s) $c_1+c_2e^x+c_3e^{3x}+\frac{x}{27}(3x^2+12x+26)+\frac{1}{4}(1-$ $2x)e^{2x}$. t) $c_1+c_2e^{-x}+c_3xe^{-x}+\left(x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x}$; $e^{-x}(x-4)+\frac{7}{2}+\left(x+\frac{5}{2}\right)e^{-2x}$. **7.** a) $c_1x^3+c_2x^7$. b) $\frac{x}{2}+c_1\cos\ln|x|+c_2\sin\ln|x|$. c) $c_1x+c_2x\ln|x|+x\ln^2|x|$, d) $x\ln|x|+c_1x+c_2x^2+x^3$. e) $c_1x+c_2x\ln|x|+c_3x\ln^2|x|$. f) $c_1x+c_2x\ln x+$ $+\frac{c_3}{x}+\frac{c_4}{x}\ln x+\ln^2 x$.

2.3 Ukázky aplikací rovnic vyšších řádů

Rovnice vyšších řádů mají rozsáhlé aplikace. Připomeňme jen, že se vyskytují v mechanice, teorii pružnosti, teorii elektrických obvodů a mnoha dalších. Na obalu monografie [14] je možné najít následující citát:

> Fyzikální zákony se nejjednodušeji a nejpřirozeněji formulují ve tvaru diferenciálních rovnic; proto diferenciální rovnice studovali největší matematikové a matematičtí fyzikové od dob Newtonových.
>
> G. BIRKHOFF — G. C. ROTA

Při studiu dalších předmětů teoretického základu inženýra i předmětů specializace si sami ověříte, že uvedený citát je pravdivý.

Není možné, aby v tomto omezeném textu byly uvedeny všechny možné ukázky aplikací diferenciálních rovnic. Omezíme se pouze na jeden typ rovnice, na který vede řada důležitých úloh. Jde o rovnici *lineárního oscilátoru*

$$y'' + 2ay' + b^2 y = 0, \quad a \geq 0, \ b > 0. \tag{2.27}$$

Je to homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty . Všimneme si nejprve úloh, které vedou na tuto rovnici.

1. Kmity pružiny.

Uvažujme pružinu o tuhosti $k > 0$, na níž je zavěšena kulička o hmotnosti $m > 0$. Vychýlením z rovnovážné polohy začne kulička kmitat. Předpokládejme dále, že na pohyb působí odpor, který je úměrný okamžité rychlosti. Nechť součinitel odporu je $c \geq 0$. Označme $y(t)$ výchylku z rovnovážné polohy v čase t — viz obr. 2.2. Předpokládáme-li, že jde o malé kmity, plyne z druhého Newtonova zákona, že

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} - ky \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0\,;$$

přitom $\dot{y}$ je okamžitá rychlost a $\ddot{y}$ je okamžité zrychlení. Označíme-li $a = \frac{c}{2m}$, $b = \sqrt{\frac{k}{m}}$, dostáváme pro $y(t)$ rovnici (2.27).

2. Matematické kyvadlo

Uvažujme kuličku o hmotnosti $m > 0$ zavěšenou na vlákně délky $l > 0$, jehož hmotnost je zanedbatelná. Vychýlením z rovnovážné polohy začne kulička kmitat (v rovině). Označme $\varphi(t)$ úhlovou odchylku od rovnovážné polohy v čase t měřenou v radiánech — viz obr. 2.3. Na kuličku působí gravitační síla mg, kde g je gravitační konstanta. Její složka odpovídající směru tečny ke kružnici je $-mg\sin\varphi$. Označíme-li délku oblouku na kružnici odpovídající úhlu φ jako s, je $s = l\varphi$, a tedy $\ddot{s} = \frac{d^2(l\varphi)}{dt^2} = l\ddot{\varphi}$. Z Newtonova zákona pak máme

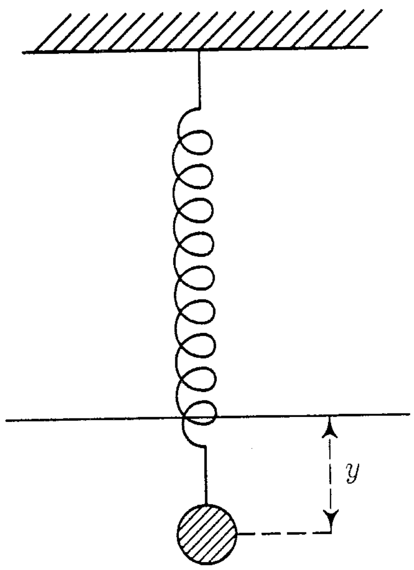
$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi.$$

Pro malé úhly ($|\varphi| < 5°$) je $\sin\varphi \doteq \varphi$. Tedy

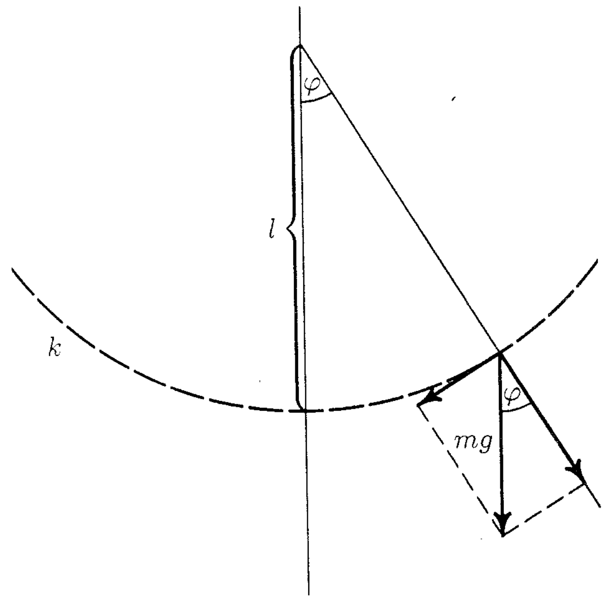
$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Označíme-li $\sqrt{\frac{g}{l}} = b$, dostáváme pro φ rovnici (2.27), kde $a = 0$.

Kdybychom uvažovali i odpor prostředí, dostali bychom obdobně jako u pružiny rovnici (2.27), kde $a > 0$. Všimněte si rovněž, že náhrada $\sin\varphi \doteq \varphi$ je vlastně linearizací — viz str. 51.



Obr. 2.2: Kmity pružiny



Obr. 2.3: Matematické kyvadlo

3. Elektrický obvod.

Uvažujme elektrický obvod, v němž je rezistor o odporu $R \geq 0$ ohmů a induktor o indukčnosti $L > 0$ henry. V čase $t = 0$ je k obvodu připojen kapacitor o kapacitě $C > 0$ faradů nabitý na hodnotu $u(0)$ — viz obr. 2.4. Označme $i(t)$ proud v ampérech, který obvodem prochází v čase t. Napětí na induktoru, rezistoru a kapacitoru při průchodu proudu $i(t)$ je postupně $Li'(t)$, $Ri(t)$ a $\frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds + u(0)$. Z druhého Kirchhoffova zákona dostaneme

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds + u(0) = 0$$

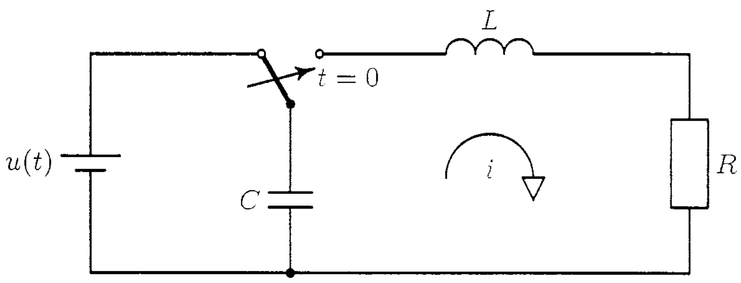
a po derivaci a úpravě

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0 \quad \Longrightarrow \quad i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0.$$

Označíme-li $a = \frac{R}{2L}$, $b = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, dostaneme pro i rovnici (2.27).

Všimneme si nyní podrobněji rovnice (2.27). Ta popisuje tzv. *vlastní kmity* lineárního oscilátoru. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0.$$



Obr. 2.4: Elektrický obvod

I. Jestliže $a = 0$, je

$$\lambda^2 + b^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4b^2}}{2} = \pm ib$$

a obecné řešení má tvar

$$y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx.$$

Jde o tzv. *harmonický lineární oscilátor*. Vzorec obecného řešení je s ohledem na aplikace obvykle vhodnější upravit na jiný tvar. Je-li $y(x)$ netriviální řešení, je $c_1^2 + c_2^2 > 0$ (aspoň jeden koeficient je nenulový), a tedy lze psát

$$y(x) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos bx + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin bx \right).$$

Zvolme nyní úhel φ tak, aby

$$\sin \varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad \cos \varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Takový úhel vždy existuje. Označme ještě $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0$. Pak

$$y(x) = A(\sin \varphi \cos bx + \cos \varphi \sin bx) = A \sin(bx + \varphi).$$

Pro $A = 0$ obsahuje tento vzorec i triviální řešení. Číslo A se nazývá *amplituda* a úhel φ *fáze*. Tato rovnice popisuje harmonické kmity. Jde o *netlumené kmity*.

II. Je-li $a^2 > b^2$, je

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

což jsou reálné různé kořeny. Obecné řešení je

$$y(x) = c_1 e^{(-a + \sqrt{a^2 - b^2})x} + c_2 e^{(-a - \sqrt{a^2 - b^2})x}.$$

Jde o neperiodické kmity, které nazýváme *silně tlumené.*

III. Je-li $a^2 = b^2$, je

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{0}}{2} = -a,$$

což je dvojnásobný reálný kořen. Obecné řešení je

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-ax}.$$

Jde o neperiodické kmity, které se nazývají *kriticky tlumené.*

IV. Je-li $a^2 < b^2$, je

$$\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2},$$

což je dvojice komplexně sdružených kořenů. Označíme-li $\sqrt{b^2 - a^2} = \omega > 0$, je obecné řešení tvaru

$$y(x) = c_1 e^{-ax} \cos \omega x + c_2 e^{-ax} \sin \omega x.$$

Analogicky jako u harmonického oscilátoru lze tento výsledek upravit na tvar

$$y(x) = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi), \quad A \geq 0.$$

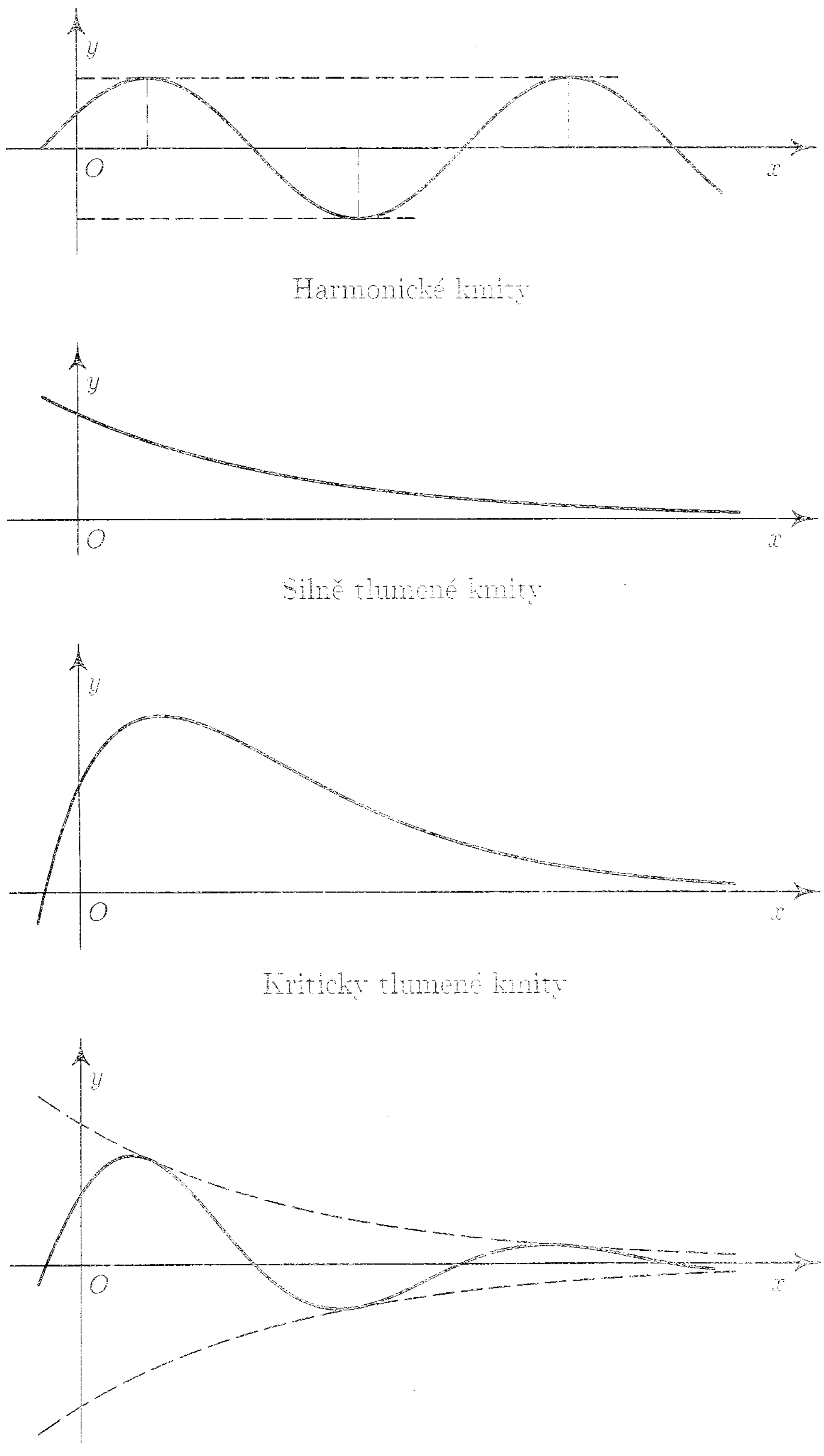
Jde o periodické kmity, který se nazývají *slabě tlumené* (ovšem sama funkce $Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi)$ není pro $a \neq 0$ periodická!).

Průběh řešení je znázorněn na obrázku 2.5.

Poznámka 2.11 Podobně vyšetřování nehomogenní rovnice tvaru

$$y'' + 2ay' + b^2 y = f(x)$$

vede na tzv. nucené kmity, o nichž jsme se zmínili v poznámce 2.9 v souvislosti s rezonancí. Zde ovšem výsledek podstatně závisí na konkrétním tvaru budícího „členu“ $f(x)$.



Obr. 2.5: Průběh řešení lineárního oscilátoru