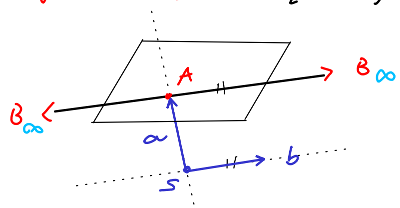
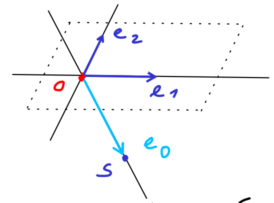
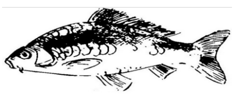
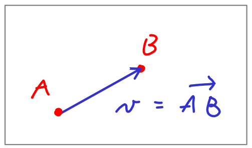
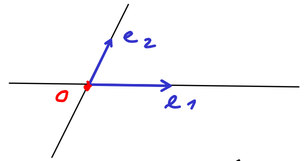
ÚVODNÍ PŘEHLED

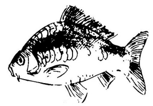
DOPLNÍME

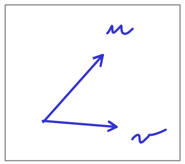
<table>
<tr><th>ZOBRAZENÍ</th><th>ÚLOHY</th><th>PROSTORY</th><th>ALG. VYMEZENÍ</th><th>POČÍTÁNÍ</th></tr>
<tr>
<td>
projektivní</td>
<td rowspan="2">polohové</td>
<td>projektivní</td>
<td>$P = A \cup \{\infty\}$


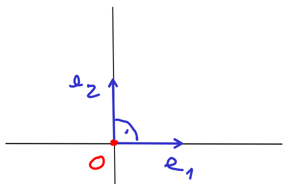
pomocí $W \supset V$</td>
<td>homogenní souř.


= rozšířené</td>
</tr>
<tr>
<td>
afinní</td>
<td>afinní</td>
<td>$A \times A \to V$


body ...... vektor</td>
<td>afinní souř.


= libovolné</td>
</tr>
<tr>
<td>
ekvi-afinní

podobná

shodná</td>
<td>metrické</td>
<td>eukleidovské</td>
<td>$E = A$ + skalární součin


...... $u \cdot v$
vektory ...... číslo</td>
<td>kartézské souř.


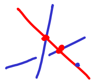
= orto-normální</td>
</tr>
</table>

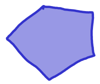
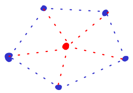
UMÍME

AFINNÍ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod, přímka, rovina
- rovnoběžnost, poměry
- příčky  a příčkové plochy 
- uspořádání 

, úsečky, konvexní množiny 
- těžiště 

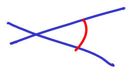
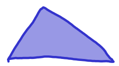
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecná af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, příčky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. a pod.

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

UMÍME

TYPICKÉ EUKL. POJMY . . .

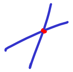
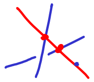
- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
- vzdálenost } ob. podprostorů
- odchylka } ob. podprostorů
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

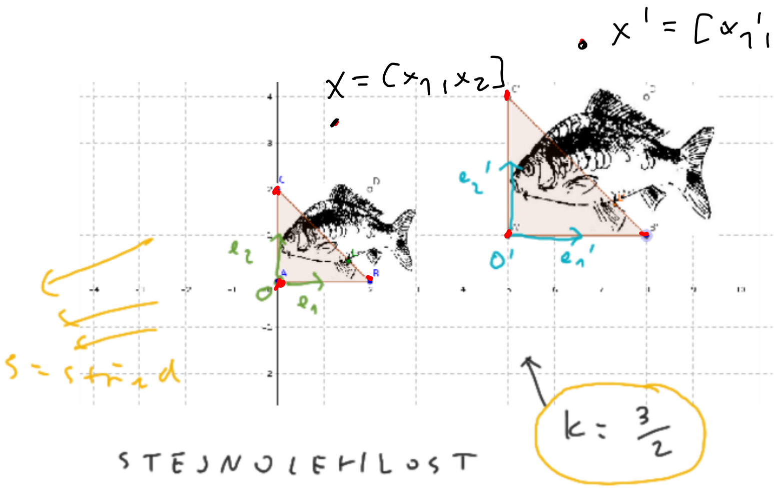
TYPICKÉ PROJ. POJMY ...

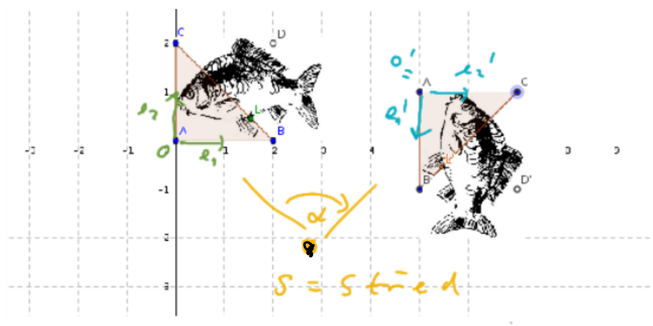
- bod, přímka, rovina  UMÍME
- incidence , dvojpoměry
- příčky  a příčkové plochy 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- **projektivní rozšíření**, homogenní souřadnice DOPLNÍME
- proj. pod-prostory a vzájemné polohy
- proj. zobrazení, **ZÁKLADNÍ VĚTA**, zákl. transformace

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — opakování





Afinní zobr. v rovině je určeno ...

STEJNOLEHLOST

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [8,1]$
$[0,2] \mapsto [5,4]$

OTÁČENÍ ...

$[0,0] \mapsto [5,1]$
$[2,0] \mapsto [5,-1]$
$[0,2] \mapsto [7,1]$

... třemi body

g:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}_{K} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{M}$$

$e_1' = k e_1$, $e_2' = k e_2$, O'

h:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

$e_1' = -e_2$, $e_2' = e_1$, O'

... předpisem

S = STŘED $\Rightarrow$ $S' \doteq S$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ SOUSTAVA LIN. ROVNIC

... význačnými prvky

$$x_1' = 3/2\, x_1 + 5$$
$$x_2' = 3/2\, x_2 + 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad !$$

obraz   vzor

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad !$$

... JEDNOU (rozšířenou) MATICÍ!

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU?

- SKLÁDÁNÍ ZOBRAZENÍ $\leftrightsquigarrow$ NÁSOBENÍ MATIC

$$f = h \circ g \qquad \leftrightsquigarrow \qquad F = H \cdot G$$

$$L: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}_{K} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{M} \right] \overset{h}{\longmapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}_{K} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{M} \right] + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}}_{L \cdot K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}} \quad L \cdot M + N$$

$$P: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{g}{\longmapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{h}{\longmapsto} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 6 \\ -3/2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{H \cdot G} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$L \cdot K$ $L \cdot M + N$

PLATÍ OBECNĚ ✓

MOTIVAČNÍ PŘÍKLAD — K ČEMU?

- PEVNÉ BODY $\longleftrightarrow$ CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY

$$g(x) = x \quad \longleftrightarrow \quad G \cdot X = \lambda X \qquad \leftarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

STEJNOLEHLOST:

$$L: g(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$\leftarrow$ soustava LINEÁRNÍCH rovnic (nehomog.)

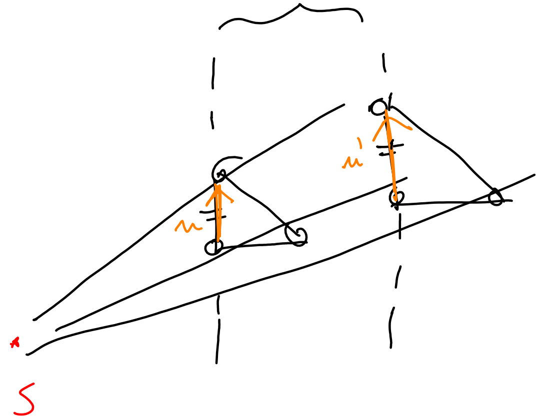
$$\sim \begin{matrix} 3/2\, x_1 + 5 = x_1 \\ 3/2\, x_2 + 1 = x_2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1/2\, x_1 = -5 \\ 1/2\, x_2 = -1 \end{matrix} \sim \boxed{\begin{matrix} x_1 = -10 \\ x_2 = -2 \end{matrix}} \rightsquigarrow \text{pevný bod } \underline{\text{VLASTNÍ}}!$$

$$\underline{\underline{S = [-10, -2]}}$$

(= střed stejnol.) ✓

JAK NEVLASTNÍ?

$$\underbrace{v_\infty = v'_\infty}_{} \iff u' = \lambda u \iff u = \text{char. vektor matice } \boxed{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}}$$



... všechny vektory odp. char. čísla $\lambda = 3/2$

(= koef. stejnol.) ✓

... tj. $\boxed{\text{všechny NEVLASTNÍ}}$ body jsou pevné

(... "osa v nekonečnu") ✓

Pi: char. vektory ROZŠÍŘENÉ matice $\left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 0 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

⇝ uvidíme všechno NAJEDNOU!

① char. polynom ... $\det \begin{pmatrix} 3/2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3/2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2 \cdot (1-\lambda)$ ⇝ kořeny $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{3}{2}$

② Dosazujeme char. čísla

- $\lambda = 1$ ... $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 5 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~ $\begin{aligned} 1/2\, x_1 + 5x_0 &= 0 \\ 1/2\, x_2 + x_0 &= 0 \end{aligned}$ ⇝ $\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \text{lib} \\ x_1 &= -10x_0 \\ x_2 &= -2x_0 \end{aligned}}$ (dim 1)

- $\lambda = \frac{3}{2}$ ... $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇝ $\boxed{\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \text{lib} \\ x_2 &= \text{lib} \end{aligned}}$ (dim 2)

③ INTERPRETUJEME!

- řešení pro $\lambda = 1$ odp. VLASTNÍMU pevnému bodu (dim 0) (střed) ✓

  $S = [-10, -2]$ .... $x_0 = 1$

- řešení pro $\lambda = 3/2$ odp. přímce NEVLASTNÍCH pevných bodů (dim 1) (osa) ✓

  ... $x_0 = 0$

ANALOGICKY ...

... pro OTÁČENÍ s rozšířenou maticí $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ...

$\rightsquigarrow$ vyjdou char. čísla $\lambda = 1$ a $\lambda = \pm i$

$\rightsquigarrow$ jeden **VLASTNÍ** pevný bod $S = [3, -2]$ (= STŘED otáčení) ✓
a žádná další REÁLNÁ řešení ...

(... ovšem argument $\lambda = \pm i$
odpovídá ÚHLU otáčení) ✓

---

předchozí úvahy ZOBECNÍME / DOPLNÍME později ...

CHARAKTERISTICKÉ VEKTORY — OPAKOVÁNÍ Z ALGEBRY

$F : V \to V$ ... LIN. TRANSFORMACE vekt. prostoru V

Def.: vektor $X \in V$ je char. vektorem zobr. F,

pokud obraz X' je násobkem X, tj.

$(*)$ $\boxed{F \cdot X = \lambda X}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ (... char. číslo ...)

Pozn.

- soustava $(*)$ $\rightsquigarrow$ $(F \cdot X - \lambda X) = 0$,

  resp. $\boxed{(F - \lambda E) \cdot X = 0}$ ... homogenní soustava lin. rov.

- soustava $(*)$ má NETRIVIÁLNÍ řešení

  $\Leftrightarrow$ matice $F - \lambda E$ obs. lin. ZÁVISLÉ řádky

  $\Leftrightarrow$ $\det(F - \lambda E) = 0$ (... char. polynom ...)