JAK TO JE S DIM 1?

Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ mezi proj. PŘÍMKAMI (dim 1) platí:

f je PROJEKTIVNÍ $\iff$ f zach. DVOJPOMĚRY

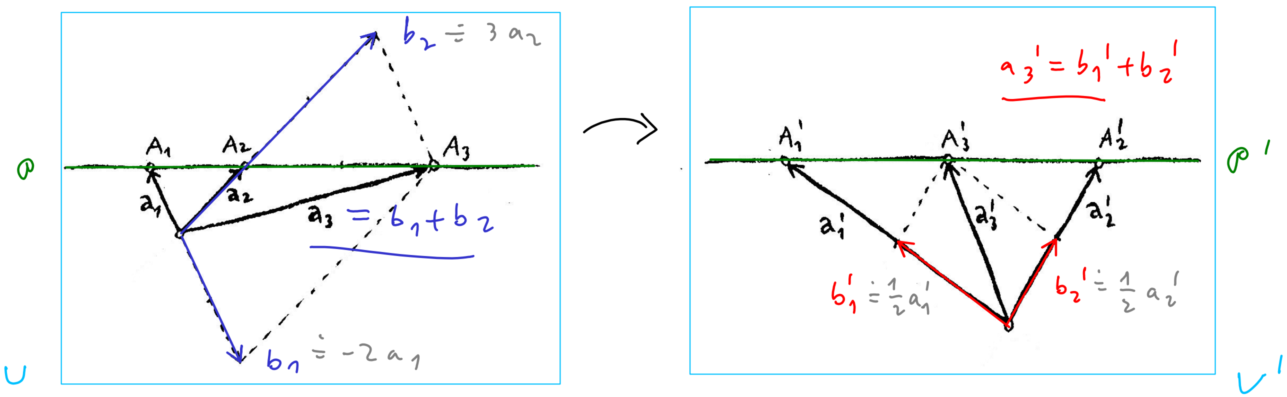
$\iff$ f je určeno LINEÁRNÍM IZO. $F : U \to U'$ (dim 2)

- První "$\iff$" zřejmá (dim 1)
- Druhá "$\Leftarrow$" taky (viz důkaz předch. věty)
- Druhá "$\Rightarrow$":

f určeno TŘEMI navzájem různými body v $\mathcal{P}$, tj. TŘEMI vektory v U,

dim $U = 2$ $\rightsquigarrow$ stačí DVA NEZÁVISLÉ vektory ...

... tak, aby to sedělo na TŘETÍM!



$F : U \to U'$ určeno obrazy

$$\boxed{\begin{aligned} F(b_1) &= b_1' \\ F(b_2) &= b_2' \end{aligned}}$$

$$F(a_3) = F(b_1 + b_2) = \\ = b_1' + b_2' = a_3' \checkmark$$

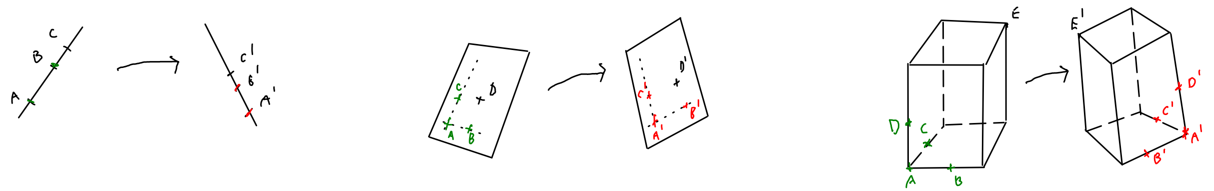
JAK TO JE S URČENOSTÍ?

- vzpomínáme

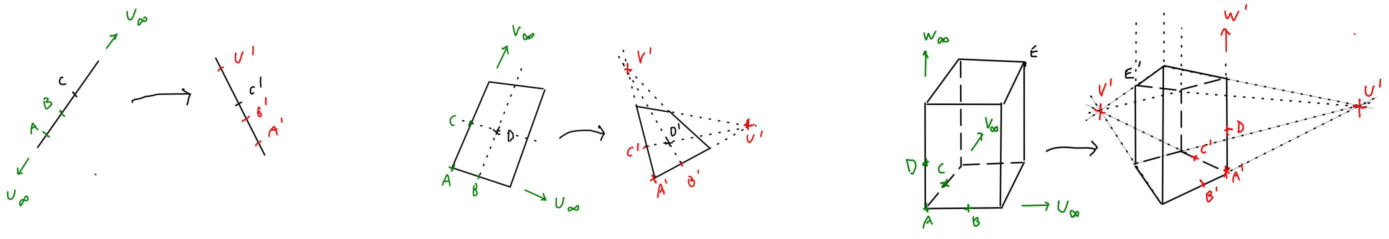
> PROSTÉ zobrazení z prostoru dim n ...
> a) AFINNÍ je určeno obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze,
> b) PROJEKTIVNÍ ..... + navíc n odp. ÚBĚŽNÍKY.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$

a)



b)

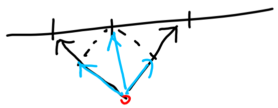


- S algebrou snadno rozumíme, že

> PROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobrazení z prostoru dim n
> je určeno obrazy $n+2$ bodů ...
> ... v "dostatečně obecné" poloze!

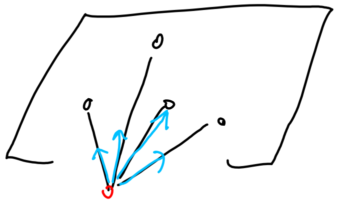
JAK TO JE "DOST. OBECNOU" POLOHOU?

- $m = 1$



3 navzájem různé body

- $m = 2$



4 body, z nichž žádné 3 nejsou na přímce

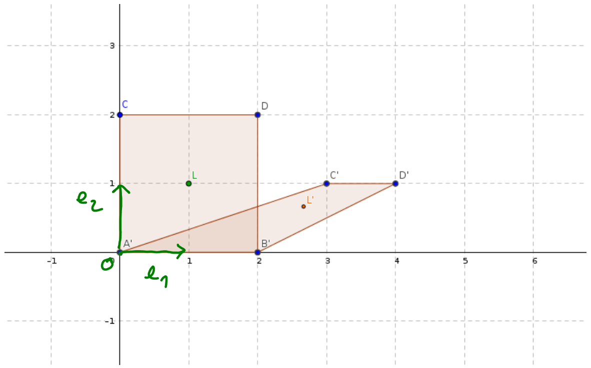
- m obecně ... $m+2$ bodů, z nichž žádných $m+1$ neleží v NADROVINĚ, resp. odp. vektory lze vybrat tak, že $m+1$ tvoří BÁZI a zbylý je jejich SOUČTEM.

JAK TO JE S DŮKAZEM?

... ZÁKL. VĚTA + zobecnění diskuze pro $m = 1$:

- PROSTÉ PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ určeno LINEÁRNÍM $F : W \to W'$,
- LINEÁRNÍ $F : W \to W'$ určeno obrazem BÁZE,
- PROSTÉ $\Rightarrow$ {body v "dost. obecné" poloze} $\longmapsto$ {body v "dost. obecné" poloze},
- stačí vybrat tak, aby "SOUČET" $\longmapsto$ "SOUČET".

PŘÍKLAD — starý známý … $n = 2$:



$$A = (0:0:1) \overset{!}{\longmapsto} (0:0:1) = A'$$
$$B = (2:0:1) \longmapsto (2:0:1) = B'$$
$$C = (0:2:1) \longmapsto (3:1:1) = C'$$
$$D = (2:2:1) \longmapsto (4:1:1) = D'$$

$\}$ $n+2$ bodů …

$$F = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad ? \quad \leftarrow \ (n+1)\cdot(n+1) \text{ neznámých}$$

$A \mapsto A'$ … $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

$\leftarrow$ $k, l, m, n \in \mathbb{R}$ … dalších $n+2$

$B \mapsto B'$ … $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+g \\ 2b+h \\ 2c+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$

$C \mapsto C'$ … $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d+g \\ 2e+h \\ 2f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m \\ m \\ m \end{pmatrix}$

$D \mapsto D'$ … $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n \\ n \\ n \end{pmatrix}$

soustava lin. rovnic :

$\boxed{12}$ rovnic

$\boxed{13}$ neznámých

$13 - 12 = \underline{\underline{1}}$ volný param. ✓

OBECNĚ :

$(n+1)\cdot(n+2) = n^2 + 3n + 2$ rovnic

$(n+1)\cdot(n+1) + (n+2) = n^2 + 3n + 3$ neznámých

$\}$ rozdíl $= \underline{\underline{1}}$ ✓

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — OPAKOVÁNÍ

• **OBECNĚ**

ALGEBRA

* CHAR. VEKTORY LINEÁRNÍ transf.

$\Updownarrow$

* PEVNÉ BODY PROJEKTIVNÍ transf.

GEOMETRIE

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \cdots \ \dim\ n+1 \\ \mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P} & \cdots \ \dim\ n \end{tikzcd}$$

• **ALGEBRA**

* char. vektory odp. různým číslům jsou lin. NEZÁVISLÉ (a)

* char. vektory odp. číslu λ tvoří VEKT. PODPROSTOR, (b)
  jehož dimenze $\leq$ násobnost kořene λ

* $n+1$ = LICHÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN reálný kořen (c)
  (komplexní po dvojicích)

* DETERMINANT / STOPA matice F =
  = součin / součet všech char. čísel vč. násobností (d)
  (obecně komplexních)

* apod.

JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **PROJEKTIVNÍ** $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

  * pevné body odp. RŮZNÝM char. číslům jsou RŮZNÉ (viz a)

  * pevné body odp. TÉMUŽ char. číslu tvoří proj. PODPROSTOR (viz b)

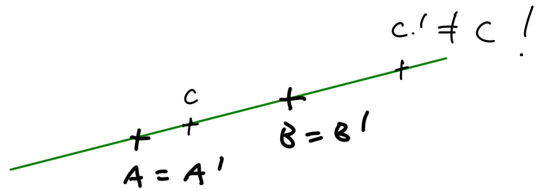
  * n = SUDÉ $\Rightarrow$ ASPOŇ JEDEN pevný bod ! (viz c)

  * izolovaných pevných bodů není víc než $n+1$! (viz a)

  * apod.

- **POZN.**

  * pro obecné PROJEKTIVNÍ vskutku může být



JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

- **AFINNÍ**

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \text{(NE)VLASTNÍ body} \to \text{(NE)VLASTNÍ body}$$

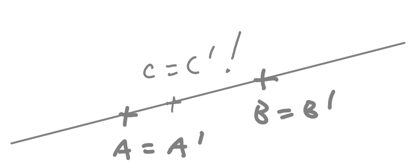
* VŽDY ASPOŇ JEDEN pevný bod!

... char. polynom $= \det\begin{pmatrix} *-\lambda & * & * \\ * & *-\lambda & * \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} *-\lambda & * \\ * & *-\lambda \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\lambda = 1$ je $\mathbb{R}$-kořen

* VLASTNÍ pevné body tvoří af. PODPROSTOR!

... plyne z geom. vlastností: kolin., poměry ..



... plyne z alg. počítání:

$$\begin{array}{ccc} k & & L \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff (k)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (L) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

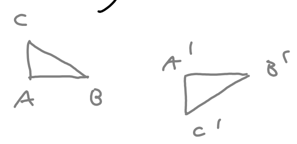
$$\iff \boxed{(k - E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)} \longleftarrow \text{soustava (nehom.) lin. rovnic}$$

* apod.

- **POZN.**

* VÍCE IZOLOVANÝCH pevných bodů $\implies$ všechny NEVLASTNÍ

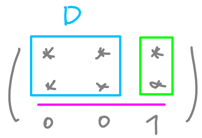
... viz např. posunutou souměrnost



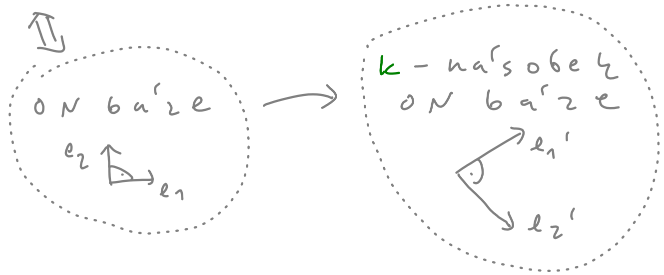
JAK TO JE S PEVNÝMI BODY? — GEOMETRIE

• **PODOBNÉ**

resp. SHODNÉ ← $k = 1$



$D^T \cdot D = k^2 E$, k = koef. podobnosti

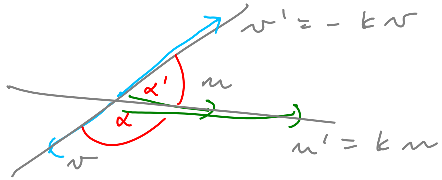


* $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm k$

... $\|u'\| = k\,\|u\|$ pro lib. $u \in V$

* směry odp. RŮZNÝM NEVLASTNÍM bodům jsou KOLMÉ

... různé $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = +k$, $\lambda_2 = -k$ ...



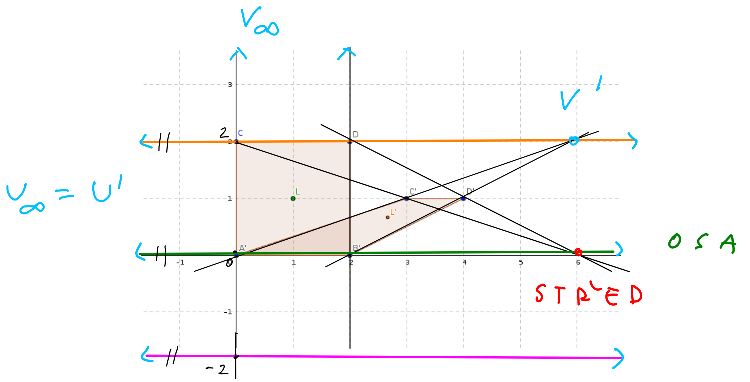
* ... NESHODNÉ $\Longrightarrow$ PRÁVĚ JEDEN VLASTNÍ pevný bod !

... neshodné $\Longrightarrow$ $\lambda \neq 1$ $\Longrightarrow$ $\det(k - E) \neq 0$

$\Longrightarrow$ soust. $(k-E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -(L)$ právě jedno řešení.

* apod.

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

násobnost 3

* char. polynom $\det(F - \lambda E) = (1-\lambda)^3$ ⇝ kořen $\lambda = 1$
* řešení pro $\lambda = 1$:

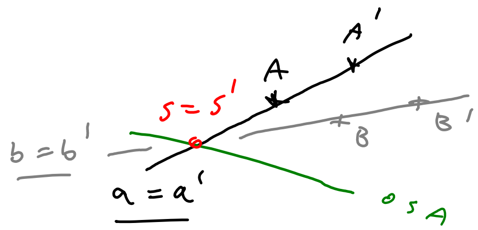
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{1/2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ⇝ přímka $\{x_2 = 0\}$ = OSA

dim: $2 \neq 3$!

JAK TO JE S TÍM STŘEDEM ?

JE TAM . . .

. . . a umíme to ZDŮVODNIT :



- lib. bod A mimo osu ⇝ $A' \neq A$

  ⇝ S ... průnik přímky $a = AA'$ s osou

  ⇝ $S' = S$ ⇝ obraz $a' = a$ ⇝ S = STŘED ?

- lib. jiný bod B mimo osu ⇝ tentýž STŘED S !

  (jinak průnik $a \cap b$ pevný bod mimo osu ... SPOR)

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY ? — PŘÍKLAD

JE TAM . . .

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + x_0 \end{pmatrix}}_{X'}$$

. . . a umíme to taky SPOČÍTAT:

- S = STŘED $\iff$ pro lib. X . . . S, X, X' KOLINEÁRNÍ

$\iff$ . . . hodnost $\begin{pmatrix} S & X & X' \end{pmatrix} = 2$

$\iff$ . . . $\det \begin{pmatrix} S & X & X' \end{pmatrix} = 0$

- $$\det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & x_1+3x_2 \\ s_2 & x_2 & x_2 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2+x_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s_1 & x_1 & 3x_2 \\ s_2 & x_2 & 0 \\ s_0 & x_0 & \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}s_1 x_2^2 + 3s_2 x_2 x_0 - 3s_0 x_2^2 - \frac{1}{2}s_2 x_1 x_2$$

(−1)

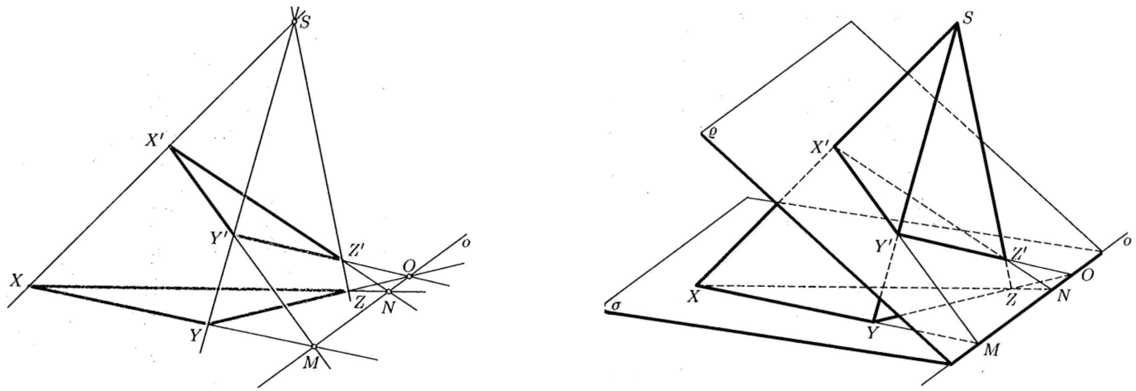
$$= \left(\frac{1}{2}s_1 - 3s_0\right)x_2^2 + 3s_2 x_2 x_0 - \frac{1}{2}s_2 x_1 x_2$$

Tedy det . . . $= 0$ pro lib. X $\iff$ $\boxed{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}s_1 - 3s_0 &= 0 \\ 3s_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}s_2 &= 0 \end{aligned}}$ ← soustava (hom.) lin. rovnic !

$\iff$ $S = (6 : 0 : 1)$ ← souhlasí s obr. ✓

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ? – VZPOMÍNÁME DIM 2

- Věta
  Pro libovolné dva trojúhelníky XYZ a $X'Y'Z'$ v projektivní rovině platí: přímky XX', YY', ZZ' prochází jedním bodem $\iff$ průsečíky přímek XY a $X'Y'$, YZ a $Y'Z'$, XZ a $X'Z'$ leží na jedné přímce.



Desarguesova věta a její trojrozměrná interpretace.

- Důsl.

  neidentická bijektivní

  proj. transf. v rovině má osu $\iff$ má střed

  přímka (= nadrovina) pevných bodů

  pevný bod: $\forall$ incid. přímka je pevná

JAK TO JE OSAMI / STŘEDY OBECNĚ ? — NOVÉ

… ZOBECNĚNÍ DESARGUESOVY VĚTY:

> Pro neid. bijektivní PROJEKTIVNÍ $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ mezi proj. prostory DIM $n \geq 2$ platí:
>
> (1) f má (NAD)OSU $\Longleftrightarrow$ f má STŘED.
>
> (2) (NAD)OSA, resp. STŘED je buď právě jedna, nebo žádná.

NÁZNAK DŮKAZU:

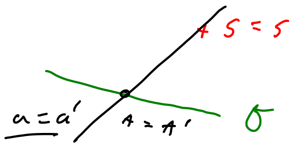
(1) směr "$\Longrightarrow$"   dim $n-1$ dim n

* σ = NADOSA … vekt. nadrovina

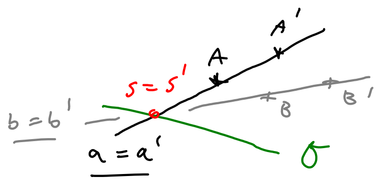
… char. číslo násobnosti aspoň n … ozn. λ

$\rightsquigarrow$ ex. další $\mathbb{R}$-kořen … ozn. μ

* $\mu \neq \lambda$ $\rightsquigarrow$ STŘED $\notin$ NADOSE



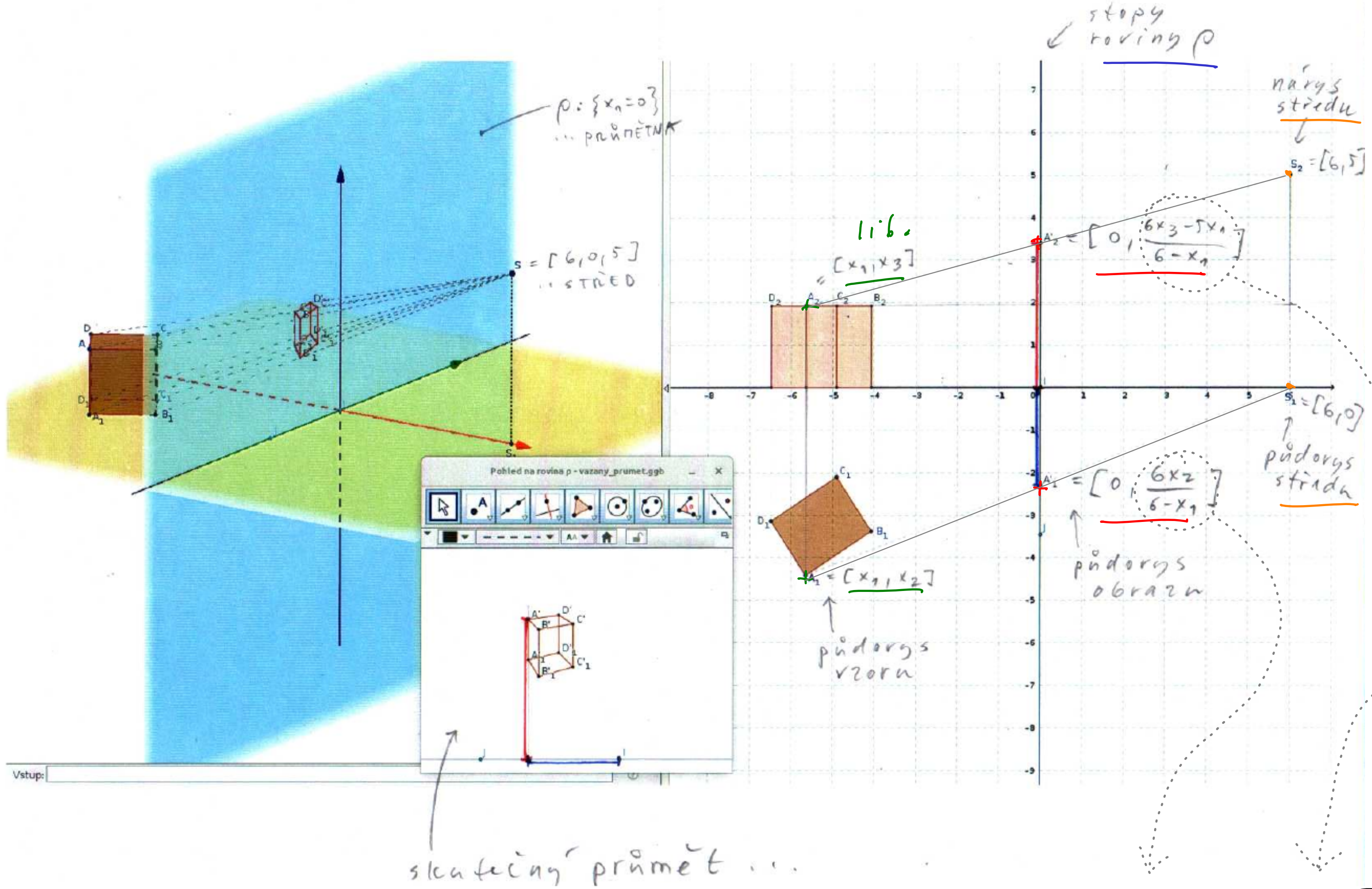
* $\mu = \lambda$ $\rightsquigarrow$ STŘED $\in$ NADOSE



směr "$\Longleftarrow$" … víc práce …

(2) Předp. víc nados, resp. středů $\rightsquigarrow$ SPOR …

JAK TO JE S NEPROSTÝMI 2D8 R. ? — PŘÍKLAD



STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

ze středu $S = [6,0,5]$

do roviny $\rho = \{x_1 = 0\}$

← KONSTRUKCE vs. POČÍTÁNÍ ↓

- afinní souř. ... $[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6-x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6-x_1}\right]$ $(x_1 \neq 6)$
- homogenní souř. ... $(x_1 : x_2 : x_3 : x_0) \longmapsto (0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1 : 6x_0 - x_1)$
- matice ..... $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — PŘÍKLAD

- f = NEPROSTÉ $\leftrightsquigarrow$ hodnost F není MAX $\leftrightsquigarrow$ $\det F = 0$

  $\leftrightsquigarrow$ F má NETRIV. JÁDRO $= \{ v : F(v) = 0 \}$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{array}{l} x_1 = 6x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5x_0 \\ x_0 = 1:6 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ tj. bod $(6:0:5:\underline{1}) = S$

- Tedy DEF. OBOR $f = \mathcal{P} \setminus \{S\}$! $\leftarrow$ STŘED promítání ✓

  resp. v af. prostoru ... $a \setminus \{x_1 = 6\}$ $\leftarrow$ "přeúběžnice"
  (rovina $\parallel \rho$ proch. S) ✓

- Pozn... f = PROJEKCE $\leftrightsquigarrow$ $f \circ f = f$ $\leftrightsquigarrow$ $F \cdot F = kF$, $k \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \dots = 6 \cdot \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \checkmark$$

JAK TO JE S NEPROSTÝMI ZOBR.? — OBECNĚ

- NEPROSTÉ PROJEKTIVNÍ zobr. $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}'$ NENÍ def. na celém $\mathcal{P}$!

  ... třeba vyloučit proj. podpr. odp. jádru $\ker F \subseteq W$ ...

  ... pro AFINNÍ sestává výhradně z NEVL. bodů

- korespondenci ...

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{P}
\end{tikzcd}
$$

  ... NEROZUMÍME uspokojivě v obou směrech

  ... problémy s URČENOSTÍ !

- S "ne příliš degenerovanými" zobrazeními

  ... se vždy nějak domluvíme !

  ... zejména v AFINNÍM případě