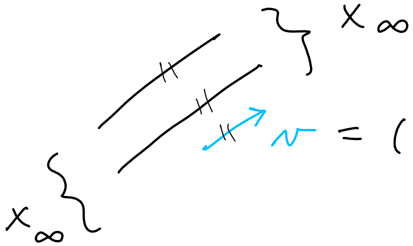
ROZŠÍŘENÍ KONZUMNĚ

- bod vlastní $\cdot$ $X = [x_1, x_2]$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = X$,

  přičemž připouštíme, že vektory X a kX
  „UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

- bod nevlastní

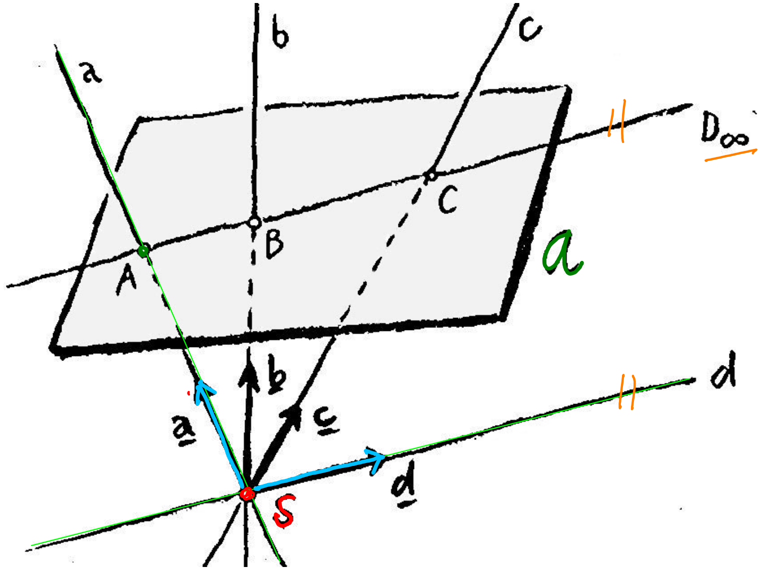


$v = (x_1, x_2)$ $\rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = X$,

  přičemž vektory v a kv, resp. X a kX
  „UKAZUJÍ" na tentýž BOD!

všude $k \in \mathbb{R}$ lib. $\neq 0$

ROZŠÍŘENÍ PORÁDNĚ



- pozorujme ZVENKU

  $\mathcal{a}$ = afinní prostor (dim n)

  $S \notin \mathcal{a}$, $\mathcal{n} = \mathcal{a} + S$ … nadprostor (dim $n+1$)

- přidejme PŘÍMKY

  $A \in \mathcal{a} \xleftrightarrow{1:1} a = A + S$

- přidejme VEKTORY

  $A \in \mathcal{a} \xleftrightarrow{1:1} a = A + S \xleftrightarrow{1:1} \underline{a} = \overrightarrow{SA}$ až na NÁSOBEK!

  (ozn. zaměření $V = \vec{\mathcal{a}}$, $W = \vec{\mathcal{n}}$)

- uvažme LIMITY (= ROZŠÍŘENÍ)

  {body vlastní} $\xleftrightarrow{1:1}$ {přímky proch. S různoběžné s $\mathcal{a}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W nepatřící do V}

  {body nevlastní} $\longleftrightarrow$ {přímky proch. S rovnoběžné s $\mathcal{a}$}

  $\longleftrightarrow$ {směry ve W patřící do V}

ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ

$\mathcal{P}$, resp. proj. rozšíření $\tilde{\mathcal{A}}$ af. prostoru $\mathcal{A}$

W

- Projektivní prostor dim $\boxed{n}$
  $\approx$ směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$

… přičemž nevlastní (= rozšířené) prvky odp. směrům v nadrovině

$V \subset W$

Bod v $\mathcal{P}$ … směr = 1-dim podprostor ve W
Přímka v $\mathcal{P}$ ……… 2-dim podprostor ve W

⋮

- Projektivní podprostor $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ dim $\boxed{k}$
  $\approx$ vektorový podprostor $U \subseteq W$ dim $\boxed{k+1}$

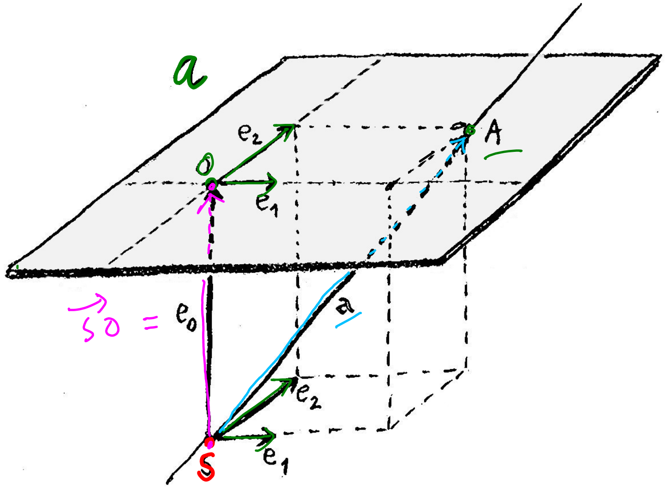
… přičemž af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}$ rovnoběžné

$\rightsquigarrow$ odp. rozšíření $\tilde{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}'$ nevlastní

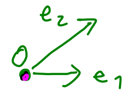
$\rightsquigarrow$ odp. vekt. podpr. $U \cap U'$ v nadrovině $V \subset W$

HOMOGENNÍ SOUŘADNICE

• bod vlastní



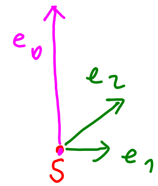
$A \doteq [3, 1]$ = souřadnice vzhledem k



$\vec{SA}$ $\quad 2 \cdot \vec{SA}$ $\quad k \cdot \vec{SA}$

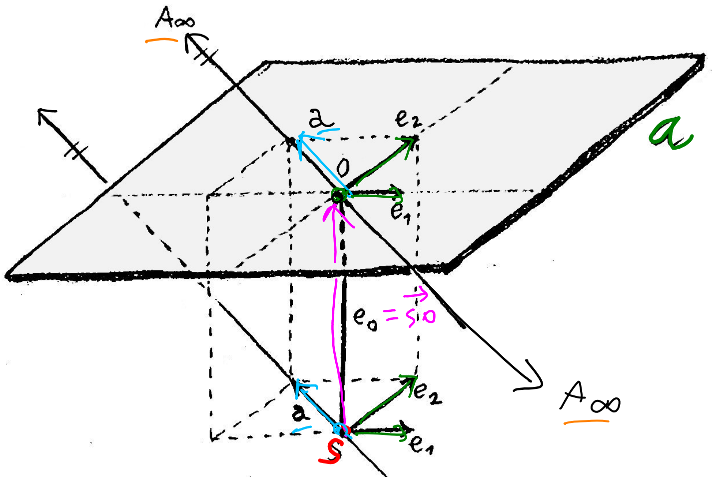
$a \doteq (3, 1, 1) \sim (6, 2, 2) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



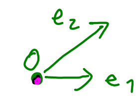
ozn.: $A = (3 : 1 : 1) = (6 : 2 : 2) = \dots$

• bod nevlastní



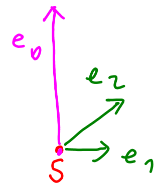
$a \doteq (-2, 1) \sim (6, -3) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



$a \doteq (-2, 1, 0) \sim (6, -3, 0) \sim \dots$

souřadnice vzhledem k



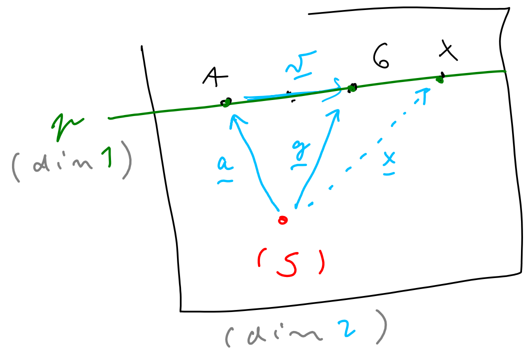
ozn.: $A = (-2 : 1 : 0) = (6 : -3 : 0) = \dots$

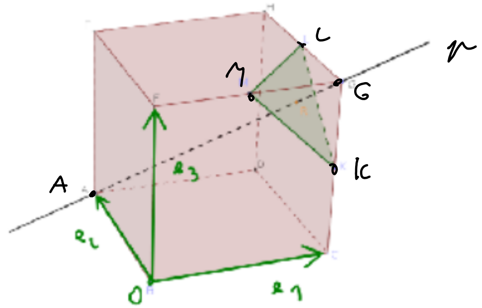
PŘÍKLAD – vyjádření podpr.

$A = [0,1,0]$, $G = [1,0,1]$ $\Big\}\ p$

$\vdots$

$K = [1,0,1/2]$, $L = [1,1/2,1]$, $M = [1/2,0,1]$ $\Big\}\ \alpha$





p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nové)

$A = (0:1:0:\underline{1})$

$G = (1:0:1:\underline{1})$

$V = (1:-1:1:\underline{0})$

(a) parametricky

$$p = \text{"}\{X = rA + sG \mid r, s \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_0 = r + s \end{array} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \{(s : r : s : r+s) \mid \dots\}$$

$r + s = 1$, $s = t$

$\check{r} = 1$, $\check{s} = 1$

$$= \text{"}\{X = \check{r}A + \check{s}V \mid \check{r}, \check{s} \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \{X = (\check{s} : \check{r} - \check{s} : \check{s} : \check{r}) \mid \dots\}$$

$\check{r} = 1$, $\check{s} = 1 - \check{t}$

AF. SOUŘ. (umíme)

$A = [0,1,0]$

$G = [1,0,1]$

$v = \overrightarrow{AG} = (1,-1,1)$

(a) parametricky

$$p = \{X = A + t\overrightarrow{AG} \mid t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = t \end{array} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \{[t, 1-t, t] \mid \dots\}$$

$$= \{X = G + \check{t}\,\overrightarrow{GA} \mid \check{t} \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{[1-\check{t}, \check{t}, 1-\check{t}] \mid \dots\}$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. p = přímka AG

HOMOG. SOUŘ. (nově) | **AF. SOUŘ. (umíme)**

(b) rovnicově

$$p = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_0 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x_0 = 1} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 - x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = 0 \end{array} \right\} = \qquad = \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \dots \qquad\qquad = \dots$$

ekviv. soustavy
počet NEZÁV. rovnic:
$4 - 2 = 2$

(b) rovnicově (af. souř.):

ekviv. soustavy
počet NEZÁV. rovnic:
$3 - 1 = 2$

MOŽNOSTI ŘEŠENÍ (stále stejné)

- z hlavy (... pokud to je možné)
- systematická eliminace

$$\left(\begin{array}{ll} x_1 = & s \\ x_2 = r & \\ x_3 = & s \\ x_0 = r + s & \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{lll} x_1 = & 0 & s \\ x_2 = & r & 0 \\ x_1 - x_3 = & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 - x_0 = & 0 & 0 \end{array} \right) \checkmark$$

- (sub)determinanty

$$\left(\begin{array}{lll} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_0 & 1 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \checkmark$$

PŘÍKLAD – vyjádření podpr. α = rovina KLM

HOMOG. SOUŘ. (nově)

$K = (2:0:1:2) = (1:0:1/2:1)$

$L = (2:1:2:2)$

$M = (1:0:2:2)$

$u = (0:1:1:0)$

$v = (-1:0:1:0)$

(a) parametricky

$$\alpha = \text{"}\{X = kK + lL + mM \mid k, l, m \in \mathbb{R}\}\text{"}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2k + 2l + m \\ x_2 = l \\ x_3 = k + 2l + 2m \\ x_0 = 2k + 2l + 2m \end{array} \middle| \ \dots \right\}$$

$k + l + m = 1/2$

$l = 1/2\, r,\ m = 1/2\, s$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0\}$$

$x_0 = 1$

počet NEZÁV. rovnic:

$4 - 3 = 1$

AF. SOUŘ. (umíme)

$K = [1, 0, 1/2]$

$L = [1, 1/2, 1]$

$M = [1/2, 0, 1]$

$u = \overrightarrow{KL} = (0, 1/2, 1/2)$

$v = \overrightarrow{KM} = (-1/2, 0, 1/2)$

(a) parametricky

$$\alpha = \{X = K + r\overrightarrow{KL} + s\overrightarrow{KM} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - 1/2\, s \\ x_2 = 0 + 1/2\, r \\ x_3 = 1/2 + 1/2\, r + 1/2\, s \end{array} \middle| \ \dots \right\}$$

(b) rovnicově

$$\alpha = \{x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2}\}$$

počet NEZÁV. rovnic:

$3 - 2 = 1$

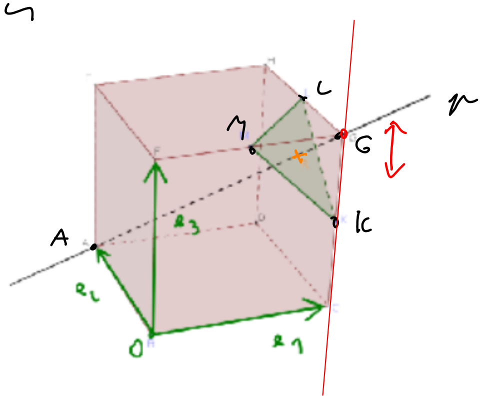
PŘÍKLAD – vzájemná poloha podprostorů

… v závislosti na hodnotě $k \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A = [0, 1, 0] \\ G = [1, 0, k] \end{array}\right\} p$$

⋮

$$\left.\begin{array}{l} K = [1, 0, 1/2] \\ L = [1, 1/2, 1] \\ M = [1/2, 0, 1] \end{array}\right\} \alpha$$



HOMOG. SOUŘ. (nově)

$$p = \{ (s : r : ks : r+s) \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_0 = 0 \}$$

$$p \cap \alpha : \quad 2s - 2r + 2ks - 3(r+s) = 0$$

$$-5r + (2k-1)s = 0$$

$$(2k-1)s = 5r$$

$p \cap \alpha$ = BOD

… jmenovitě

$$p \cap \alpha = (5 : 2k-1 : 5k : 2k+4)$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ NEVLASTNÍ

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ VLASTNÍ

AF. SOUŘ. (umíme)

$$p = \{ [t, 1-t, kt] \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\alpha = \{ x_1 - x_2 + x_3 = \tfrac{3}{2} \}$$

$$p \cap \alpha : \quad t - (1-t) + kt = 3/2$$

$$(2+k)t = 5/2$$

(a) $k = -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha = \emptyset \rightsquigarrow p \parallel \alpha$

(b) $k \neq -2 \rightsquigarrow p \cap \alpha$ = BOD $\rightsquigarrow p \times \alpha$

… jmenovitě

$$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{4+2k}, \frac{2k-1}{4+2k}, \frac{5k}{4+2k} \right]$$

… spec. pro $k = 1$:

$$p \cap \alpha = \left[\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right]$$

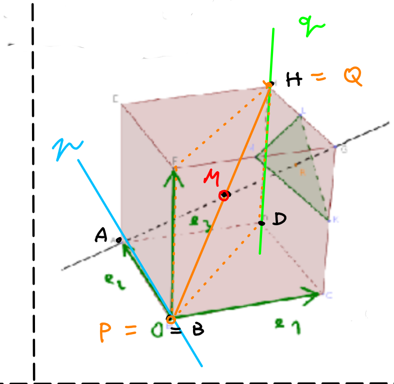
viz obr. ✓

PŘÍKLAD – příčky

$$A = (0:1:0:1),\quad B = (0:0:0:1) \;\Big\}\; p = \{(0:a:0:a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$D = (1:1:0:1),\quad H = (1:1:1:1) \;\Big\}\; q = \{(d+h:d+h:h:d+h) \mid d,h \in \mathbb{R}\}$$

$$M = (1:1:1:2) = (m:m:m:2m)$$



$$p = [0,1,0],\quad B = [0,0,0] \;\Big\}\; p$$

$$D = [1,1,0],\quad H = [1,1,1] \;\Big\}\; q$$

$$M = [\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$$

PŘÍMO PODLE (b)

$$\alpha = A+B+M = \{(m : a+m : m : a+b+2m) \mid a,b,m \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\; x_1 - x_3 = 0 \;\}$$

parametricky

$$\beta = D+H+M = \{(d+h+m : d+h+m : h+m : d+h+2m) \mid \dots\}$$
$$= \{\; x_1 - x_2 = 0 \;\}$$

rovnicově

$$P = p \cap \beta$$

1 rov./2 neznámé

• pomocí rovnice ... $\boxed{0 - a = 0}$ $\sim$ $a = 0,\ b = \text{lib}$

$\rightsquigarrow P = (0:0:0:*) = B$ ✓

• pomocí param.:

4 rov./5 neznám.

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= d+h+m \\ a &= d+h+m \\ 0 &= h+m \\ a+b &= d+h+2m \end{aligned}} \sim \dots \sim \begin{aligned} a &= 0 \\ d &= 0 \\ h &= -m \\ b &= m \\ m &= \text{lib.} \end{aligned} \rightsquigarrow P = B \checkmark$$

Q obdobně .... $d = 0,\ h = \text{lib.}$ $\rightsquigarrow Q = H$ ✓

NÁPADY

(a) KONCOVÉ BODY:

$P \in p,\ Q \in q$ obecné

tak, aby $\boxed{\vec{MP} = k \cdot \vec{MQ}}$ ...

$\rightsquigarrow$ příčka = PQ

(b) PRŮNIK NADPROSTORŮ

$$\begin{aligned} \alpha &= p + M \\ \beta &= q + M \end{aligned} \Big\}$$ příčka $= \alpha \cap \beta$

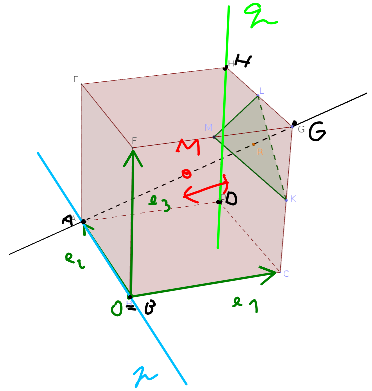
resp. koncové body:

$$P = p \cap \beta,\quad Q = q \cap \alpha$$

PŘÍKLAD – příčky

dtto s proměnným bodem $M \in$ přímce AG …

… "SPEC." PŘÍPADY :



$M = G = (1 : 0 : 1 : \underline{1})$

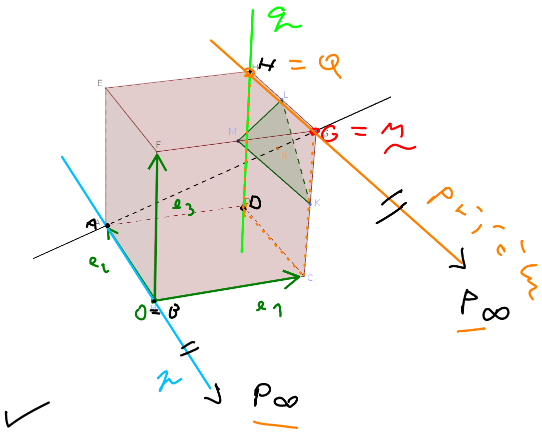
$\beta = q + M = \{(d+h+m : d+h : h+m : \underline{d+h+m})\}$

$= \{x_1 - x_0 = 0\}$

$p = r \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0 - (a+b) = 0} \rightsquigarrow \underline{a = -b = 1 ; b}$

$\rightsquigarrow p = (0 : 1 : 0 : \underline{0})$

… nevlastní ✓



$M = (1 : -1 : 1 : \underline{0})$ … nevlastní $(\overrightarrow{AG})$

$\beta = q + M = \{(d+h+m : d+h-m : h+m : \underline{d+h})\}$

$= \{x_1 + x_2 - 2x_0 = 0\}$

$p = r \cap \beta \rightsquigarrow \boxed{0 + a - 2(a+b) = 0} \rightsquigarrow \underline{a = 2b = 1 ; b}$

$\rightsquigarrow p = (0 : 2 : 0 : \underline{1})$ ✓