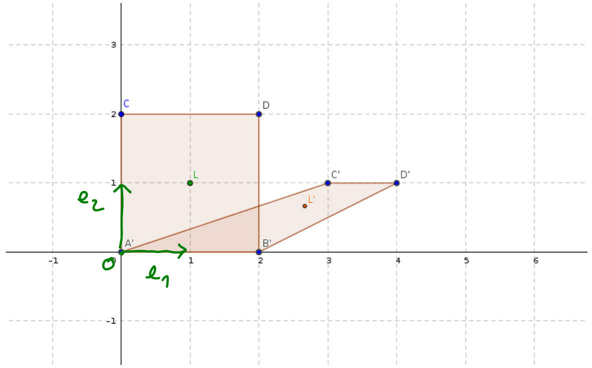
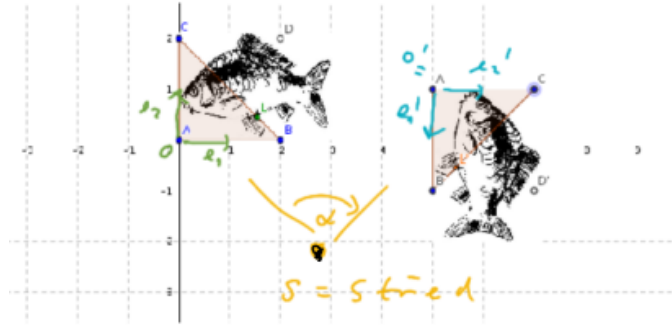
PŘÍKLAD — transformace

PROJ. zobr. v rovině je určeno ...



Afinní zobr. v rovině je určeno ...



OTÁČENÍ ...

čtyřmi body ..

[0,0] ↦ [0,0]
[2,0] ↦ [2,0]
[0,2] ↦ [3,1]
[2,2] ↦ [4,1]

... třemi body

[0,0] ↦ [5,1]
[2,0] ↦ [5,-1]
[0,2] ↦ [7,1]

předpisem ...

Jak by to mohlo vypadat TADY?

$$x_1' = f(x_1, x_2)$$
$$x_2' = g(x_1, x_2)$$

... předpisem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

$e_1' = -e_2$ $\quad$ $e_2' = e_1$ $\quad$ o'

$$x_1' = x_2 + 5$$
$$x_2' = -x_1 + 1$$

JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ! ...

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

... JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ!

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}_{L} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}}_{N} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

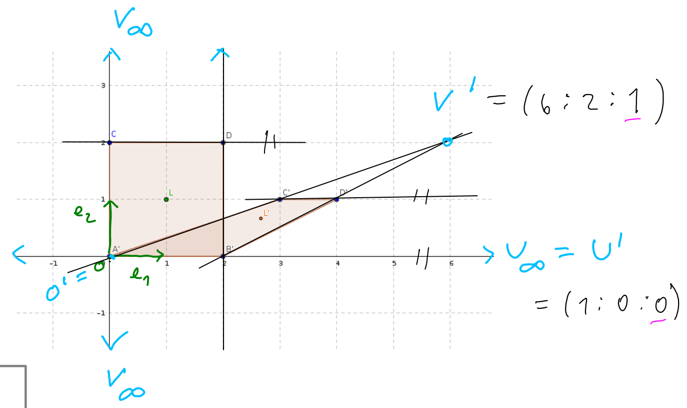
Jak SPRÁVNĚ interpretovat?

SPRÁVNÁ INTERPRETACE MATICE ZOBR.

$$\left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right)\qquad \left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\overset{V_\infty}{\left(\begin{array}{c}0\\1\\\hline 0\end{array}\right)}=\overset{V'}{\left(\begin{array}{c}3\\1\\\hline 0.5\end{array}\right)}\qquad \left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\overset{O}{\left(\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}\right)}=\overset{O'}{\left(\begin{array}{c}0\\0\\\hline 1\end{array}\right)}$$

homog. souř. U_∞
.. NEVL. bod 1. souřadné osy

U' .. obraz U_∞ = 1. ÚBĚŽNÍK



Tedy rozšířená matice $\left(\begin{array}{cccc}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\hline \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right)$

po sloupcích ... homogenní souřadnice

1. ÚBĚŽNÍKU, 2. ÚBĚŽNÍKU, ..., OBRAZU POČÁTKU

PROJ. ZOBR. V AF. SOUŘADNICÍCH

$$\left(\begin{array}{c}x_1'\\x_2'\\\hline x_0'\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc}1&3&0\\0&1&0\\\hline 0&0.5&1\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}x_1\\x_2\\\hline x_0\end{array}\right)\quad\rightsquigarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}x_1' = x_1+3x_2\\ x_2' = x_2\\\hline x_0' = \frac{1}{2}x_2 + x_0\end{array}}\ \xrightarrow[\text{děl. } x_0']{\text{subs. } x_0=1}\ \boxed{\begin{array}{l}x_1' = \dfrac{x_1+3x_2}{\frac{x_2}{2}+1} = \dfrac{2x_1+6x_2}{x_2+2}\\[2ex] x_2' = \dfrac{x_2}{\frac{x_2}{2}+1} = \dfrac{2x_2}{x_2+2}\end{array}}$$

homogenní souř. .. LINEÁRNÍ FCE

afinní souř. ... RAC. LOMENÉ FCE (stupně 1)

POSTŘEHY & POZNÁMKY

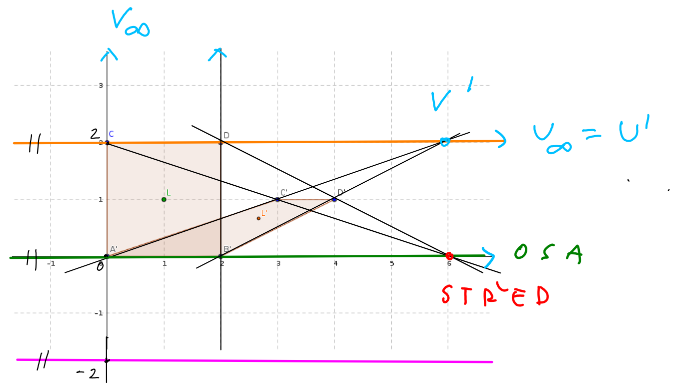
PROJ. zobrazení v AFINNÍ rovině

• def. obor a obor hodnot:

Předchozí vyjádření OK $\iff$ $x_0' = \frac{1}{2}x_2 + 1 \neq 0$ $\iff$ $x_2 \neq -2$

Tedy .. def. obor $= \mathcal{A} \setminus \{x_2 = -2\}$ ← "přeúběžnice"

obor hodnot $= \mathcal{A} \setminus \{x_2 = 2\}$ ← úběžnice

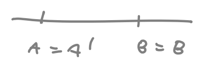


• pevné body

... char. vektory rozšířené matice:

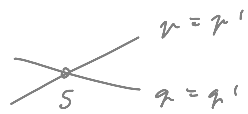
1) char. polynom $= (1-\lambda)^3$ ⇝ kořen $\lambda = 1$

2) řešení pro $\lambda = 1$ ⇝ přímka $\{x_2 = 0\}$,

tj. **OSA** (= přímka pevných bodů 

)

3 Desarguesova věta ⇝ musí mít **STŘED**!

(každá incid. přímka pevná 

)

Umíme najít konstrukčně ⇝ $(6 : 0 : 1)$

... a co početně?

POZNÁMKY K URČENOSTI — 3 body NESTAČÍ!

- pro $O = (0:0:1) \longmapsto (0:0:1) = O'$

  $U = (1:0:0) \longmapsto (1:0:0) = U'$

  $V = (0:1:0) \longmapsto (6:2:1) = V'$

  víme akorát $F = \begin{array}{ccc} U' & V' & O' \\ \multicolumn{3}{c}{\left(\begin{array}{c|c|c} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right)} \end{array}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$!!

- zobrazení určeno JEDNOZNAČNĚ např. s podmínkou

  $D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$

  $$\left(\begin{array}{c|c|c} a & 6b & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ \hline 0 & b & c \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2a+12b \\ 4b \\ 2b+c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4k \\ 1k \\ 1k \end{pmatrix}}$$

  LIN. ROVNICE

  3 rov. / 4 neznámé ✓

  $\rightsquigarrow$ $k = 4b$, $b = \text{lib}$

  $a = 2b$ $\quad$ $c = 2b$

  $\underset{(b=1/2)}{\rightsquigarrow}$ $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

- Jak se to vlastně ZOBECŇOVALO?

  "Kolik bodů potřeba v prostoru dim $\boxed{n}$?"

  ... připomenem / doplníme po ZÁKLADNÍ VĚTĚ ...

MEZISHRNUTÍ

- Pro SHODNÁ → PODOBNÁ → AFINNÍ → **PROJEKTIVNÍ** zobr. prostoru dim $\boxed{n}$

  jsme se zatím vždy vlezli do **MATICE** řádu $\boxed{n+1}$!

- **MATICE** představuje **LINEÁRNÍ** zobr. vekt. prostoru dim $\boxed{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \dots \text{ dim } n+1 \\
P \arrow[r, "f"'] & P & \dots \text{ dim } n
\end{tikzcd}$$

- Přirozená otázka (očekávání):

  FUNGUJE TO TAK **OBECNĚ** ?

- nejprve předp. všechno **BIJEKTIVNÍ** a **dim ≥ 2** . . .

MASÁŽ I.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

- Předp. $F: W \longrightarrow W$ .. LINEÁRNÍ

  $\Longrightarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je zase vekt. podprostorem.

- Zejména:

  a) $\dim U = 1 \rightsquigarrow$ MÁME zobr. $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$,

  b) $\dim U = 2 \rightsquigarrow$ f zobrazuje přímky na přímky,

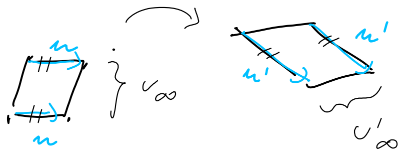
  tj. f = KOLINEACE !

(obecně: $\dim U = \underline{k} \rightsquigarrow f$ zobrazuje proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ na proj. podpr. dim $\underline{k-1}$ ..)

MASÁŽ II.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \tilde{a} \arrow[r, "f"'] & \tilde{a} \end{tikzcd}$$

- Předp. $f : a \to a$ ... AFINNÍ



$\Longrightarrow$ máme indukované LINEÁRNÍ

$$\vec{f} : V \to V, \quad V = \vec{a}$$

... popisuje zobr. ∞ bodů při rozšíření $P = \tilde{a}$.

- Zejména :

a) rozšířené zobr. $\tilde{f} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ ... "$\tilde{f} = f + \vec{f}$"

b) je určeno LINEÁRNÍM zobr.

$$F : W \to W ,$$

... přičemž $F(V) \subseteq V$ a $F|_V = \vec{f}$!

viz úvodní př. ... $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & N \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM $\geqq 2$ platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST

$$\Updownarrow$$

f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : W \longrightarrow W'$

- Směr "$\Uparrow$" ... rozumíme OBECNĚ (viz MASÁŽ I.)
- Směr "$\Downarrow$" ... rozumíme pro AFINNÍ (viz MASÁŽ II.)

  ... doplníme pro obecné KOLINEACE ...

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

- Postřeh: zatím nikde nemluvíme o DVOJPOMĚRECH!

DŮKAZ

- Předp. $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ ... KOLINEACE

  $\Rightarrow$ obraz proj. podpr. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$ je proj. podpr.,
  zejména obraz NADROVINY $\mathcal{n} \subseteq \mathcal{P}$ je NADROVINA $\mathcal{n}' \subseteq \mathcal{P}'$.

- INTERPRETUJME $\mathcal{n}$ a $\mathcal{n}'$ jako nadroviny "∞ bodů":

  $\underbrace{\text{ozn. } \mathcal{a} := \mathcal{P} \setminus \mathcal{n}}$, tj. $\mathcal{P} = \mathcal{a} \cup \mathcal{n} = \tilde{\mathcal{a}}$ atd.

  zúžené zobr. $f : \mathcal{a} \to \mathcal{a}'$ je KOLINEACE.

- $\underbrace{\text{ZÁKL. VĚTA AFINNÍ GEOM.}}$ $\Rightarrow$ $f : \mathcal{a} \to \mathcal{a}'$ je AFINNÍ!

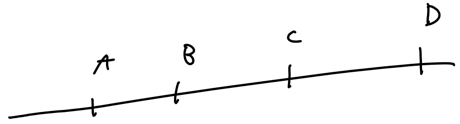
  "ROZŠÍŘENÍ" $\tilde{f} = f$,

  a to je určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$!

  (viz MASÁŽ II.)

JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — vzpomínáme

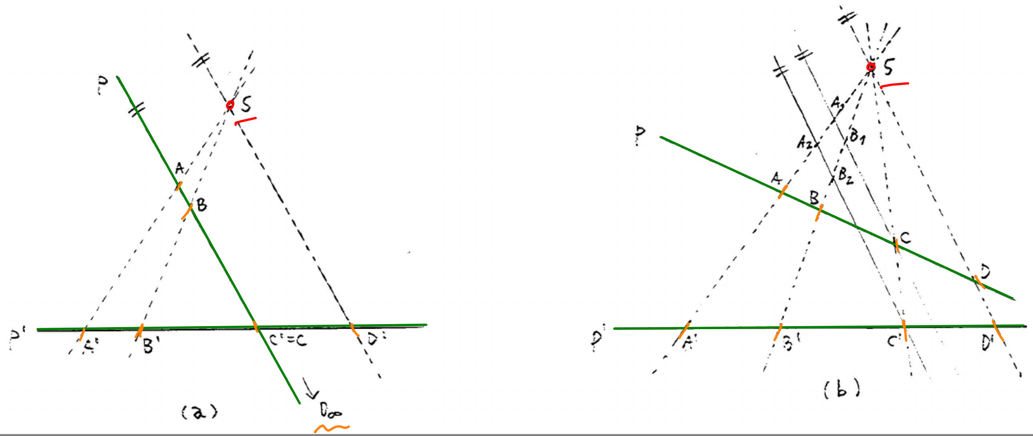
- Definice $$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$



$$\lim_{D\to\infty} \dots = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot 1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

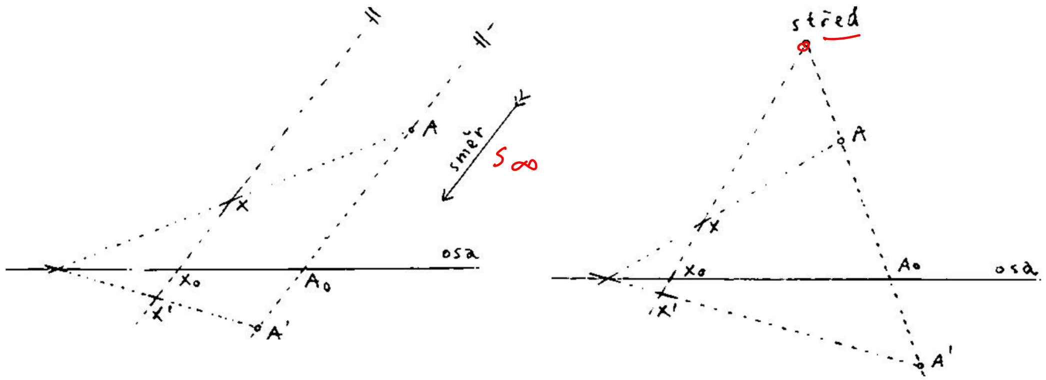
obyč. poměr

- **Věta (Pappova)**
  Při středovém promítání se zachovávají dvojpoměry čtveřic kolineárních bodů.



← obrázky k důkazu

- Pozn. Osová afinita vs. osová kolineace:



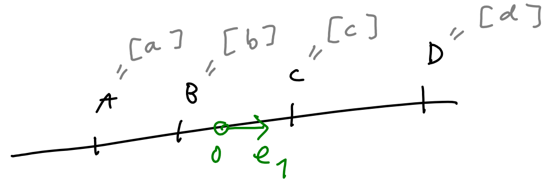
← další zákl. souvislosti

- $X'X \parallel A'A \parallel \dots$ směr, $X'X \cap A'A \cap \dots$ střed,
- $(X'X\,X_o) = (A'A\,A_o) = \dots$ modul, $(X'X\,X_oS) = (A'A\,A_oS) = \dots$ modul.

$\lim_{S\to\infty} \dots$

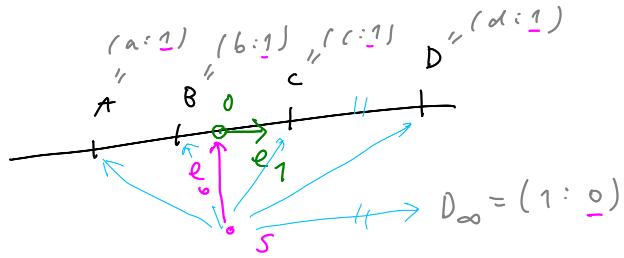
JAK TO JE S DVOJPOMĚRY? — NOVĚ

- v af. souřadnicích



$$(AB\,CD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)\cdot(d-b)}{(c-b)\cdot(d-a)}$$

- postřeh



$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{d-a}{d-b} = \frac{\begin{vmatrix} d & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\lim_{D\to\infty} \cdots\cdots = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$\leftarrow D = (d:1) = (1 : \frac{1}{d}) = \ldots$

$\lim_{d\to\infty} \ldots = (1:0)$ ✓

- v hom. souřadnicích

$$\boxed{(AB\,CD) = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c_0 & a_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & b \\ d_0 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c & b \\ c_0 & b_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & a \\ d_0 & a_0 \end{vmatrix}}}$$

krásně HOMOGENNÍ
(zahrnuje vlastní/nevlastní ...)

a DOBŘE DEF!
(nezávislé na násobcích ukazovacích vektorů!)

JAK TO TEDY JE S TĚMI DVOJPOMĚRY?

... DŮSLEDEK ZÁKL. VĚTY, ZOBECNĚNÍ PAPPOVY VĚTY:

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. prostory DIM ≥ 2 platí:

f zachovává KOLINEÁRNOST ← vlastnost (a)

$\Updownarrow$

f je PROJEKTIVNÍ (tj. navíc zach. DVOJPOMĚRY) ← vlastnost (b)

DŮKAZ (směru "$\Downarrow$")

- ZÁKL. VĚTA PROJ. GEOM. $\Longrightarrow$ f je určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$
- zúžení na lib. přímku je určeno LINEÁRNÍM $\underline{F} : U \to U'$ (dim 1) (dim 2)
- HOMOGENNÍ popis dvojpoměru + CAUCHYHO věta: ← o součinu determinantů

$$(A'B'C'D') = \frac{|(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)| \cdot |(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)|}{|(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)| \cdot |(\underline{F})\cdot(\vdots\,\vdots)|} \overset{!}{=} \frac{\cancel{|\underline{F}|}\cdot|\vdots\,\vdots| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot|\vdots\,\vdots|}{\cancel{|\underline{F}|}\cdot|\vdots\,\vdots| \cdot \cancel{|\underline{F}|}\cdot|\vdots\,\vdots|} = (ABCD)$$